VORWORT

Die Theorie des NEWTONschen Potentials von Massenverteilungen im Raum ist eines der ältesten Beispiele einer Verbindung von physikalischer Anschauung und mathematischer Interpretation. Bedeutende Mathematiker vieler Generationen, wie C. F. GAUSS, H. POINCARÉ, D. HILBERT, N. WIENER haben daran mitgearbeitet. Die Entwicklung der modernen Potentialtheorie ist auch wesentlich durch die Arbeiten von G. C. EVANS, M. RIESZ, O. FROSTMAN, M. V. KELDYŠ, M. BRELOT, H. CARTAN, J. DENY, G. CHOQUET, J. L. DOOB, H. BAUER, C. CONSTANTINESCU, V. G. MAZ'JA, B. FUGLEDE und anderen bestimmt worden. Historische Darstellungen wurden z. B. in [K6], [A30], [B40] gegeben. Obwohl einige Teile der Potentialtheorie heute als im wesentlichen abgeschlossen gelten, hat sich die Entwicklung in den letzten Jahren wieder erheblich verstärkt, seit sich viele ihrer leistungsfähigen Begriffe und Methoden durch den zunehmenden Einsatz funktionalanalytischer Methoden auf weite Klassen von Problemen aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen anwenden lassen. Daneben sind in der Analysis auch davon unabhängige Bestrebungen von potentialtheoretischem Charakter zu beobachten.

Jedoch ist auch die Theorie des NEWTONschen Potentials im engeren Sinne nach wie vor von Interesse. Erstaunlicherweise sind hier noch wichtige und naheliegende Probleme offen, z. B. über die Struktur der Menge aller Massenverteilungen in einem Körper, deren Gravitationspotential im Außenraum gegeben ist. Darauf gehen wir in Kapitel III ein. So bringt die klassische Potentialtheorie auch heute noch — wie in allen ihren Entwicklungsphasen — neue Methoden und Betrachtungsweisen hervor, auch für ganz andere Problemkreise, die meist sehr eng mit physikalischen Aufgabenstellungen zusammenhängen. Die Entwicklung der Potentialtheorie für elliptische und parabolische Differentialgleichungen zweiter Ordnung hat sich in den letzten Jahrzehnten sehr stark auf die Axiomatik konzentriert und wurde wesentlich durch die Arbeiten von M. BRELOT und H. BAUER geprägt. Daneben entstanden die verschiedensten Verallgemeinerungen und neue Interpretationen mit vielseitigen und tiefen Beziehungen zu anderen Teilen der Mathematik, besonders zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Hierüber existieren ausgezeichnete Monographien (vgl. Kapitel XI).

Wir wollen hier demgegenüber die kernbezogene Potentialtheorie in den Vordergrund stellen, weil durch sie ein gewisser potentialtheoretischer Zugang auch für elliptische Gleichungen höherer Ordnung möglich wird. Insofern sind die Kapitel über den LAPLACE-Operator und den HELMHOLTZ-Operator auch zur Einführung gedacht. Wir waren bestrebt, Begriffe wie superharmonische Funktionen und Halbordnungen so weit wie möglich zu umgehen, weil sie an den Fall zweiter Ordnung gebunden sind und konzentrieren die Darstellung auf Fundamentallösungen und allgemeinere funktionalanalytische Prinzipien.

Die Beweise in Kapitel III sind so angelegt, daß daraus die Ansatzpunkte für eine Verallgemeinerung auf Gleichungen höherer Ordnung erkennbar sind. Wegen ihrer Bedeutung für elliptische Gleichungen höherer Ordnung wird auch die klassische Theorie der RIESZschen Potentiale und Kapazität ausführlich dargestellt. Es bestehen sehr verschiedene Möglichkeiten, Potentialtheorie für elliptische Gleichungen höherer Ordnung zu betreiben. Während wir uns in Kapitel VIII, entsprechend dem Hauptanliegen unserer Darstellung, mit dem Balayage-Prinzip beschäftigen, erwähnen wir weitere wichtige Möglichkeiten in Kapitel IX, wobei bedeutende Ergebnisse der sowjetischen Schule um V. G. MAZ'JA, E. M. LANDIS, V. A. KONDRAT'EV nur angedeutet werden konnten. Bezüglich der Potentialtheorie bei elliptischen Gleichungen höherer Ordnung sind bei weitem noch nicht alle Probleme gelöst, ganz abgesehen davon, daß ohnehin auf viele Resultate der axiomatischen Theorie verzichtet werden muß. Darauf gehen wir in einem besonderen Paragraphen ein. Andere Richtungen der Potentialtheorie, die mit dem vorliegenden Stoff im Zusammenhang stehen, haben wir in Kapitel XI zusammengestellt. In Kapitel X studieren wir ein Balayage-Prinzip für allgemeine Randwert-Probleme für allgemeine Differentialoperatoren.

Einen besonderen Wert haben wir auf die Darstellung des erwähnten klassischen inversen Problems der Potentialtheorie gelegt, das in analoger Formulierung mit jedem korrekt gestellten Randwert-Problem und einem dazugehörigen Balayage-Prinzip in Verbindung gebracht werden kann, insbesondere mit dem DIRICHLET-Problem für elliptische Gleichungen beliebiger Ordnung. In diesem Zusammenhang weisen wir an vielen Stellen auf die Mittelwertsätze der mathematischen Physik hin und stellen ein Resultat über Mittelwertsätze bei allgemeinen Differentialoperatoren dar.

Das inverse Problem für den LAPLACE-Operator hat interessante Anwendungen u. a. in der Geophysik, so daß ein für praktische Belange wichtiges („nicht korrektes") Problem mit den Begriffen der Potentialtheorie studiert werden kann.

Wegen der vielseitigen mathematischen Techniken, die eingesetzt werden müssen, haben wir im Interesse der leichteren Lesbarkeit des Buches ein Kapitel über funktionalanalytische Hilfsmittel sowie ein Kapitel über die Theorie der elliptischen Randwert-Probleme aufgenommen. Dabei geben wir ohne Beweise eine Übersicht, die allerdings Grundkenntnisse in klassischer Analysis und Funktionalanalysis voraussetzt, und die nicht als eigenständige Einführung gedacht ist. Wir hoffen allerdings, daß diese Teile auch demjenigen Leser nützliche Informationen geben können, der sich mit diesen Gebieten näher vertraut machen möchte.

Die in diesem Buch vorgestellte Auffassung der Potentialtheorie ist wesentlich beeinflußt durch Gedanken und Zielstellungen von G. ANGER zu einer an Differentialgleichungen orientierten Weiterführung der Potentialtheorie. Wir glauben, daß diese erste systematische Darstellung in Buchform die Entwicklung auf diesem Gebiet anregen und die Lösung der im Rahmen der Theorie aufgetretenen neuen Fragestellungen aus anderen Disziplinen beschleunigen wird. Ferner sind wir der Meinung, daß auf dem Gebiet der modernen Potentialtheorie ein Mangel an deutschsprachiger Literatur besteht. Ungeachtet unseres speziellen Anliegens hoffen wir, auch in dieser Hinsicht eine Lücke zu füllen.

Zur technischen Anlage des Buches ist zu bemerken, daß die Sätze, Lemmata usw. in jedem Paragraphen fortlaufend numeriert sind. Verwiesen wird in anderen Paragraphen mit Angabe des betreffenden Kapitels und Paragraphen. Ebenso wird mit der Numerierung der Formeln verfahren. Es wird empfohlen, die Lektüre mit Kapitel III zu beginnen und die Einführungskapitel zum Nachschlagen zu verwenden. An einigen wenigen Stellen sind Übungen eingefügt, die den Stoff ergänzende Aussagen enthalten.

Wir danken Herrn Prof. G. ANGER (Halle) für das Interesse an dieser Darstellung. Einfluß auf die Gestaltung von Kapitel IV hatten auch Arbeiten von Dr. G. ALBINUS (Berlin). Wir danken Herrn Prof. V. G. MAZ'JA (Leningrad), der uns freundlicherweise zusammenfassendes Material über seine Ergebnisse zur Verfügung stellte und weitere wertvolle Hinweise gab, Herrn Prof. E. M. LANDIS (Moskau), der große Teile des Manuskripts gelesen hat und viele sehr nützliche Bemerkungen beitrug, Herrn Prof. M. OHTSUKA (Hiroshima) für eine Vorlesungsausarbeitung, die zur Vereinfachung der Darstellung von Kapitel III beigetragen hat sowie Herrn Prof. B. FUGLEDE (Kopenhagen), dessen Anregungen für die Gestaltung von Kapitel IX wesentlich waren. Schließlich danken wir den Mitarbeitern des Verlages für ihr Entgegenkommen und die aufgewandte Mühe während der Vorbereitung und Fertigstellung des Buches.

Berlin/Rostock, im November 1976

BERT-WOLFGANG SCHULZE
GÜNTHER WILDENHAIN