Einleitung.

Methodische Vorbetrachtungen und Überblick.

In **1**, § 5 haben wir die uns als Leitfaden dienende Grundaufgabe der Algebra formuliert und zwei besonders wichtige Teilaufgaben hervorgehoben. Deren erste, das Auflösungsproblem linearer Gleichungssysteme, wurde in **1**, III und IV vollständig gelöst. Der vorliegende Band **2** ist der zweiten jener Teilaufgaben gewidmet:

Es sei K ein Körper und

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0,\ n \geqq 1)$$

ein nicht zu K gehöriges Element aus $K[x]$. Es sollen Methoden zur Gewinnung aller Lösungen der **algebraischen Gleichung**

$$f(x) \doteq 0$$

entwickelt werden.

Da die Gleichung $f(x) \doteq 0$ dasselbe fordert wie $\frac{f(x)}{a_n} \doteq 0$, ist es keine Einschränkung, wenn wir uns im folgenden auf Gleichungen der Form

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n \doteq 0 \qquad (n \geqq 1)$$

beschränken. Wir nennen solche Elemente $f(x)$ aus $K[x]$ Polynome (in x) **in** oder **aus**[1]) oder **über** K und den eindeutig bestimmten Index $n \geqq 1$ ihren Grad [vgl. **1**, § 5, (2.) [48]]. Für Lösungen einer algebraischen Gleichung $f(x) \doteq 0$ gebrauchen wir ferner die übliche Bezeichnung **Wurzeln des Polynoms $f(x)$.**

Die Behandlungsmethoden für unsere jetzige Aufgabe sind von den in **1** zur Behandlung linearer Gleichungssysteme ver-

---

[1]) Dies ist deshalb eigentlich nicht korrekt, weil die $f(x)$ Elemente aus $K[x]$ sind. Unsere Ausdrucksweise bezieht sich also auf die Koeffizienten.

wendeten wegen der folgenden beiden eng zusammenhängenden Umstände grundsätzlich verschieden:

1.) Es kann (im Gegensatz zu **1**, IV) kein allein aus den im Grundkörper K definierten vier elementaren Rechenoperationen gebildetes Verfahren (kurz r a t i o n a l e s R e c h e n v e r f a h r e n) existieren, um über die Lösbarkeit einer algebraischen Gleichung zu entscheiden und im Lösbarkeitsfalle alle Lösungen zu berechnen.

2.) Lösbarkeit und Lösungsgesamtheit einer algebraischen Gleichung aus K sind (im Gegensatz zu **1**, Satz 84 [149]) abhängig von der Wahl des Grundkörpers, d. h. davon, ob man für die Lösungen nur den Körper K oder irgendeinen Erweiterungskörper von K in Betracht zieht, und im allgemeinen werden algebraische Gleichungen aus K überhaupt erst in geeigneten Erweiterungskörpern von K lösbar.

Für 2.) mag schon hier, die späteren allgemeinen Einsichten illustrierend, das einfache Beispiel der Gleichung $x^2 - 2 \doteq 0$ genannt werden, die im Körper der rationalen Zahlen keine Lösung, im Körper der reellen Zahlen dagegen die beiden Lösungen $\pm \sqrt{2}$ besitzt. Aus 2.) ergibt sich 1.); denn würde ein Verfahren, wie in 1.) genannt, existieren, so wäre dieses, wie in **1**, Satz 84 [149], unabhängig von der Wahl des Grundkörpers, was 2.) widerspricht[1]).

Wegen 1.) darf unsere Aufgabe nicht dahin verstanden werden, daß die Lösungen einer algebraischen Gleichung im obigen Sinne b e r e c h n e t werden sollen. Was statt dessen zu erstreben ist, zeigt 2.). Da nämlich für abstrakte Grundkörper (d. h. unter alleiniger Voraussetzung der in **1**, § 1 zusammengestellten Gegebenheiten) nicht von vornherein etwas Entsprechendes zur Verfügung steht, wie im obigen

---

[1]) Damit soll natürlich nicht gesagt sein, daß nicht für spezielle Grundkörper, z. B. den Körper der rationalen Zahlen, wirkliche Auflösungsverfahren existieren. Nur gehören diese in dem Sinne nicht mehr zur Algebra, als dazu außer den vier elementaren Rechenoperationen noch andere, der Analysis angehörige Hilfsmittel herangezogen werden müssen. Vgl. auch dazu § 11 [77].

Beispiel der aus der Elementarmathematik (Grundlagen der Analysis) bekannte reelle Zahlkörper, da vielmehr im allgemeinen Falle über das Vorhandensein von Erweiterungskörpern, die die Lösung einer algebraischen Gleichung ermöglichen, zunächst keinerlei Kenntnis besteht, kommt es darauf an, solche Erweiterungskörper und damit die Wurzeln algebraischer Gleichungen zu konstruieren.

Unsere Entwicklungen werden demgemäß den folgenden Gang nehmen: Nachdem wir in I und II vorbereitende Tatsachen über die die linken Seiten algebraischer Gleichungen bildenden Polynome aus K einerseits und die (vorläufig hypothetischen) Wurzeln algebraischer Gleichungen aus K in Erweiterungskörpern andererseits auseinandergesetzt haben, konstruieren wir in III die Wurzelkörper algebraischer Gleichungen und damit deren Wurzeln. Dadurch ist dann die obige Aufgabe vom praktischen Standpunkt (analog zu 1, IV — Lösungsbestimmung) als gelöst anzusehen. Vom theoretischen Standpunkt erhebt sich darüber hinaus (analog zu 1, III — Struktur der Lösungsgesamtheit) die hier ganz besonders interessante Frage nach der Struktur der Wurzelkörper algebraischer Gleichungen, insbesondere nach ihrem Aufbau aus möglichst einfachen Bestandteilen. Diese im Mittelpunkt unseres Interesses stehende Frage behandeln wir in IV durch Darlegung der sogenannten Galoisschen Theorie, die die Struktur jener Körper mit der Struktur gewisser endlicher Gruppen, ihrer Galoisgruppen, in engen Zusammenhang bringt. In V beantworten wir schließlich mittels dieser Theorie die Frage nach der Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen durch Wurzelzeichen, d. h. die berühmte Frage, wann die Wurzeln einer algebraischen Gleichung unter Hinzunahme der (bei festem Grundkörper nicht unbeschränkt und eindeutig definierten) Operation des Wurzelziehens berechnet werden können.