

# INHALTSVERZEICHNIS

<i>I. Mengen und Abbildungen</i> .....	1
1. Mengen .....	1
1.1. Einführung .....	1
1.2. Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen .....	5
1.3. Mengenringe .....	10
1.4. Produkt von Mengen .....	13
2. Abbildungen und Funktionen .....	15
2.1. Abbildungen .....	15
2.2. Funktionen .....	19
2.3. Verknüpfungen .....	22
2.4. Relationen .....	23
2.5. Halbordnung .....	27
3. ZORNSches Lemma .....	29
3.1. Fixelementsatz von BOURBAKI-KNESER .....	29
3.2. Auswahlaxiom und mit ihm verwandte Aussagen .....	30
4. Kardinalzahlen .....	32
4.1. Kardinalzahl einer unendlichen Menge .....	32
4.2. Abzählbare Mengen .....	34
4.3. Mächtigkeit des Kontinuums .....	35
4.4. Skala der Kardinalzahlen .....	38
4.5. Summe und Produkt von Kardinalzahlen .....	41
<i>II. Vektorräume und lineare Funktionen</i> .....	44
5. Lineare Räume .....	44
5.1. Definition des linearen Raumes .....	45
5.2. Basis eines linearen Raumes .....	48
5.3. Dimension eines linearen Raumes .....	50
6. Lineare und multilineare Funktionen .....	53
6.1. Definition der linearen Funktion .....	53
6.2. Lineare Funktionen auf endlichdimensionalen Vektorräumen .....	55
6.3. Multilineare Funktionen .....	56
7. Lineare Funktionale .....	60
7.1. Hyperebenen und lineare Funktionale .....	60
7.2. Konvexe Mengen .....	61
7.3. Halbnormen .....	64
7.4. Erweiterungssätze für lineare Funktionale .....	67
<i>III. Metrische Räume und stetige Funktionen</i> .....	70
8. Metrische Räume .....	70
8.1. Definition des metrischen Raumes .....	70
8.2. Offene und abgeschlossene Teilräume .....	75
8.3. Dichte Teilräume .....	80
8.4. Separable metrische Räume .....	82

9.	Folgen im metrischen Raum .....	83
9.1.	Konvergente Folgen .....	83
9.2.	Vollständige metrische Räume .....	86
9.3.	Kompakte metrische Räume .....	90
10.	Teilräume erster und zweiter Kategorie .....	94
10.1.	$F_\sigma$ - und $G_\delta$ -Mengen .....	94
10.2.	Teilräume erster und zweiter Kategorie .....	96
10.3.	Teilräume zweiter Kategorie in einem vollständigen metrischen Raum .....	98
11.	Stetige Funktionen .....	99
11.1.	Schwankung und Stetigkeit in einem Punkt .....	100
11.2.	Stetigkeit auf einer Punktmenge .....	105
11.3.	Partiell stetige Funktionen .....	108
11.4.	Homöomorphismen .....	110
12.	Raum der stetigen beschränkten Funktionen .....	113
12.1.	Metrischer Raum $C(X, Y)$ .....	113
12.2.	Stetige Funktionen auf kompakten Räumen .....	116
12.3.	Approximationssätze von STONE-WEIERSTRASS .....	120
12.4.	Prinzip der kontrahierenden Abbildung .....	124
IV.	<i>Normierte Räume und lineare stetige Funktionen</i> .....	129
13.	Normierte Räume .....	129
13.1.	Definition des normierten Raumes .....	130
13.2.	Reihen .....	133
14.	Lineare stetige Funktionen .....	136
14.1.	Stetigkeit linearer Funktionen .....	137
14.2.	Raum der linearen stetigen Funktionen .....	138
14.3.	Folgen linearer stetiger Funktionen .....	142
14.4.	Isomorphie von normierten Räumen .....	146
14.5.	Multilineare stetige Funktionen .....	148
15.	Erweiterungssätze für lineare stetige Funktionen .....	150
15.1.	Konvexe Mengen in einem reellen normierten Raum .....	150
15.2.	Erweiterungssätze für lineare stetige Funktionen .....	154
15.3.	Vervollständigung eines normierten Raumes .....	158
V.	<i>Intervallfunktionen und Grenzfunktionen</i> .....	160
16.	Intervallfunktionen .....	160
16.1.	Intervalle im euklidischen Raum .....	160
16.2.	Additive Intervallfunktionen .....	162
16.3.	Stetige Intervallfunktionen .....	166
16.4.	Additive Intervallfunktionen endlicher Variation .....	170
17.	Maße .....	173
17.1.	Eigenschaften des Maßes .....	174
17.2.	Erweiterung einer nichtnegativen $\sigma$ -additiven Intervallfunktion zu einem vollständigen Maß .....	178
17.3.	LEBESGUE-meßbare Mengen .....	184
17.4.	Überdeckungssatz von VITALI .....	186
17.5.	Meßbare Funktionen .....	191
18.	Grenzfunktionen von Intervallfunktionen .....	197
18.1.	Definition der Grenzfunktion einer Intervallfunktion .....	197
18.2.	Hinreichendes Kriterium für die $m$ -Stetigkeit additiver Intervallfunktionen .....	199
18.3.	$M$ -Eigenschaft einer Intervallfunktion .....	201
18.4.	Zwischenwertsatz für Grenzfunktionen .....	205

18.5. Reguläre Ableitung additiver Intervallfunktionen endlicher Variation .....	209
19. Mittelwertsätze für Intervallfunktionen .....	211
19.1. Mittelwertsätze für reellwertige Intervallfunktionen .....	211
19.2. Mittelwertsätze für vektorwertige Intervallfunktionen .....	215
<i>VII. Differentialrechnung für Funktionen mit reellen Variablen .....</i>	<i>220</i>
20. Differenzierbare Funktionen einer Variablen .....	220
20.1. Eigenschaften differenzierbarer Funktionen .....	220
20.2. Mittelwertsätze .....	223
20.3. RIEMANNsche Integration .....	226
20.4. TAYLORSche Formel .....	229
21. Differenzierbare Funktionen mit mehreren Variablen .....	232
21.1. Richtungsableitungen .....	232
21.2. Differenzierbare Funktionen .....	235
22. Partielle Ableitungen höherer Ordnung von Funktionen zweier Variablen ....	239
22.1. Differenzenableitungen .....	239
22.2. Partielle Ableitungen zweiter Ordnung .....	243
22.3. Funktionen endlicher Variation .....	245
22.4. Zwei TAYLORSche Formeln .....	247
23. Differentialgleichungen .....	249
23.1. Existenz- und Eindeigkeitssätze für gewöhnliche Differentialgleichungen ..	249
23.2. Eindeigkeitssatz für hyperbolische partielle Differentialgleichungen .....	254
<i>VII. Differentialrechnung für Funktionen mit vektorwertigen Variablen .....</i>	<i>257</i>
24. Ableitungen und Differentiale .....	257
24.1. GÂTEAUXsche und FRÉCHETSche Ableitungen .....	257
24.2. Eigenschaften der FRÉCHETSchen Ableitung .....	264
24.3. Stammfunktionen .....	270
25. Ableitungen höherer Ordnung .....	275
25.1. Definition der Ableitungen höherer Ordnung .....	275
25.2. TAYLORSche Formel .....	280
25.3. Polynome .....	282
25.4. Relative Extrema .....	289
26. Inverse und implizite Funktionen .....	293
26.1. Inverse einer linearen stetigen Funktion .....	293
26.2. Lokale Inverse einer stetig differenzierbaren Funktion .....	297
26.3. Implizite Funktionen .....	301
<i>VIII. Integralrechnung .....</i>	<i>305</i>
27. Integrierbare Funktionen .....	305
27.1. Integral einer Treppenfunktion .....	305
27.2. Erweiterung des Integralbegriffes .....	308
27.3. Eigenschaften des Integrals .....	313
27.4. Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration .....	315
27.5. BANACH-Raum $L_p(\mu, F)$ .....	319
28. Integration über eine Produktmenge .....	324
28.1. $\sigma$ -Algebra einer Produktmenge .....	324
28.2. Produktmaß .....	326
28.3. Satz von FUBINI .....	328
29. Integration über den euklidischen Raum .....	331
29.1. Zusammenhang zwischen dem RIEMANN- und dem LEBESGUE-Integral .....	332

29.2. Partielle Integration .....	336
29.3. Integration über einen Normalbereich .....	338
29.4. Substitutionsregel .....	340
30. Unbestimmte Integrale .....	346
30.1. Variation einer Mengenfunktion .....	346
30.2. Satz von RADON-NIKODYM .....	352
30.3. Reguläre Ableitung eines unbestimmten LEBESGUE-Integrals .....	356
30.4. Absolut stetige Funktionen mit reellen Variablen .....	359
Literaturverzeichnis .....	369
Symbolverzeichnis .....	375
Sachverzeichnis .....	377