

# INHALTSVERZEICHNIS

## KAPITEL I

### Mathematische Grundlagen der linearen Optimierung

§ 1.	Gegenstand der linearen Optimierung . . . . .	1
1.1.	Die allgemeine Aufgabe der linearen Optimierung . . . . .	2
1.2.	Beispiel eines linearen Optimierungsproblems . . . . .	4
§ 2.	Grundbegriffe der analytischen Geometrie . . . . .	5
2.1.	Begriffsbildungen der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes . . . . .	5
2.2	Verallgemeinerung der Begriffsbildungen . . . . .	13
§ 3.	Graphische Lösung linearer Optimierungsaufgaben . . . . .	15
3.1.	Beschreibung des graphischen Lösungsverfahrens . . . . .	15
3.2.	Weitere Beispiele zum graphischen Lösungsverfahren . . . . .	19
§ 4.	Lineare Mannigfaltigkeiten . . . . .	25
4.1.	Linearkombination, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit . . . . .	25
4.2.	Vektorbasis . . . . .	29
4.3.	Lineare Mannigfaltigkeiten . . . . .	33
4.4.	Lineare Gleichungssysteme und lineare Mannigfaltigkeiten . . . . .	36
§ 5.	Konvexe Mengen . . . . .	38
5.1.	Abgeschlossene und beschränkte Mengen . . . . .	39
5.2.	Konvexe Linearkombinationen . . . . .	40
5.3.	Konvexe Mengen . . . . .	41
5.4.	Dimension konvexer Mengen . . . . .	45
5.5.	Stützende Hyperebene . . . . .	45
§ 6.	Konvexe mehrkantige Mengen . . . . .	46
6.1.	Eckpunkt . . . . .	46
6.2.	Konvexe Hülle . . . . .	47
6.3.	Konvexe mehrkantige Mengen . . . . .	51
6.4.	Kante . . . . .	54
6.5.	Struktur konvexer mehrkantiger Mengen . . . . .	56

## KAPITEL II

### Theorie der linearen Optimierung

§ 1.	Normalformen linearer Optimierungsaufgaben . . . . .	60
1.1.	Vorbereitende Bemerkungen . . . . .	60
1.2.	Erste Normalform . . . . .	62
1.3.	Matrzenschreibweise linearer Optimierungsaufgaben . . . . .	66
1.4.	Weitere Normalformen . . . . .	67
1.5.	Einführung künstlicher Variablen . . . . .	69

§ 2. Zulässige Basislösungen und Eckpunkte . . . . .	77
2.1. Begriff der zulässigen Basislösung . . . . .	77
2.2. Basis einer zulässigen Basislösung . . . . .	81
2.3. Zulässige Basislösungen und Eckpunkte . . . . .	82
2.4. Ausgeartete zulässige Basislösungen . . . . .	85
2.5. Kanten und benachbarte zulässige Basislösungen . . . . .	87
§ 3. Grundlegende Sätze über die Lösbarkeit linearer Optimierungsaufgaben . . . . .	89
3.1. Satz von der Existenz einer optimalen zulässigen Basislösung . . . . .	90
3.2. Lösungsmannigfaltigkeit . . . . .	92
3.3. Lösbarkeit linearer Optimierungsaufgaben . . . . .	97
§ 4. Dualitätstheorie . . . . .	98
4.1. Erklärung des dualen Problems . . . . .	98
4.2. Dualitätssätze . . . . .	100
4.3. Symmetrische Dualprobleme . . . . .	103
4.4. Geometrische Interpretation der Dualität . . . . .	105

## KAPITEL III

**Theorie und Lösungsalgorithmus der Simplexmethode**

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen . . . . .	115
1.1. Der Grundgedanke der Simplexmethode . . . . .	115
1.2. Beschreibung des Lösungsprozesses der Simplexmethode für ein Beispiel . . . . .	117
§ 2. Theorie der Simplexmethode . . . . .	123
2.1. Vorbereitender Schritt . . . . .	123
2.2. Optimalitätskriterium . . . . .	127
2.3. Kriterium für die Unlösbarkeit . . . . .	130
2.4. Konstruktion einer neuen zulässigen Basislösung . . . . .	132
2.5. Simplextransformation . . . . .	135
§ 3. Lösungsalgorithmus der Simplexmethode . . . . .	138
3.1. Struktur des Rechenschemas . . . . .	138
3.2. Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	139
3.3. Erläuterung des Lösungsalgorithmus . . . . .	141
3.4. Beispiele . . . . .	145
3.5. Rechenkontrollen . . . . .	150
3.6. Rechenaufwand und Speicherkapazität . . . . .	154
3.7. Das verkürzte Simplextableau . . . . .	156
3.8. Ausartung . . . . .	161
3.9. Mehrdeutige Optimallösungen . . . . .	165
3.10. Lösung der dualen Aufgabe . . . . .	168
3.11. Beziehungen zum Austauschverfahren . . . . .	176
3.12. Der Informationsverlust bei der Simplexmethode . . . . .	178
§ 4. Methoden zur Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung . . . . .	182
4.1. Die $M$ -Methode . . . . .	182
4.2. Erläuterung des Vorgehens der Zweiphasenmethode . . . . .	188
4.3. Der numerische Algorithmus der Zweiphasenmethode . . . . .	194
4.4. Die Mehrphasenmethode . . . . .	200

## KAPITEL IV

## Weitere Simplextechniken

§ 1.	Eine Variante des gewöhnlichen Simplexalgorithmus mit veränderter Auswahl der Eingangsvariablen . . . . .	207
§ 2.	Austausch mehrerer Basisvektoren bei einem Schritt der gewöhnlichen Simplexmethode . . . . .	210
2.1.	Formulierung des Konstruktionsprozesses einer neuen zulässigen Basislösung als Optimierungsaufgabe . . . . .	210
2.2.	Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	212
2.3.	Ein numerisches Beispiel . . . . .	216
2.4.	Beurteilung des Lösungsalgorithmus . . . . .	220
§ 3.	Die duale Simplexmethode . . . . .	222
3.1.	Orientierende Vorbemerkungen . . . . .	222
3.2.	Begriff der Basislösung . . . . .	226
3.3.	Theorie der dualen Simplexmethode . . . . .	227
3.4.	Der Lösungsalgorithmus der dualen Simplexmethode . . . . .	230
3.5.	Ergänzende Betrachtungen . . . . .	234
3.6.	Die Methode der Kombination des primalen und dualen Verfahrens . . . . .	236
3.7.	Berechnung eines geeigneten Ausgangstableaus durch Kombination des primalen und dualen Verfahrens . . . . .	238
3.8.	Bestimmung eines dualen Ausgangstableaus . . . . .	240
§ 4.	Die revidierte Simplexmethode . . . . .	245
4.1.	Das Vorgehen der revidierten Simplexmethode . . . . .	245
4.2.	Simplextransformation . . . . .	250
4.3.	Struktur des Rechenschemas . . . . .	254
4.4.	Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	255
4.5.	Ein numerisches Beispiel . . . . .	259
4.6.	Die Produktform der revidierten Simplexmethode . . . . .	262
4.7.	Der numerische Algorithmus der Produktform . . . . .	265
4.8.	Ergänzende Bemerkungen . . . . .	269
4.9.	Vergleich der gewöhnlichen und revidierten Simplexmethode . . . . .	271
4.10.	Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung . . . . .	273
§ 5.	Die revidierte duale Simplexmethode . . . . .	281
5.1.	Beschreibung des numerischen Algorithmus . . . . .	281
5.2.	Ein numerisches Beispiel . . . . .	284
§ 6.	Die symmetrische revidierte Simplexmethode . . . . .	285
6.1.	Matrzenschreibweise der gewöhnlichen Simplextransformation . . . . .	287
6.2.	Das Vorgehen der symmetrischen revidierten Simplexmethode . . . . .	288
6.3.	Struktur des Rechenschemas . . . . .	290
6.4.	Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	291
6.5.	Ein numerisches Beispiel . . . . .	295
6.6.	Ergänzende Bemerkungen . . . . .	299
6.7.	Die Produktform der dualen Simplexmethode . . . . .	300
§ 7.	Weitere Lösungsmethoden der linearen Optimierung . . . . .	302

## KAPITEL V

**Aufgaben der linearen Optimierung mit zusätzlichen Einschränkungen für die Variablen**

§ 1.	Problemstellung . . . . .	310
§ 2.	Lösung von Aufgaben mit unteren Schranken für die Variablen . . . . .	316
§ 3.	Lösung von Aufgaben mit oberen Schranken für die Variablen . . . . .	318
3.1.	Grundgedanke des Lösungsweges . . . . .	319
3.2.	Theorie des modifizierten Simplexalgorithmus . . . . .	323
3.3.	Lösungsalgorithmus der modifizierten Simplexmethode . . . . .	327
3.4.	Beispiel . . . . .	329
3.5.	Ergänzende Bemerkungen . . . . .	334

## KAPITEL VI

**Aufgaben der linearen Optimierung mit Blockstruktur**

§ 1.	Erläuterung spezieller Blockstrukturen . . . . .	336
1.1.	Problemstellung . . . . .	336
1.2.	Probleme mit blockangulärer Struktur . . . . .	337
1.3.	Das Dekompositionsprinzip . . . . .	341
1.4.	Probleme mit Treppenstruktur . . . . .	342
1.5.	Klassifikation der Lösungsmethoden . . . . .	346
§ 2.	Das Dekompositionsverfahren von DANTZIG und WOLFE . . . . .	348
2.1.	Die transformierte Ausgangsaufgabe . . . . .	348
2.2.	Theorie des Dekompositionsverfahrens . . . . .	350
2.3.	Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	353
2.4.	Ein numerisches Beispiel . . . . .	355
2.5.	Ergänzende Bemerkungen . . . . .	360
§ 3.	Weitere Dekompositionsverfahren . . . . .	362
§ 4.	Das direkte Verfahren von MÜLLER-MERBACH . . . . .	372
4.1.	Theorie des Verfahrens . . . . .	372
4.2.	Der Lösungsalgorithmus . . . . .	374
§ 5.	Weitere Lösungsverfahren . . . . .	382

## KAPITEL VII

**Lineare Optimierungsaufgaben des Transporttyps**

§ 1.	Problemstellung der Transportoptimierung . . . . .	386
§ 2.	Eigenschaften des Transportproblems . . . . .	390
§ 3.	Zulässige Basislösungen des Transportproblems . . . . .	392
3.1.	Grundlegende Begriffe und Sätze . . . . .	392

Inhaltsverzeichnis	XIII
3.2. Entwicklung nach den Basisvektoren . . . . .	395
3.3. Ergänzungen . . . . .	397
 § 4. Methoden zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung . . . . .	 398
4.1. Das Streichungsverfahren . . . . .	398
4.2. Die Nordwest-Eckenregel . . . . .	402
4.3. Die aufsteigende Indexmethode . . . . .	403
4.4. Die VOGELSche Approximationsmethode . . . . .	404
 § 5. Die modifizierte Distributionsmethode . . . . .	 406
5.1. Optimalitätsprüfung . . . . .	407
5.2. Verbesserung einer zulässigen Basislösung . . . . .	411
 § 6. Ergänzungen . . . . .	 416
6.1. Reduktion der Kostenmatrix . . . . .	416
6.2. Genauigkeit des Lösungsprozesses . . . . .	417
6.3. Dekomposition . . . . .	418
 § 7. Weitere Transportmodelle . . . . .	 419
7.1. Offene Transportprobleme . . . . .	419
7.2. Transportprobleme mit verbotenen Wegen . . . . .	423
7.3. Transportprobleme mit Kapazitätsbeschränkungen . . . . .	424
7.4. Mehrstufige und verallgemeinerte Transportprobleme . . . . .	424

## KAPITEL VIII

### Änderung linearer Optimierungsmodelle

§ 1.	Nachträgliche Änderung der Daten . . . . .	427
1.1.	Problemstellung . . . . .	427
1.2.	Änderung der Zielfunktion . . . . .	428
1.3.	Änderung des Beschränkungsvektors . . . . .	430
1.4.	Änderung von Nichtbasisspalten der erweiterten Matrix der Nebenbedingungen . . . . .	432
1.5.	Änderung von Basisspalten der erweiterten Matrix der Nebenbedingungen . . . . .	434
1.6.	Änderung von Nebenbedingungen . . . . .	438
§ 2.	Änderungen beim Transportproblem . . . . .	438
2.1.	Änderung der Versand- und Bedarfsmengen . . . . .	438
2.2.	Änderung der Zielfunktion . . . . .	440
2.3.	Modelländerungen . . . . .	440
§ 3.	Modellerweiterungen und Modellreduktionen . . . . .	443
3.1.	Nachträgliche Hinzufügung einer Variablen . . . . .	443
3.2.	Nachträgliche Streichung einer Variablen . . . . .	444
3.3.	Nachträgliche Hinzufügung einer Nebenbedingung . . . . .	446
3.4.	Nachträgliche Streichung einer Nebenbedingung . . . . .	448
§ 4.	Stabilitätsprobleme . . . . .	449
4.1.	Variation eines Koeffizienten der Zielfunktion . . . . .	449
4.2.	Variation einer Komponente des Beschränkungsvektors . . . . .	455

**KAPITEL IX****Parametrische Optimierung**

§ 1.	Lineare Abhängigkeit der Zielfunktion von einem Parameter . . . . .	459
1.1.	Problemstellung . . . . .	459
1.2.	Grundlegende Aussagen . . . . .	460
1.3.	Bestimmung einer Ausgangslösung . . . . .	462
1.4.	Ausartung . . . . .	463
1.5.	Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	465
1.6.	Beispiel . . . . .	466
1.7.	Ergänzungen . . . . .	471
§ 2.	Lineare Abhängigkeit des Beschrankungsvektors von einem Parameter . . . . .	472
2.1.	Problemstellung . . . . .	472
2.2.	Grundlegende Aussagen . . . . .	473
2.3.	Beschreibung des Lösungsalgorithmus . . . . .	474
2.4.	Beispiel . . . . .	474
§ 3.	Das allgemeine Problem der einparametrischen linearen Optimierung . . . . .	479
§ 4.	Ausblick auf weitere Problemstellungen der parametrischen Optimierung . . . . .	483

**KAPITEL X****Ganzzahlige Optimierung**

§ 1.	Aufgabenstellung und Problematik der ganzzahligen Optimierung . . . . .	486
1.1.	Orientierung an einem Beispiel . . . . .	486
1.2.	Klassifikation von linearen Optimierungsproblemen mit Ganzzahligkeitsforderung .	487
1.3.	Klassifikation der Lösungsverfahren . . . . .	489
1.4.	Die numerische Problematik der ganzzahligen Optimierung . . . . .	491
§ 2.	Schnittebenenverfahren . . . . .	494
2.1.	Beschreibung des Verfahrens von GOMORY . . . . .	494
2.2.	Beispiel . . . . .	498
2.3.	Ergänzungen . . . . .	502
§ 3.	Entscheidungsbaumverfahren . . . . .	503
3.1.	Beschreibung des Losungsgedankens . . . . .	503
3.2.	Beispiel . . . . .	505
3.3.	Ergänzungen . . . . .	517
Literaturverzeichnis . . . . .		519
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .		523