Die Primzahlen

Ungebärdige Zahlen

Eine ganz besondere Sorte von Zahlen sind die unteilbaren. Sie widersetzen sich jedem Versuch der Zerstückelung durch Division und halten unserm geistigen Angriff, sie mit Klugheit oder List restlos in gleiche Teile zu zerlegen, eisern stand. Rochers de bronze der Zahl. Wie kommt das nur? Wir können doch sogar ein Stück Eisen in gleiche Teile ohne Rest zerlegen! Warum nicht eine bestimmte Sorte von Zahlen? Ja, es ist geheimnisvoll, aber es geht wirklich nicht. Die unteilbaren Zahlen, genannt Primzahlen, trotzen unserer Weisheit und unseren Künsten. Sie fügen sich auch keinem Gesetz. Es ist bisher nicht gelungen, ein periodisches System oder irgendeine Reihenfolge zu entdecken, nach der man sie in der fortlaufenden Zahlengeraden erkennen könnte. Nein, in völlig regelloser Folge, bald ziemlich dicht aufeinanderfolgend, bald weit auseinanderstehend, tauchen sie auf. Mit der zunehmenden Zahlengröße folgen sie zwar seltener, setzen sich aber in der unendlichen Zahlenreihe selbst unendlich fort, dadurch wieder eine Unendlichkeit besonderer Art bildend. Die Primzahlen sind alle ungerade, bis auf eine, und das ist die Zwei (2), die von den meisten nicht für eine Primzahl gehalten wird. Sehr große Primzahlen sind schwer zu erkennen und schwierig zu berechnen, denn nur die Berechnung gibt den Beweis ihrer Identität. Die Zahlenreihe bis zu 100 Millionen enthält 5 761 460 Primzahlen. Sie widersetzen sich unserem Ordnungssinn, diese eigenwilligen, seltsamen Zahlen, es bleibt geheimnisvoll um sie.

Wir multiplizieren

Jede Multiplikation ist eine fortgesetzte Addition, z. B.

$$4 \times 8 = 32 \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 8 \\ 8 \\ 8 \\ \hline 32 \end{array}$$

Die umständliche Rechenoperation des Addierens wird vereinfacht durch die Zerlegung der Faktoren, z.B.

$$\begin{array}{rl} \underline{32 \times 16} & \\ 12 & (\;6 \times \;\;2) \\ 180 & (\;6 \times 30) \\ 320 & (10 \times 32) \\ \hline 512 & \end{array}$$

Bei Ausführung der Multiplikation wird der Multiplikator (16) in Zehner (1) und Einer (6) zerlegt und dann mit dem gleichfalls zerlegten Multiplikandus (32) wie folgt multipliziert: Bei $6 \times 2 = 12$ werden nur die 2 (Einer) hingeschrieben; 6×30 wird unter Weglassung der Null als $6 \times 3 = 18$ multipliziert und die Zehner (8) mit dem noch unverrechneten Zehner (1) zu 19 addiert und vor die Einer (2) geschrieben. Es bleibt noch Zehner (1) mit 32 zu multiplizieren (10×32) = 320. Dieses Resultat wird unter Weglassung der Null, eine Stelle nach links vorgerückt, (Zehner unter Zehner) niedergeschrieben. Hierauf erfolgt die Addition der beiden Zwischensummen zur Endsumme:

$$\begin{array}{rl} \underline{32 \times 16} & \\ 192 & (6 \times 2 + 6 \times 3) \\ 32\; & (1 \times 32) \\ \hline 512 & \end{array}$$

Die mühsame Errechnung der Zwischensummen und Additionen brauchen wir bei Benutzung der Tafeln nicht auszuführen. Lediglich bei umfangreichen Multiplikationen sind Zwischensummen abzulesen und zu addieren.

Und dividieren

Die Division ist sozusagen die Kehrseite oder Umkehrung der Multiplikation ($4 \times 8 = 32$) ($32 : 4 = 8$). Sie kann sich demzufolge gar nicht anders darstellen als eine fortgesetzte Subtraktion:

$$\begin{array}{r} 32 \\ -\ 8 \\ \hline 24 \\ -\ 8 \\ \hline 16 \\ -\ 8 \\ \hline 8 \end{array}$$

Die Ausführung wird auch hier durch das Divisionsverfahren vereinfacht ($32 : 4 = 8$). Durch die schulmäßige Einprägung des Einmaleins wird die Rechnungsfindung erleichtert. Das erweiterte Einmaleins von 1 bis 1000 oder 10 000 kann kein Mensch auswendig lernen. Es liegt aber in unsern Tabellen fertig ausgerechnet und abgedruckt vor. Wir brauchen nur noch abzulesen.

Eine vergnügte Wurzelzieherei

gibt es bestimmt beim Zahnarzt nicht, ebensowenig beim Stubbenroden. Aber auch die Zahl hat eine Wurzel, die sich uns, von Rechenkünsten bezwungen, zeigt. Als Wurzel birgt sich der Teil einer Zahl, der, mit sich selbst multipliziert, als Ganzes sich enthüllt.

Also, kurz gesagt, 2 ist die Wurzel aus 4 ($\sqrt{4} = 2$), denn $2 \times 2 = 4$. Die Wurzel (2), mit sich selbst multipliziert, zeigt sich als Ganzes (4). Hier haben wir es mit der Quadratwurzel zu tun ($\sqrt[2]{\ }$). Es gibt aber auch tiefer dringende Wurzeln, z. B. die Kubikwurzel ($\sqrt[3]{\ }$), die, dreimal erscheinend, zweimal mit sich multipliziert, die ganze Zahl ergibt. Z.B. 3 ist die Kubikwurzel aus 27 ($\sqrt[3]{27} = 3$), denn $3 \times 3 \times 3 = 27$. Es gibt aber auch vierte, sechste Wurzeln usw., ja, theoretisch sind Wurzeln in unendlicher Gliederung denkbar. Errechnen kann sie aber dann niemand mehr.

Vergnüglich ist die Wurzelzieherei auch bei den Zahlen nur für den, der Spaß an Zahlenrätseln hat und gerne harte Nüsse knackt. Wer von Berufs wegen viel damit zu tun hat, bedient sich der Hilfe der Logarithmen, mittels derer er die Radizierung (Wurzelziehung) in eine Division verwandeln kann.

Die Radizierung (Wurzelausziehung) ist die umgekehrte Potenzierung. Genausogut, wie die Subtraktion die umgekehrte Addition und die Division die umgekehrte Multiplikation ist. Wir machen uns ihre Berechnung daher am besten an einer Zahl klar, die wir in die entsprechende Potenz heben. Dies geschieht nach der Formel, die wohl alle in der Schule früher gelernt und dann wieder vergessen haben:

$a^2 + 2ab + b^2$ ab
also beispielsweise bei 98

$$\begin{array}{lr} a^2 \text{ (die Quadratzahl von 90) } (90 \times 90) = & 8100 \\ 2ab\ (2 \times 90 = 180 \times 8) & 1440 \\ b^2 = 8 \times 8 & 64 \\ \hline & 9604 \end{array}$$

Wenn wir jetzt in der umgekehrten Reihenfolge vorgehen, müssen wir aus 9604 die Quadratwurzel 98 errechnen können. Wir wollen es versuchen.

	$\sqrt[2]{96/04} = 98$	
	81	(a^2)
18 in	150	($2a = 2 \times 9 = 18$)
	144	($2ab$)
	64	(b^2)
	64	

Zunächst teilen wir die beiden letzten Stellen, die $2ab$ und b^2 enthalten, durch einen senkrechten Strich ab. Dadurch behalten wir 9 Tausender und 6 Hunderter übrig, die gemeinsam das Quadrat der Zehner bilden. Oder, einfacher ausgedrückt: Such die Wurzel aus 96. Du erkennst sie mit einem Blick als 9, denn $9 \times 9 = 81$. Schreib diese unter die 96. Es bleibt Rest 15. Um b herauszubekommen, mußt du $2a = 18$ in 150 (15 mit heruntergezogener 0) dividieren. Es geht 8mal (144). Bleibt Rest 6. Dazu 4 herunter = 64. $b^2 = 8 \times 8 = 64$. Die Rechnung geht auf.

Ein feiner Trick

Die Vielseitigkeit der Tabellen sei an einem kleinen Beispiel erläutert: Angenommen, wir hätten zu rechnen
978 786 × 187

und erkennen sogleich, daß wir

978 × 187 =	182 886	in Tab. 187,	Spalte 10,	Zeile 97	
786 × 187 =	146 982	187	8	78	finden.

Jetzt soll der Multiplikator aber auch sechsstellig sein: 187 196. Das bringt uns nicht aus der Fassung, wir schlagen Tabelle 196 auf und lesen ab:

978 × 196 =	191 688	in Tab. 196,	Spalte 10,	Zeile 97
786 × 196 =	154 056	196	8	78

978 786 × 187 196 = 183 224 824 056

Ein immerhin schon zwölfstelliges Resultat mit zwei Blicken und einer leichten Addition. Das Verfahren läßt sich, wie ersichtlich, mit beliebig hohen Zahlen, vorn und hinten angekoppelt fortsetzen.

Wir machen die Probe auf die Richtigkeit, indem wir das Resultat durch den Multiplikator dividieren, und ersehen daraus gleich, wie man laut Tabelle mit vielstelligen Divisoren umspringt.

183224824056 : 187196 = 978786	
182886	(187 × 978)
338824	
191688	(196 × 978), drei Stellen nach rechts
147136	
146982	(187 × 786)
154056	
154056	(196 × 786), drei Stellen nach rechts

Die Bruchrechnung

$\frac{1}{2}$

wird durch Umwandlung der echten Brüche in Dezimalbrüche zu einer normalen Multiplikation bzw. Division, Addition oder Subtraktion, z. B.:

$^1/_2 \times {}^1/_4 = 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$ ($^1/_8$)
$^1/_2 : {}^1/_4 = 0{,}5 : 0{,}25 = 2$
$^1/_2 + {}^1/_4 = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$ ($^3/_4$)
$^1/_2 - {}^1/_4 = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$ ($^1/_4$)

Nachstehend bringen wir die Berechnung der echten Brüche mit den Nennern 1 bis 10 zu Dezimalbrüchen, zum Ablesen für den Bedarfsfall:

$^1/_2 = 0{,}5$	$^1/_3 = 0{,}333...$	$^1/_4 = 0{,}25$	$^1/_5 = 0{,}2$	$^1/_6 = 0{,}166...$
	$^2/_3 = 0{,}666...$	$^3/_4 = 0{,}75$	$^2/_5 = 0{,}4$	$^2/_6 = 0{,}333...$
			$^3/_5 = 0{,}6$	$^3/_6 = 0{,}5$
			$^4/_5 = 0{,}8$	$^4/_6 = 0{,}666...$
				$^5/_6 = 0{,}833...$

$^1/_7 = 0{,}\overline{142857}$	$^1/_8 = 0{,}125$	$^1/_9 = 0{,}111...$
$^2/_7 = 0{,}285714$	$^2/_8 = 0{,}25$	$^2/_9 = 0{,}222...$
$^3/_7 = 0{,}428571$	$^3/_8 = 0{,}375$	$^3/_9 = 0{,}333...$
$^4/_7 = 0{,}571428$	$^4/_8 = 0{,}5$	$^4/_9 = 0{,}444...$
$^5/_7 = 0{,}714285$	$^5/_8 = 0{,}625$	$^5/_9 = 0{,}555...$
$^6/_7 = 0{,}857142$	$^6/_8 = 0{,}75$	$^6/_9 = 0{,}666...$
	$^7/_8 = 0{,}875$	$^7/_9 = 0{,}777...$
		$^8/_9 = 0{,}888...$

Die fertig ausgerechneten Bruchwerte für jede Zahl können aus den Tabellen abgelesen werden, und zwar stehen sie in jeder Tabelle an der gleichen Stelle, wie fogt:

$^1/_{10}$ bis $^9/_{10}$, Spalte 3 bis 11, Tabellenkopf

$^1/_5$ $^4/_5$	4, 6, 8, 10		$^1/_8$ (0,125)	Spalte 7,	Zeile 12
$^1/_6$ $^5/_6$	12 bis 15		$^3/_8$ (0,375)	7	37
$^1/_3$, $^2/_3$, $^3/_9$, $^6/_9$	13, 14		$^5/_8$ (0,625)	7	62
$^1/_4$, $^3/_4$, $^2/_8$, $^6/_8$	16, 17		$^7/_8$ (0,875)	7	87
$^1/_7$ (0,143)	Spalte 5,	Zeile 14	$^1/_9$ (0,111)	3	11
$^2/_7$ (0,286)	8	28	$^2/_9$ (0,222)	4	22
$^3/_7$ (0,429)	11	42	$^4/_9$ (0,444)	6	44
$^4/_7$ (0,571)	3	57	$^5/_9$ (0,556)	8	55
$^5/_7$ (0,714)	6	71	$^7/_9$ (0,778)	10	77
$^6/_7$ (0,857)	9	85	$^8/_9$ (0,889)	11	88

Soll aus irgendeinem Grunde mit echten Brüchen gerechnet werden, so erinnern wir uns:

Multiplikation $^1/_3 \times {^1/_4} = \dfrac{1 \times 1}{3 \times 4} = {^1/_{12}}$

Division $^1/_3 : {^1/_4} = \dfrac{1 \times 4}{3 \times 1}$ $^4/_3 = 1^1/_3$ (Divisorbruch umkehren)

Subtraktion $^1/_3 - {^1/_4} = {^4/_{12}}$ gleichnamig machen, d. h. gemeinsamen Nenner

$- {^3/_{12}}$ suchen ($3 \times 4 = 12$)

$^1/_{12}$

Addition $^1/_3 + {^1/_4} + {^1/_6} = {^4/_{12}}$ gemeinsamer Nenner $3 \times 4 = 12$, 6 geht auch in 12

$+ {^3/_{12}}$

$+ {^2/_{12}}$

$^9/_{12} = {^3/_4}$

Die verzwickte Prozentrechnung

Sie löst sich bei gutem Willen ganz einfach. Prozente sind Brüche mit dem Nenner 100, während der dazugehörige Zähler stets den Prozentsatz angibt, z. B.: $^1/_{100} = 1\,\%$, $^2/_{100} = 2\%$, $^{15}/_{100} = 15\%$ usw.

1%	2%	3%	4%	5%
$^1/_{100}$	$^1/_{50}$	$^3/_{100}$	$^1/_{25}$	$^1/_{20}$
0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
6%	10%	20%	25%	50%
$^3/_{50}$	$^1/_{10}$	$^1/_5$	$^1/_4$	$^1/_2$
0,06	0,1	0,2	0,25	0,5

$^1/_2$%	$2\frac{1}{2}$%	$3\frac{1}{3}$%	$4^1/_6$%	$6^1/_4$%
$^1/_{200}$	$^1/_{40}$	$^1/_{30}$	$^1/_{24}$	$^1/_{16}$
0,005	0,025	0,033...	0,042	0,063
$6^2/_3$%	$8^1/_3$%	$12^1/_2$%	$16^2/_3$	$33^1/_3$%
$^1/_{15}$	$^1/_{12}$	$^1/_8$	$^1/_6$	$^1/_3$
0,067	0,083	0,125	0,167	0,333...

Mit drei sich wiederholenden Größen kommen wir bei der Prozentrechnung aus:
a) Grundwert (das ist die Summe, von der Gewinn oder Verlust zu berechnen ist)
b) Prozentwert (das ist der Verlust oder Gewinn im ganzen)
c) Prozentsatz (Verlust oder Gewinn auf 100 Teile des Ganzen)

Suchen wir einmal den Prozentwert:

Wieviel sind 4% von 800 DM?

Gleichung: $\dfrac{\text{Prozentsatz} \times \text{Grundwert}}{\text{100 (Vergleichswert)}} = \dfrac{4 \times 800}{100} = 32 \text{ DM}$

Bei diesem Beispiel sind also 800 der Grundwert
32 der Prozentwert
4 der Prozentsatz

Nähere Erläuterungen sind nicht nötig.

Nun forschen wir einmal nach dem Grundwert.

Von welcher Summe sind 35 DM = 5%?

Gleichung: $\dfrac{\text{Prozentwert} \times 100}{\text{Prozentsatz}} = \dfrac{35 \times 100}{5} = 700 \text{ DM}$

Jetzt versuchen wir auch den versteckten Prozentsatz zu finden.
20 DM sind wieviel Prozent von 400 DM?

Gleichung: $\dfrac{\text{Prozentwert} \times 100}{\text{Grundwert}} = \dfrac{20 \times 100}{400} = 5\%$

Mit dem Endwert wollen wir uns auch noch ein wenig beschäftigen. Der Endwert stellt sich vor als der Betrag Einkauf + Gewinn oder
Einkauf — Verlust.

Er ist also nichts anderes als der um den Prozentwert vermehrte oder verminderte Grundwert.

Endwert 525 DM, Gewinn 5% = Einkaufspreis?
Gewinn?

Gleichung $\dfrac{100 \times \text{Endwert}}{100 + \text{Gewinn}} = \dfrac{100 \times 525}{105} = \begin{matrix}\text{500 DM Einkaufspreis}\\ \text{25 RM Gewinn}\end{matrix}$

Endwert 475 DM, Verlust 5% = Einkaufspreis?
Verlust?

Gleichung $\dfrac{100 \times \text{Endwert}}{100 - \text{Verlust}} = \dfrac{100 \times 475}{95} = \begin{matrix}\text{500 DM Einkaufspreis}\\ \text{25 DM Verlust}\end{matrix}$

Die ehrwürdige Potenz

ist sozusagen die Summe aus den multiplizierten Wurzeln. Sie stellt sich vor als Quadratzahl (2. Potenz), geschrieben 2^2, in Zahlen ausgedrückt: $2 \times 2 = 4$ (4 ist also die 2. Potenz von 2), oder als Kubikzahl (3. Potenz), geschrieben 2^3, in Zahlen: $2 \times 2 \times 2 = 8$ (8 ist die 3. Potenz von 2), oder als 4. Potenz: geschrieben 2^4, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, $a^2 = (a \cdot a)$, $a^3 = (a \cdot a \cdot a)$, $a^4 = (a \cdot a \cdot a \cdot a)$ usw. Theoretisch kann man die Potenzen unendlich vermehren. Es entstehen jedoch bald Zahlen, die sich wegen ihrer Größe und Vielseitigkeit unserm Begriffsvermögen und unseren Rechenkünsten entziehen.

Der (kategorische) Imperativ

Den Imperativ nennt man eine Rechenoperation, welche in ihrer Durchführung die zu berechnende Zahl mit sämtlichen auf der Zahlengeraden vor ihr stehenden Zahlen multipliziert. Der Rechenbefehl dazu heißt: ! Also

2!	1×2	=	2
3!	$1 \times 2 \times 3$	=	6
4!	$1 \times 2 \times 3 \times 4$	=	24
5!	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$	=	120
6!	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$	=	720
7!	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$	=	5040
8!	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$	=	40320
9!	$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$	=	362880

Man kommt auch hierbei rasch zu sehr hohen Zahlen.

Die Sicherheit der Zahlen- oder Buchstabenschlösser gegen Auffindung der ihre Öffnung bewirkenden Formel ist enorm.

Ein dreistelliges Schloß aus 3 Zahlenringen zu je 1 bis 0 ergibt 30! Möglichkeiten, also $1 \times 2 \times 3 \times 4$ bis 30.

Das Ergebnis ist eine Zahl, die alle Versuche, sie durch Probieren aufzufinden, hoffnungslos macht.

Die Hexer

Logarithmen sind ganz besondere Organe jeder Zahl. Sie besitzen die Kraft der Verzauberung. Sie können nämlich die Multiplikation in eine Addition verwandeln. ebenso wie die Division in eine Subtraktion, die Radizierung in eine Division und die Potenzierung in eine Multiplikation verzaubern. Daß sie dadurch bei schwierigen und umständlichen Rechenoperationen sehr arbeitserleichternd wirken, liegt auf der Hand. Das Arbeiten mit ihnen ist allerdings ziemlich umständlich, denn man muß mit sechs- bis neunstelligen, fast stets irrationalen Zahlen rechnen, zunächst den Numerus (die umzuwandelnde reelle Zahl) in den Logarithmen verwandeln und nach Abschluß der Rechenoperation rückwandeln. Man wird daher das Verfahren nicht bei normalen Multiplikationen und Divisionen anwenden (die lösen wir mit unseren Tabellen leichter), sondern lediglich Radizierungen und Potenzierungen damit bearbeiten.

log

Schon um 1600 rechnete Briggs die dekadischen Logarithmen aus, die sich auf der 10 aufbauen und mit denen in der Praxis noch heute hauptsächlich gearbeitet wird. Sie bestehen aus der Charakteristik, die vor dem Komma steht (10 = 1, 100 = 2, 1000 = 3, usw.), und der Mantisse, die, fünf- und achtstellig, nach dem Komma erscheint ($10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$). Die kleinen hochstehenden Zahlen (Potenzen) zeigen gleichzeitig die Zahl der Nullen an und ergeben, miteinander addiert, wieder die Zahl der Nullen des Resultats der Multiplikation ($10 \times 100 = 1000$) = ($10^1 \times 10^2 = 10^3$) ($^{1+2} = {}^{3}$, $10^3 = 1000$).

Wer sich eingehender über die Arbeitsmöglichkeiten mit den Logarithmen zu unterrichten wünscht, sei auf die im Handel erhältlichen Logarithmentafeln und die umfangreiche Literatur hierüber hingewiesen.