SAMMLUNG GÖSCHEN BAND 931

HÖHERE ALGEBRA

von

DR. HELMUT HASSE
o. Professor für Mathematik an der Universität Hamburg

I
LINEARE GLEICHUNGEN

Fünfte, neubearbeitete Auflage

WALTER DE GRUYTER & CO.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung · J. Guttentag,
Verlagsbuchhandlung · Georg Reimer · Karl J. Trübner · Veit & Comp.
BERLIN 1963

Die Gesamtdarstellung umfaßt folgende Bände:

Band I: Lineare Gleichungen
(Sammlung Göschen Band 931)

Band II: Gleichungen höheren Grades
(Sammlung Göschen Band 932)

Inhalt

Literaturverzeichnis

1. E. Artin, Galoissche Theorie, Leipzig 1959.
2. M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra (Deutsch von H. Beck), 2. Aufl., Leipzig 1924 (Unveränderter Abdruck der 2. Aufl. 1932).
3. L. E. Dickson, Höhere Algebra (Deutsch von E. Bodewig), Leipzig-Berlin 1929.
4. R. Fricke, Lehrbuch der Algebra, Bd. 1—3, Braunschweig 1924—28.
5. W. Gröbner, Matrizenrechnung, München 1956.
6. O. Haupt, Einführung in die Algebra, Bd. 1, 2, 3. u. 2. Aufl., Leipzig 1956/54.
7. R. Kochendörffer, Einführung in die Algebra, Berlin 1955.
8. R. Kochendörffer, Determinanten und Matrizen, Leipzig 1957.
9. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, 4. Aufl., Berlin 1954.
10. L. Kronecker, Vorlesungen über Mathematik (Bd. II 2 Determinanten, herausgegeben von K. Hensel), Leipzig 1903.
11. W. Krull, Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt, Bd. 1, Slg. Göschen 930, 2. Aufl. Berlin 1952, Bd. 2, Slg. Göschen 933, Berlin 1959.
12. A. G. Kurosch, Gruppentheorie, Berlin 1953 (1. Nachdruck 1956).
13. O. Perron, Algebra, Bd. 1, 2, 3. Aufl., Berlin 1951.
14. G. Pickert, Einführung in die höhere Algebra, Göttingen 1951.
15. G. Pickert, Analytische Geometrie, 4. Aufl., Leipzig 1961.
16. L. Rédei, Algebra, Leipzig 1959.
17. O. Schreier — E. Sperner, Vorlesungen über Matrizen, Leipzig-Berlin 1932.
18. W. Specht, Gruppentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
19. A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 4. Aufl., Basel-Stuttgart 1956.
20. E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, Bd. 1, 2, 4. u. 3. Aufl., Göttingen 1959/60.
21. E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Crelles Journal 137 (1909). — Neu herausgegeben und mit einem Anhang: „Abriß der Galoisschen Theorie“ versehen von R. Baer und H. Hasse, Berlin 1930.
22. N. Tschebotarew, Grundzüge der Galoisschen Theorie, Groningen-Djakarta 1950.
23. B. L. van der Waerden, Algebra, Bd. 1, 2, 5. u. 4. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960/59.
24. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, 2, 2. Aufl., Braunschweig 1898/99.
25. H. Weber, Kleines Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1912 (Zweiter unveränderter Abdruck 1921).
26. H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig-Berlin 1937 (2. Aufl., engl. Übersetzung, Göttingen 1958).

Es werden zitiert: mit **1** der vorliegende Band I, mit **2** der anschließende Band II, mit **3** der zugehörige Aufgabenband. — In eckigen Klammern hinter Satz- und Definitionsnummern beigefügte Zahlen bezeichnen die zugehörige Seitenzahl. Innerhalb desselben Paragraphen und bei kurz aufeinanderfolgenden Wiederholungen sind solche Verweise gespart.

Einleitung

Die Grundaufgabe der Algebra

Das Wort *Algebra* stammt aus dem Arabischen und bedeutet wörtlich das Hinüberschaffen eines Gliedes von einer Seite einer Gleichung auf die andere. Späterhin versteht man unter Algebra allgemein die Lehre von der Auflösung von Gleichungen (und zwar ausschließlich von solchen, die zu ihrer Bildung nur die vier sog. elementaren Rechenoperationen erfordern) mit einer Anzahl unbekannter Größen nach diesen. Dieser Aufgabe sind die beiden vorliegenden Bändchen gewidmet.

Es liegt schon in der gegebenen Erläuterung des Wortes Algebra und ist für die moderne Auffassung der Aufgaben dieser Disziplin charakteristisch, daß es nicht die Objekte, d. h. die Größen, die aus den aufzulösenden Gleichungen berechnet werden sollen, sind, die im Mittelpunkt der Betrachtung stehen, sondern vielmehr der Prozeß des Auflösens selber. Die Objekte (z. B. die drei Seiten eines Dreiecks, dessen Höhen gegeben sind) interessieren denjenigen, der die Algebra anwendet (im Beispiel den Geometer), den Algebraiker beschäftigen allein die allgemeinen, formalen Regeln (Formalismen, Algorithmen), mittels derer aus den gegebenen Gleichungen die gesuchten Größen bestimmt werden können (also im Beispiel die Regeln zur Auflösung eines Systems von drei Gleichungen nach drei Unbekannten). Wenn hiernach die Algebra als bloße Hilfswissenschaft anderer Zweige der Mathematik erscheint, kann sie doch mit vollem Recht beanspruchen, als selbständige mathematische Disziplin betrieben zu werden, einmal wegen ihrer Unentbehrlichkeit und vielgestaltigen Bedeutung für fast alle Teile der Mathematik, dann aber auch, weil die Methoden und Resultate einer um ihrer selbst willen betriebenen Algebra in ihrer logischen Geschlossenheit, durchgängigen Einfachheit und vollendeten Schönheit die Kriterien in sich tragen, deren Erfülltsein man von einer lebensfähigen mathematischen Disziplin fordern muß.

Im Sinne des zuvor Bemerkten erscheint es für eine Darstellung der Algebra berechtigt, ja geboten, bezüglich der

Objekte, um die es sich handelt, die größtmögliche Allgemeinheit zugrunde zu legen. Wir wollen daher nicht nur, was selbstverständlich ist, von jeder Benennung (metrisch, geometrisch usw.) der in Rede stehenden Größen absehen, sondern sogar von ihrer Zahlbedeutung im geläufigen Sinne des Wortes Zahl (natürliche, ganze, rationale, reelle, komplexe Zahlen!). Die inhaltliche Bedeutung der in den Gleichungen vorkommenden Zeichen als Zahlen ist für den Formalismus, der zur Auflösung führt, ebenso gleichgültig, wie etwaige Benennungen. Das Wesentliche sind allein die formalen Regeln, nach denen mit jenen Zeichen gerechnet wird, also die Tatsache, daß die vorkommenden Zeichen Elemente eines Bereichs bezeichnen, in dem nach den bekannten, für die Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division charakteristischen Regeln gerechnet werden kann. Wir werden dies im Abschnitt I, der sich u. a. mit solchen, Körper genannten Bereichen eingehend zu beschäftigen hat, exakt formulieren und stellen hier nur einleitend als **Grundaufgabe der Algebra** folgendes hin:

Es sollen allgemeine, formale Methoden entwickelt werden, nach denen man mittels der vier elementaren Rechenoperationen gebildete Gleichungen zwischen bekannten und unbekannten Elementen eines Körpers nach den unbekannten auflösen kann.

Ehe wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen können, müssen wir den Körperbegriff ausführlich erläutern und auch, was unter einer „Gleichung" im Sinne der Aufgabe zu verstehen ist. Dazu dienen die Entwicklungen des Abschnitts I, an dessen Schluß dann die Grundaufgabe der Algebra exakt formuliert und ihre beiden wichtigsten Teilaufgaben hervorgehoben werden. In II werden sodann die Elemente der Gruppentheorie auseinandergesetzt, die für die Lösung der ersten Teilaufgabe als beiläufiges und für die Lösung der zweiten Teilaufgabe als entscheidendes Hilfsmittel heranzuziehen sind. III und IV geben die vollständige Lösung der ersten Teilaufgabe, während schließlich 2 den die zweite Teilaufgabe betreffenden Untersuchungen gewidmet ist.

Es ist für die moderne Entwicklung der Algebra charakteristisch, daß die oben genannten Hilfsmittel zu selbständigen umfangreichen Theorien Anlaß gegeben haben, die gegenüber der vorstehend angeführten Grundaufgabe der klassischen Algebra immer mehr in den Mittelpunkt des Interesses getreten sind. So ist denn in moderner Auffassung die Algebra nicht mehr bloß die Lehre von der Auflösung der Gleichungen, sondern die Lehre von den formalen Rechenbereichen, wie Körpern, Gruppen u. a., und ihre Hauptaufgabe ist die Gewinnung von Einsichten in die Struktur solcher Bereiche (siehe dazu S. 24). Im beschränkten Rahmen der vorliegenden Bändchen ist es uns jedoch nicht möglich, diesen allgemeineren, modernen Gesichtspunkt in den Vordergrund zu stellen. Wir nehmen daher die vorstehend ausgesprochene Grundaufgabe der klassischen Algebra als wegweisenden Leitfaden und abgrenzenden Rahmen für unsere Darlegungen, werden aber dabei in der Tat, vor allem in **2**, auch zu strukturellen Aussagen im Sinne der modernen Algebra geführt werden.

I. Ringe, Körper, Integritätsbereiche

§ 1. Definition der Ringe, Körper, Integritätsbereiche

Als das formal-charakteristische, von der inhaltlichen Bedeutung der Zeichen als Zahlen befreite an den drei elementaren Rechenoperationen Addition, Substraktion, Multiplikation — die vierte, Division, ziehen wir erst später hinzu — ist folgender Tatbestand anzusehen:

(a) *Es liegt eine* Menge B von unterschiedenen Elementen *in irgendeiner endlichen Anzahl (mindestens zwei) oder in unendlicher Anzahl vor.*

Wir verwenden Buchstaben $a, b, \ldots$ und kompliziertere Zeichen (z. B. die späterhin erklärten Zeichen $a + b$, $ab, \ldots$), um die Resultate logischer Setzungen von Elementen aus B mitzuteilen, und sagen dann auch einfach, $a, b, \ldots$ seien *Elemente aus* B. Auf Grund der in (a) geforderten Unterschiedenheit steht für je zwei solche logische Setzungen a, b fest, ob es sich um dasselbe oder um verschiedene Elemente aus B handelt, was wir durch die Bezeichnungen $a = b$ bzw. $a \neq b$ angeben.

(b) *Für je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebene, nicht notwendig verschiedene Elemente a, b aus* B *sind* zwei Verknüpfungen *definiert, d. h. jedem geordneten Elementpaar a, b aus* B *ist irgendwie ein Element c (erste Verknüpfung) und ein Element d (zweite Verknüpfung) aus* B *zugeordnet.*

(a) und (b) sind z. B. realisiert, wenn B die Menge aller geraden, oder aller ganzen, oder aller rationalen, oder aller reellen, oder aller komplexen Zahlen, oder aller positiven von einer dieser Zahlsorten (mit Ausnahme der letztgenannten) ist und als Verknüpfungen die Addition ($c = a + b$) und Multiplikation ($d = ab$) gewählt werden. In Anlehnung an diese als Ausgangspunkt unserer Abstraktion anzusehenden Spezialfälle wollen wir die beiden Verknüpfungen in (b) auch allgemein *Addition* und *Multiplikation*, die dem Paar a, b zugeordneten Elemente c und d *Summe* und *Produkt* nennen und $c = a + b$, $d = ab$ schreiben, obwohl natürlich die rein formale Forderung (b) (und ebenso auch die gleich folgende Forderung (c) an unsere Verknüpfungen) keinerlei Anlaß zu der inhaltlichen Annahme gibt, daß diese Verknüpfungen, wenn B eine Zahlenmenge ist, mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation übereinstimmen.

(c) *Die in* (b) *genannten beiden Verknüpfungen genügen für beliebige Elemente aus* B *den Gesetzen:*

(1) $a + b = b + a$, **(2)** $ab = ba$

(kommutatives Gesetz);

(3) $(a + b) + c = a + (b + c)$, **(4)** $(ab)c = a(bc)$

(assoziatives Gesetz);

(5) $(a + b)\, c = ac + bc$

(distributives Gesetz);

(6) *Zu jedem geordneten Elementpaar a, c aus* B *existiert ein eindeutig bestimmtes Element b aus* B *derart, daß $a + b = c$ ist*

(Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Subtraktion).

Wie schon in der beigefügten Benennung des Gesetzes (6) zum Ausdruck gebracht ist, bezeichnet man die nach (6) in B unbeschränkt und eindeutig ausführbare Operation der Bestimmung von b aus $a + b = c$ als *Subtraktion* und führt daher in sinngemäßer Fortsetzung der unter (b) verwendeten Terminologie die Bezeichnung $b = c - a$ (*Differenz*) ein.

Definition 1. *Wenn für eine Menge* B *die unter* (a), (b), (c) *aufgeführten Tatsachen realisiert sind, heißt* B *ein* Ring *bezüglich der Verknüpfungen* (b).

Den letzten Zusatz muß man machen, weil eine Menge B a priori bezüglich je zweier verschiedenartig erklärter Verknüpfungen, also in mehrfacher Weise Ring sein kann (siehe dazu **3**, 1, § 1, Aufg. 4, 5). Unter einem Ring B schlechthin versteht man immer die Menge B mit Einschluß der für sie definierten Verknüpfungen. — Wir bezeichnen Ringe stets mit großen griechischen, Elemente aus Ringen mit kleinen lateinischen oder griechischen Buchstaben[1]).

Wir beweisen nun zunächst einige in Ringen gültige Tatsachen.

Satz 1. *In jedem Ring* B *existiert ein eindeutig bestimmtes Element* 0, *das* Nullelement *oder* Null *von* B *heißt, mit der Eigenschaft*

$$a + 0 = a \quad \textit{für alle } a \textit{ aus } \mathsf{B}.$$

Beweis. Nach (6) existieren in B zu den Elementen $a, b, \ldots$ von B je die Differenzen $a - a, b - b, b - a, \ldots$, für die nach ihrer Erklärung gilt

$$a + (a - a) = a, \quad b + (b - b) = b, a + (b - a) = b, \ldots.$$

Vermöge der ersten und dritten dieser Relationen hat man, nun unter Beachtung von (1) und (3),

$$\begin{aligned} b + (a - a) &= [a + (b - a)] + (a - a) \\ &= [a + (a - a)] + (b - a) = a + (b - a) = b. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der zweiten jener Relationen ergibt dann, zufolge der Eindeutigkeit in (6),

$$a - a = b - b.$$

[1]) Die Buchstaben $i, k, l, m, n, p, q, r, s$; $\iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ behalten wir jedoch für gewöhnliche ganze Zahlen, z. B. Indizes und Exponenten, vor.

Also sind alle Differenzen $a - a, b - b, \ldots$ dasselbe Element 0 von B. Dieses hat die im Satz genannte Eigenschaft und ist nach (6) sogar schon durch eine einzige der Forderungen $a + 0 = a$ eindeutig bestimmt.

Satz 2. *Es gilt* $0c = 0$ *für jedes* c *aus* B.

Beweis. Nach (5) und Satz 1 ist für beliebiges c aus B

$$0c = (0 + 0)\,c = 0c + 0c,$$

also nach (6) und Satz 1 schließlich $0c = 0$.

Wir ziehen jetzt die bisher noch unberücksichtigte Division in den Kreis unserer Betrachtungen, indem wir den unter (c) genannten Forderungen (1)—(6) noch die folgende anreihen:

(7) *Zu jedem geordneten Elementpaar* a, c *aus* B, *in dem* $a \neq 0$ *ist, existiert ein eindeutig bestimmtes Element* b *aus* B *derart, daß* $ab = c$ *ist*

(Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen Division).

Analog wie oben bei der Subtraktion bezeichnet man auch hier, wenn (7) in B erfüllt ist, die in B bis auf die Einschränkung $a \neq 0$ unbeschränkt und eindeutig ausführbare Operation der Bestimmung von b aus $ab = c$ als *Division* und führt die Bezeichnung $b = \frac{c}{a}$ (*Quotient*) ein.

Die in (7) gemachte Einschränkung $a \neq 0$ ist keine willkürliche Festsetzung, sondern notwendig, wenn (a), (b), (c) und (7) widerspruchsfrei nebeneinander bestehen sollen. Ohne diese Einschränkung folgte nämlich, wenn c ein beliebiges Element aus B ist, aus der Existenz eines b, so daß $0b = c$ ist, nach Satz 2, daß $c = 0$ wäre. Es enthielte also B nur das eine Element 0 im Widerspruch zu (a). Betreffs der hierdurch nahegelegten Frage, ob die Forderungen (a), (b), (c), (7) in der vorliegenden Gestalt widerspruchsfrei sind, sei bemerkt, daß ein Widerspruch in (a), (b), (c), (7) einen Widerspruch im System der rationalen Zahlen zur Folge hätte, das ja allen jenen Forderungen genügt.

Es sei noch bemerkt, daß die in der Einschränkung $a \neq 0$ in (7) bestehende Unsymmetrie der sonst bezüglich Addition und

Multiplikation symmetrischen Tafel der Forderungen (1) und (2), (3) und (4), (6) und (7) natürlich auf die Unsymmetrie des einzigen beide Operationen verbindenden Gesetzes (5) zurückgehen muß, wie ja auch die obige Begründung jener Einschränkung (Beweis von Satz 2) zeigt.

Definition 2. *Gilt in einem Ringe* B *außer* (a), (b), (c) *auch noch* (7), *so heißt* B *ein* Körper *bezüglich der Verknüpfungen* (b).

Analog zu Satz 1 gilt in Körpern außerdem:

Satz 3. *In jedem Körper* K *existiert ein eindeutig bestimmtes Element* $e \neq 0$, *das* Einselement *oder* Eins *von* K *heißt, mit der Eigenschaft*

$$ae = a \text{ für alle } a \text{ aus } \mathsf{K}.$$

Beweis. Der Beweis wird, zunächst für die wegen (a) sicher vorhandenen $a \neq 0$ aus K, unter Verwendung von (7) statt (6) ganz analog wie bei Satz 1 geführt. Daß ferner $ae = a$ auch für $a = 0$ gilt, ist nach Satz 2 klar. Aus $e = 0$ schließlich würde folgen $a = ae = a0 = 0$ für jedes a aus K, im Widerspruch zu (a).

Außer Ringen und Körpern braucht man in der Algebra noch einen weiteren derartigen Begriff, der logisch zwischen jenen beiden steht, den des *Integritätsbereiches.* Dieser entsteht aus dem Ringbegriff, wenn man nur einen Teil der zum Körperbegriff führenden Zusatzforderung (7) stellt, nämlich aus dieser einerseits die unbeschränkte Existenz des Quotienten wegläßt, also nur die Eindeutigkeit der Division, falls sie überhaupt ausführbar ist, fordert:

(7a) *Aus* $ab = ab'$ *und* $a \neq 0$ *folgt* $b = b'$ (Eindeutigkeit der Division),

andererseits aber doch die Existenz der speziellen Quotienten $\frac{a}{a}, \frac{b}{b}, \ldots$, wo $a, b, \ldots \neq 0$ sind, fordert, was nach dem Vorhergehenden auf die Forderung der Gültigkeit des Analogons zu Satz 3 hinausläuft:

(7b) *Es existiert ein Element e in* B *derart, daß* $ae = a$ *für alle* a *aus* B *ist* (Existenz des Einselementes).

Definition 3. *Gelten in einem Ringe* B *außer* (a), (b), (c) *auch noch* (7a) *und* (7b), *so heißt* B *ein* Integritätsbereich *bezüglich der Verknüpfungen* (b).

Jeder Körper ist ein Integritätsbereich, weil ja (7a) und (7b) aus (7) gefolgert werden können, und jeder Integritätsbereich ist nach Def. 3 ein Ring.

Ringe, Körper, Integritätsbereiche nennen wir auch gemeinsam *Bereiche*[1]) und die in ihnen erklärten Verknüpfungen Addition, Substraktion, Multiplikation, ev. Division die *drei ersten* bzw. *vier elementaren* Rechenoperationen.

In Integritätsbereichen (also speziell in Körpern), die uns im folgenden hauptsächlich interessieren werden, gilt auch die Umkehrung von Satz 2:

Satz 4. *Ist das Produkt zweier Elemente eines Integritätsbereiches Null, so ist mindestens einer der Faktoren Null, d. h. aus* $ab = 0$, $a \neq 0$ *folgt* $b = 0$.

Beweis. Sei $ab = 0$, $a \neq 0$. Da nach Satz 2 $a0 = 0$, also hier $ab = a0$ ist, folgt nach (7a) $b = 0$.

Das Bestehen von Satz 4 ist übrigens nicht nur, wie eben gezeigt, Folge aus (7a), sondern auch umgekehrt. Denn gilt das Analogon zu Satz 4 in einem Ringe und besteht für ein $a \neq 0$ die Gleichung $ab = ab'$, d. h. $a(b - b') = 0$, so folgt $b - b' = 0$, d. h. $b = b'$.

Zusatz zu Definition 3. *Man kann die Forderungen* (7a), (7b) *der Def.* 3 *auch durch die Forderungen ersetzen, daß die Analoga zu Satz* 3 *und Satz* 4 *in* B *gelten sollen.*

Es bedarf wohl nur des Hinweises, daß aus den Gesetzen (a), (b), (c) für Ringe alle allgemeinen Rechenregeln der elementaren Algebra für die Addition, Subtraktion und Multiplikation, insbesondere die sog. Klammerauflösungsformeln, und, wenn man (7) hinzunimmt, auch die allgemeinen Formeln der Bruchrechnung

[1]) Bereich bedeutet zwar hiernach dasselbe wie Ring; jedoch ist der neutrale Ausdruck Bereich im angegebenen Sinne geläufiger, während man Ring gewöhnlich nur dort anwendet, wo wirklich kein Integritätsbereich vorliegt.

durch einfache Schlüsse hergeleitet werden können. Die nähere Ausführung darf dem Leser überlassen bleiben.

Man verwendet beim Rechnen in einem Bereich B zweckmäßig folgende abkürzenden Bezeichnungen:

$$-a \text{ für } 0-a,$$

$\ldots, (-2)a, (-1)\,a,\ 0a,\ 1a,\ 2a, \ldots$ für $\ldots -(a+a), -a, 0, a, a+a, \ldots$ *(ganze Vielfache von a)*,

$\ldots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \ldots$ für $\ldots, \dfrac{e}{aa}, \dfrac{e}{a}, e, a, aa, \ldots$

(ganze Potenzen von a)

($a^{-1}, a^{-2}, \ldots$ natürlich nur, soweit eindeutig erklärt, also z. B. wenn B ein Körper und $a \neq 0$ ist). Aus (1)—(7) und Satz 1—4 ergeben sich dann mittels der Definition der Rechenoperationen im Bereich der ganzen Zahlen leicht die Tatsachen

$$(m+n)\,a = m\,a + n\,a,\quad a^{m+n} = a^m\,a^n,\ (a^m)^n = a^{mn},$$
$$(m\,n)e = (me)\,(n\,e),\quad e^m = e,\quad m0 = 0,\quad 0^m = 0$$

für ganze Zahlen m, n, soweit die darin vorkommenden Elemente einen eindeutigen Sinn auf Grund des Vorhergehenden haben.

Beispiele

1. Auf Grund der vorstehenden Ausführungen dürfen wir als aus den Elementen bekannt hinstellen:

Satz 5. *Die* $\left\{\begin{array}{l}\textit{ganzen}\\ \textit{rationalen}\end{array}\right\}$ *Zahlen*

bilden einen $\left\{\begin{array}{l}\textit{Integritätsbereich } \Gamma\\ \textit{Körper } \mathsf{P}\end{array}\right\}$, *wenn als Verknüpfungen die gewöhnliche Addition und Multiplikation zugrunde gelegt werden. Die Zahlen* 0 *und* 1 *sind Null- und Einselement von* Γ *und* P.

2. Ferner bilden auch alle reellen, sowie auch alle komplexen Zahlen einen Körper bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

3. Die geraden Zahlen bilden einen Ring, aber keinen Integritätsbereich, weil für sie (7b) nicht gilt. Ringe, in denen (7b) gilt, aber (7a) nicht, werden wir in **2**, § 2 kennenlernen. Als Beispiel eines Integritätsbereiches, der kein Körper ist, dient schon Γ.

4. Der folgende Körper mag als Beispiel einerseits für einen solchen genannt werden, dessen Elemente keine Zahlen sind, andererseits für einen mit nur endlich vielen Elementen:

Für zwei Elemente 0 und e werden zwei Verknüpfungsoperationen durch die Festsetzungen

$$\begin{array}{ll} 0+0=0 & 00=0 \\ 0+e=e+0=e & 0e=e0=0 \\ e+e=0 & ee=e \end{array}$$

erklärt. Man bestätigt leicht die Richtigkeit von (1)—(7). Wir haben also einen Körper, der lediglich aus seinem Null- und Einselement besteht. Daß dieser Körper kein uninteressanter Ausnahmefall ist, zeigen die Ergebnisse von **2**, § 20, wonach endliche Körper existieren, deren Elementzahl eine beliebige Primzahlpotenz ist. Siehe auch schon § 2, Beispiel 5 [25].

§ 2. Teilbereiche, Kongruenzrelationen, Isomorphie

In § 1 wird mit der Forderung (a) von einer Menge unterschiedener Elemente, der Grundgegebenheit der *Mengenlehre*, ausgegangen, die dann durch Hinzunahme der Forderungen (b), (c) usw. zu der Grundgegebenheit der *Algebra* d. h. zum *Bereich*, wird. Es ist daher verständlich, daß für das Studium unserer Bereiche u. a. auch Begriffe und Tatsachen heranzuziehen sind, die allein aus (a) folgen, also der Mengenlehre angehören, und von denen dann zu untersuchen ist, wie sie bei Hinzunahme von (b), (c) usw. für das Studium von Bereichen nutzbar gemacht werden können. Wir müssen uns hier darauf beschränken, die heranzuziehenden mengentheoretischen Grundlagen vom sog. naiven Standpunkt aus kurz zusammenzustellen, ohne auf die in neuerer Zeit durch die Paradoxien der Mengenlehre entstandenen begrifflichen Schwierigkeiten einzugehen, die man durch ein entsprechendes axiomatisches Vorgehen beheben kann, wie es in § 1 für Bereiche, gestützt auf den Mengenbegriff, durchgeführt wurde. Wir verzichten also insbesondere auf eine naiv nicht in befriedigender Weise zu gebende Präzisierung des Begriffs der Menge.

1. Teilmengen

Es sei M eine *Menge*, worunter wir stets, wie in § 1, (a), eine Menge unterschiedener Elemente verstehen. Eine Menge M_1 heißt *Teilmenge* von M oder in M *enthalten*, wenn jedes Element von M_1 auch in M vorkommt. Wir rechnen die Menge M selbst, sowie die kein Element enthaltende *leere Menge* (*Nullmenge*) ebenfalls als Teilmengen von M. Alle anderen Teilmengen von M heißen *echt* oder *eigentlich*.

Liegen Teilmengen $M_1, M_2, \ldots$ einer Menge M in irgendeiner endlichen oder unendlichen Anzahl vor, so gibt es dazu zwei bestimmte Teilmengen von M, ihren *Durchschnitt* Δ und ihre *Vereinigungsmenge* E. Der Durchschnitt Δ besteht aus allen und nur den Elementen von M, die sowohl in M_1 als auch in $M_2, \ldots$ enthalten sind. Er kann auch die Nullmenge sein. Die Vereinigungsmenge E besteht aus allen und nur den Elementen von M, die entweder in M_1 oder in $M_2, \ldots$ enthalten sind. E läßt sich auch erklären als Durchschnitt aller $M_1, M_2, \ldots$ enthaltenden Teilmengen von M und ist in diesem Sinne die engste $M_1, M_2, \ldots$ enthaltende Teilmenge von M. Ebenso läßt sich Δ erklären als Vereinigungsmenge aller in $M_1, M_2, \ldots$ enthaltenen Teilmengen von M und ist in diesem Sinne die weiteste in $M_1, M_2, \ldots$ enthaltene Teilmenge von M.

2. Äquivalenzrelationen und Klasseneinteilungen

Für die Algebra von besonderer Wichtigkeit sind Zerlegungen einer Menge M in elementfremde Teilmengen, d. h. Darstellungen von M als Vereinigungsmenge von Teilmengen, von denen je zwei die Nullmenge zum Durchschnitt haben. Solche Zerlegungen von M nennen wir *Klasseneinteilungen von* M und die betr. Teilmengen auch *Klassen*. Liegt eine solche Klasseneinteilung vor, und setzt man zwischen je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebene Elemente a, b aus M das Zeichen $\sim$ oder das Zeichen $\nsim$ je nachdem a in derselben Teilmenge wie b vorkommt oder nicht, so bestehen offenbar die Tatsachen:

(α) $a \sim a$ (*Gesetz der* Reflexivität),
(β) *aus* $a \sim b$ *folgt* $b \sim a$ (*Gesetz der* Symmetrie),
(γ) *aus* $a \sim b, b \sim c$ *folgt* $a \sim c$ (*Gesetz der* Transitivität).

Für das Bestehen dieser Tatsachen, gleichgültig welche Bedeutung dabei den Zeichen $\sim$, $\nsim$ zukommt, führen wir eine besondere Ausdrucksweise ein:

(I) *Wenn zwischen je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebene Elemente von* M *eines und nur eines von zwei Zeichen* $\sim$, $\nsim$ *in solcher Weise gesetzt ist, daß die Bedingungen* (α), (β), (γ) *bestehen, so sagt man, daß eine* Äquivalenzrelation $\sim$ *in* M *erklärt sei.*

Es gilt dann also:

(A) *Jede Klasseneinteilung von* M *führt zu einer Äquivalenzrelation in* M, *indem zwischen Elemente aus einer Klasse* $\sim$, *zwischen Elemente aus verschiedenen Klassen* $\not\sim$ *gesetzt wird.*

Nicht nur in der Algebra, sondern in fast jeder mathematischen Disziplin hat man außerordentlich häufig die Umkehrung dieser Tatsache zu benutzen, die wir daher hier ausführlich begründen wollen.

(B) *Jede Äquivalenzrelation in* M *entspringt gemäß* (A) *aus einer und nur einer Klasseneinteilung von* M.

Beweis. a) Wenn eine Äquivalenzrelation in M vorliegt, so kann eine Teilmenge M_1 von M die Eigenschaft E haben, daß ein Element c aus M derart existiert, daß M_1 aus allen und nur den Elementen d von M besteht, für die $c \sim d$ ist. Wir nennen dann für den Augenblick M_1 eine E-Teilmenge von M, die durch c erzeugt ist. Jedes Element c aus M erzeugt eine E-Teilmenge, aber natürlich kann dieselbe E-Teilmenge i. a. durch verschiedene Elemente erzeugt sein. Wir betrachten nun die sämtlichen E-Teilmengen von M und zeigen, daß diese die Klassen einer Klasseneinteilung von M sind, aus der die betrachtete Äquivalenzrelation im Sinne von (A) entspringt.

Erstens sind verschiedene E-Teilmengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ von M elementfremd. Wäre nämlich das Element a in M_1 und M_2 enthalten, und ist M_1 durch c_1, M_2 durch c_2 erzeugt, so wäre $c_1 \sim a$, $c_2 \sim a$, also nach (β), (γ) auch $c_1 \sim c_2$. Ist dann d_1 ein Element aus M_1, d_2 ein Element aus M_2, also $c_1 \sim d_1$, $c_2 \sim d_2$, so folgte wiederum aus (β), (γ) auch $c_1 \sim d_2$, $c_2 \sim d_1$, so daß d_2 auch in M_1, d_1 auch in M_2 enthalten wäre. Es wären also dann gegen die Annahme M_1 und M_2 identisch.

Zweitens ist die Vereinigungsmenge aller E-Teilmengen die Menge M, d. h. jedes Element a aus M kommt wirklich in einer E-Teilmenge vor. Denn nach (α) kommt a in der durch a erzeugten E-Teilmenge vor.

Hiernach sind also die E-Teilmengen von M die Klassen einer Klasseneinteilung von M. Daß die betrachtete Äquivalenzrelation im Sinne von (A) aus ihr entspringt, folgt so:

Erstens steht zwischen zwei Elementen a, b derselben E-Teilmenge M_1 das Zeichen $\sim$. Denn ist M_1 durch c erzeugt, so ist $c \sim a$, $c \sim b$, also nach (β), (γ) auch $a \sim b$.

Zweitens steht zwischen zwei Elementen a, b verschiedener E-Teilmengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ von M das Zeichen $\not\sim$. Wäre nämlich $a \sim b$, und ist M_1 durch c_1, M_2 durch c_2 erzeugt, so folgte aus $c_1 \sim a$, $c_2 \sim b$ nach (β), (γ) auch $c_1 \sim c_2$ und daraus wie oben ein Widerspruch gegen die Verschiedenheit von M_1 und M_2.

b) Daß eine Äquivalenzrelation nicht aus zwei verschiedenen Klasseneinteilungen von M entspringen kann, folgt daraus, daß die ein Element a enthaltende Klasse notwendig aus allen und nur den b mit $a \sim b$ bestehen muß, also durch die Äquivalenzrelation eindeutig (als die durch a erzeugte E-Teilmenge von M) bestimmt ist.

Liegt eine Klasseneinteilung von M vor, so heißt jede Teilmenge von M, die aus jeder Klasse ein und nur ein Element enthält, ein *vollständiges Repräsentantensystem* für diese Klasseneinteilung.

Die einfachste Äquivalenzrelation ist die logische Identität, d. i. die in § 1 unter (a) durch die Zeichen $=$, $\neq$ definierte Relation. Die zu ihr gehörige Klasseneinteilung ist die Einteilung von M in seine unterschiedenen Elemente selbst.

3. Gleichmächtigkeit und Kardinalzahlen

Man kann aus einer Menge M dadurch eine neue Menge M' herleiten, daß man die Elemente von M irgendwie durch neue Elemente ersetzt, nur so, daß alle Unterschiedenheiten der Elemente von M erhalten bleiben (etwa indem man das Element a durch den „Gedanken an das Element a" ersetzt). Setzt man dann zwischen je zwei Elemente a aus M und a' aus M' das Zeichen $\longleftrightarrow$ oder das Zeichen $\leftarrow\!|\!\rightarrow$, je nachdem a' bei dieser Ersetzung aus a entsteht oder nicht, so bestehen offenbar die Tatsachen:

(δ) *zu jedem a aus M existiert ein a' aus M' mit $a \longleftrightarrow a'$,*

(δ') *zu jedem a' aus M' existiert ein a aus M mit $a \longleftrightarrow a'$,*

(ε) *wenn $a \longleftrightarrow a'$, $b \longleftrightarrow b'$ und $a = b$ gilt, ist $a' = b'$,*

(ε') *wenn $a \longleftrightarrow a'$, $b \longleftrightarrow b'$ und $a' = b'$ gilt, ist $a = b$.*

Für das Bestehen dieser Tatsachen bei zwei vorliegenden Mengen M und M', gleichgültig welche Bedeutung dabei den Zeichen $\longleftrightarrow$, $\leftarrow\!|\!\rightarrow$ zukommt, führen wir eine besondere Ausdrucksweise ein:

(II) *Wenn zwischen je ein Element a einer Menge M und a' einer Menge M' eins und nur eins von zwei Zeichen $\longleftrightarrow$, $\leftarrow\!|\!\rightarrow$ in solcher Weise gesetzt ist, daß die Bedingungen (δ), (δ'), (ε), (ε') bestehen, so sagt man, daß eine* eineindeutige Zuordnung $\longleftrightarrow$ zwischen M und M' *vorliege. Ist eine solche zwischen M und M' möglich, so nennt man M und M'* gleichmächtig.

Die Gleichmächtigkeit ist ersichtlich eine Äquivalenzrelation im Sinne von (I). Für zwei endliche Mengen M und M' ist die Gleichmächtigkeit offenbar mit dem Übereinstimmen der *Anzahlen* der Elemente von M und M' gleichbedeutend. Die durch ein endliches M gemäß (B) erzeugte Klasse gleichmächtiger Mengen ist also die Gesamtheit aller Mengen gleicher Elementanzahl wie M. Diese Klasse kann direkt zur eindeutigen Charakterisierung dieser Anzahl dienen[1]). Daher nennt man nach Cantor allgemein die Klassen, die der Äquivalenzrelation (II) gemäß (B) in der Menge aller Mengen entsprechen, also je die Gesamtheiten aller zu einer Menge gleichmächtigen Mengen *Kardinalzahlen* (*Mächtigkeiten*). Sie geben die Verallgemeinerung des Anzahlbegriffs auf unendliche Mengen. Durch die Zusammenfassung je aller gleichmächtigen Mengen in eine logische Einheit (die Klasse) wird eben von jeder speziellen Bedeutung der Elemente der Einzelmengen abstrahiert und allein die für den Anzahlbegriff charakteristische Gesamtheit [(δ), (δ')] der Elemente nebst ihren Unterschiedenheiten [(ε), (ε')] ins Auge gefaßt.

Als Repräsentant einer endlichen Kardinalzahl n kann etwa die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ dienen. Als weitere, für uns wichtige Kardinalzahl nennen wir noch die durch die Menge aller natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ repräsentierte. Mengen dieser Kardinalzahl, also solche, die mit der Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig sind, deren Elemente also durch Indizierung: $a_1, a_2, \ldots$ den natürlichen Zahlen eindeutig zugeordnet werden können, heißen *abzählbar.*

Die Menge aller reellen Zahlen ist ein Beispiel dafür, daß nicht jede unendliche Menge abzählbar ist[2]).

Wir wenden nunmehr die im vorstehenden auseinandergesetzten Begriffe der Mengenlehre zur Einführung einiger wichtiger entsprechender Begriffe für Bereiche an.

---

[1]) Diesen Gedanken hat R. Dedekind (Was sind und was sollen die Zahlen?, Braunschweig 1887) tatsächlich zur Definition der natürlichen Zahlen als Anzahlen endlicher Mengen benutzt.

[2]) Läge eine Abzählung $a_1, a_2, \ldots$ der als Dezimalbrüche (unter Vermeidung der Periode $00\ldots$) geschriebenen reellen Zahlen vor, so könnte man leicht einen (ebensolchen) Dezimalbruch a bilden, der von $a_1, a_2, \ldots$ verschieden, also doch nicht mit abgezählt wäre. Man wähle nämlich für jedes $n = 1, 2, \ldots$ die n-te Ziffer von a hinter dem Komma verschieden von der n-ten Ziffer von a_n hinter dem Komma (Cantorsches Diagonalverfahren).

1. Teilbereiche

Aus dem Begriff Teilmenge entspringt unmittelbar:

Definition 4. *Bilden die Elemente einer Teilmenge* B_1 *eines Bereiches* B *bezüglich derselben Verknüpfungen, wie sie in* B *zugrunde liegen, einen* 1. *Ring*, 2. *Körper*, 3. *Integritätsbereich, so heißt* B_1 *ein* 1. Teilring, 2. Teilkörper, 3. Teilintegritätsbereich *von* B *und* B *ein* Erweiterungs-Bereich (-Ring, -Körper, -Integritätsbereich) *von* B_1.

Zur Entscheidung darüber, ob eine Teilmenge B_1 eines Integritätsbereiches B Teilring, Teilkörper, Teilintegritätsbereich von B ist, braucht man nicht alle in § 1 aufgeführten Bedingungen zu prüfen, sondern nur die in folgendem Satz genannten:

Satz 6. *Eine aus mindestens zwei Elementen bestehende Teilmenge* B_1 *eines Integritätsbereiches* B *ist dann und nur dann* 1. *Teilring von* B, *wenn die ersten drei elementaren Rechenoperationen, wie sie innerhalb* B *definiert sind, angewandt auf die Elemente von* B_1 *stets wieder Elemente von* B_1 *ergeben,* 2. *Teilkörper von* B, *wenn zudem die vierte Rechenoperation (Division) für Elemente aus* B_1 *(bei von Null verschiedenem Nenner) stets ausführbar ist und immer Elemente von* B_1 *ergibt,* 3. *Teilintegritätsbereich von* B, *wenn* B_1 *Teilring von* B *ist und das Einselement von* B *enthält.*

Beweis. a) Daß diese Bedingungen notwendig sind, ist nach Def. 1—4 klar.

b) Sind diese Bedingungen erfüllt, so stimmen die folgenden Bedingungen des § 1 für B_1: (a), (b), die Existenz in (6), ev. die Existenz in (7) bzw. (7b). Andererseits sind die übrigen nach § 1 erforderlichen Bedingungen, nämlich (1)—(5), die Eindeutigkeit in (6), ev. die Eindeutigkeit in (7), (7a), in B_1 a fortiori erfüllt, weil sie in B gelten.

Das Kriterium von Satz 6 läßt sich natürlich sinngemäß auch auf Ringe B ausdehnen. Wir werden es aber nur für die in Satz 6 genannten Fälle brauchen. Desgleichen werden wir der einfacheren Redeweise halber auch den folgenden Satz 7 sowie Def. 5 nur für Körper formulieren, für die allein sie später zur Anwendung kommen.

Bezüglich des Durchschnittes haben wir für Körper:

Satz 7. *Sind* $K_1, K_2, \ldots$ *irgendwelche [endlich oder unendlich*[1]*) viele] Teilkörper eines Körpers* K*, so ist auch der Durchschnitt der Mengen* $K_1, K_2, \ldots$ *ein Teilkörper von* K*; dieser heißt der* Durchschnittskörper *oder kurz* Durschnitt *der Körper* $K_1, K_2, \ldots$.

Beweis. Daß der Durchschnitt mindestens zwei Elemente enthält, folgt daraus, daß alle $K_1, K_2, \ldots$ die beiden verschiedenen Elemente 0 und e von K gemeinsam enthalten, weil sie Teilkörper von K sind. Dann ergibt sich die Behauptung ohne weiteres aus Satz 6.

Für die Vereinigungsmenge gilt aber ein entsprechender Satz nicht. Denn ist a_1 in K_1, a_2 in K_2, so braucht z. B. $a_1 + a_2$ in keinem der Körper $K_1, K_2, \ldots$ enthalten zu sein. Dagegen läßt sich ein dem Vereinigungsmengenbegriff analoger dadurch einführen, daß wir die auf S. 15 angegebene Zurückführung der Vereinigungsmenge auf einen Durchschnitt für die Verallgemeinerung zugrunde legen.

Definition 5. *Sind* $K_1, K_2, \ldots$ *irgendwelche (endlich oder unendlich viele) Teilkörper eines Körpers* K*, so heißt der Durchschnitt aller* $K_1, K_2, \ldots$ *als Teilkörper enthaltenden Teilkörper von* K *das* Kompositum *von* $K_1, K_2, \ldots$ *oder der aus* $K_1, K_2, \ldots$ komponierte Körper.

Daß dieser Durchschnitt überhaupt gebildet werden kann, folgt daraus, daß zum mindesten ein zu seiner Bildung zugrunde zu legender Körper, nämlich K, existiert.

Das Kompositum von $K_1, K_2, \ldots$ enthält die Vereinigungsmenge der Mengen $K_1, K_2, \ldots$, ist aber i. a. weiter. Es ist der engste $K_1, K_2, \ldots$ als Teilkörper enthaltende Teilkörper von K, ebenso wie der Durchschnitt von $K_1, K_2, \ldots$ der weiteste in $K_1, K_2, \ldots$ als Teilkörper enthaltene Teilkörper von K ist.

2. Kongruenzrelationen und Restklassenringe

Indem wir für den Fall eines Bereiches B zu den Bedingungen (α), (β), (γ) für eine Äquivalenzrelation in der

[1]) Die Numerierung soll hier und in der folgenden Def. 5 nicht besagen, daß höchstens abzählbar viele gemeint sind.

Menge B noch zwei in naturgemäßer Weise gebildete Forderungen über das Verhalten der Äquivalenzrelation zu den beiden Verknüpfungen von B hinzufügen, definieren wir:

Definition 6. *Erfüllt eine Äquivalenzrelation* $\equiv$ *in einem Bereiche* B *neben* (α), (β), (γ) noch *die Bedingungen*:

(1) *aus* $a_1 \equiv b_1, a_2 \equiv b_2$ *folgt* $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$,

(2) *aus* $a_1 \equiv b_1, a_2 \equiv b_2$ *folgt* $a_1 a_2 \equiv b_1 b_2$,

so nennen wir sie eine Kongruenzrelation *in* B *und die ihr entsprechenden Klassen die* Restklassen *in* B *nach ihr*[1]).

Wir legen jetzt in § 1, (a) die Menge $\overline{\mathsf{B}}$ der Restklassen nach einer Kongruenzrelation $\equiv$ in B zugrunde. Dazu ist zu fordern, daß mindestens zwei solche Restklassen vorhanden sind, daß also nicht alle Elemente von B einander kongruent sind. Sind dann r und s zwei Restklassen und bildet man alle Summen $a + b$ bzw. Produkte ab von je einem Elemente a aus r und b aus s, so folgt aus (1) und (2), daß diese alle wieder je einer bestimmten Restklasse t bzw. u aus $\overline{\mathsf{B}}$ angehören. Durch die Festsetzungen $r + s = t$ bzw. $rs = u$, die man kurz als elementweise Addition bzw. Multiplikation der Restklassen bezeichnen kann, wird also § 1, (b) realisiert. Wir beweisen nun, daß dann auch § 1, (c) realisiert ist, d. h.:

Satz 8. *Liegt in einem Bereiche* B *eine Kongruenzrelation* $\equiv$ *vor, bei der nicht alle Elemente von* B *einander kongruent sind, und definiert man in der Menge* $\overline{\mathsf{B}}$ *der Restklassen nach ihr zwei Verknüpfungen durch elementweise Addition bzw. Multiplikation, so ist* $\overline{\mathsf{B}}$ *ein Ring bezüglich dieser Verknüpfungen;* $\overline{\mathsf{B}}$ *heißt der* Restklassenring *von* B *nach der Kongruenzrelation* $\equiv$.

Beweis. Das Erfülltsein von § 1, (1)—(5) ist eine unmittelbare Folge des Bestehens dieser Gesetze im Bereiche B. Sind ferner a bzw. c Elemente aus den Restklassen r bzw. t, so

[1]) Die Menge M aller $a \equiv 0$ bei einer Kongruenzrelation in B ist genau das, was man unter *Ideal* in B versteht. Dieser Begriff ist für die Teilbarkeitslehre (siehe **2**, § 2) in allgemeinen Bereichen grundlegend (vgl. E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. 83 [1921]).

folgt aus § 1, (6) die Existenz eines b, so daß $a + b = c$ ist. Ist dann s die Restklasse, der b angehört, so gilt nach (1) und unserer Additionsfestsetzung $r + s = t$. Diese Restklasse s ist schließlich auch die einzige Lösung von $r + s = t$. Denn ist auch $r + s' = t$ und b' ein Element aus s', so ist $a + b \equiv a + b'$, weil beide Seiten derselben Restklasse t angehören. Daraus und aus der nach (α) sicher richtigen Relation $(-a) \equiv (-a)$ kann aber nach (1) auf $b \equiv b'$, d. h. $s = s'$ geschlossen werden. In $\overline{\mathsf{B}}$ ist also die Subtraktion unbeschränkt und eindeutig ausführbar, d. h. § 1, (6) erfüllt.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn B ein Integritätsbereich ist, $\overline{\mathsf{B}}$ nicht notwendig auch Integritätsbereich zu sein braucht, weil zwar § 1, (7b), aber nicht notwendig § 1, (7a) in $\overline{\mathsf{B}}$ erfüllt ist (siehe **2**, Satz 28). Der Fall, daß B sogar ein Körper ist, ist uninteressant, weil es dann nur triviale Restklasseneinteilungen in B gibt (siehe **3**, 1, § 2 Aufg. 10).

3. Isomorphie und Bereichtypen

Wir fügen für den Fall zweier Bereiche B und B' auch den Bedingungen (δ), (δ'), (ε), (ε') für die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen B und B' zwei in naturgemäßer Weise gebildete Forderungen über das Verhalten der eineindeutigen Zuordnung zu den beiden Verknüpfungen von B und B' hinzu. In dieser Hinsicht beweisen wir zunächst:

Satz 9. *Die folgende Festsetzung liefert eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Bereiche: Es sei* $\mathsf{B} \cong \mathsf{B}'$ *dann und nur dann, wenn erstens* B *und* B' *gleichmächtig sind, und wenn man zweitens die eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen* $a, b, \ldots$ *von* B *und* $a', b', \ldots$ *von* B' *so wählen kann, daß die folgenden Bedingungen bestehen:*

(3) *wenn* $a \longleftrightarrow a'$, $b \longleftrightarrow b'$ *ist, ist* $a + b \longleftrightarrow a' + b'$,

(4) *wenn* $a \longleftrightarrow a'$, $b \longleftrightarrow b'$ *ist, ist* $ab \longleftrightarrow a'b'$.

Beweis. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die für die Gleichmächtigkeit erfüllten Bedingungen (α), (β), (γ) auch bei Hinzunahme der Forderungen (3) und (4) bestehenbleiben.

Ebenso sieht man ohne weiteres:

Zusatz zu Satz 9. *Betrachtet man nur die Erweiterungsbereiche eines festen Bereichs* B_0, *so gilt Entsprechendes zu Satz* 9 *auch dann noch, wenn man den Bedingungen* (3), (4) *die weitere Bedingung hinzufügt, daß die Elemente* a_0 *von* B_0 *bei der eineindeutigen Zuordnung zwischen* B *und* B' *sich selbst entsprechen sollen:*

(5) $a_0 \longleftrightarrow a_0$ *für alle* a_0 *aus* B_0.

Auf Grund von Satz 9 definieren wir nun:

Definition 7. *Eine eineindeutige Zuordnung zwischen zwei Bereichen* B *und* B' *mit den Eigenschaften* (3), (4) *heißt ein* I s o m o r p h i s m u s *zwischen* B *und* B', *und* B *und* B' *selbst heißen dann* i s o m o r p h. *Die in Satz* 9 *genannte Äquivalenzrelation* $\mathsf{B} \cong \mathsf{B}'$ *für Bereiche heißt* I s o m o r p h i e, *die ihr entsprechenden Klassen die* T y p e n *der Bereiche.*

Auf Grund des Zusatzes zu Satz 9 definieren wir ferner analog:

Zusatz zu Definition 7. *Ein Isomorphismus zwischen zwei Erweiterungsbereichen* B *und* B' *eines Bereichs* B_0 *mit der Eigenschaft* (5) *heißt ein* I s o m o r p h i s m u s b z g l. B_0, *und* B *und* B' *heißen dann* i s o m o r p h. b z g l. B_0. *Die im Zusatz zu Satz* 9 *genannte Äquivalenzrelation für Erweiterungsbereiche von* B_0 *heißt* I s o m o r p h i e b z g l. B_0, *die ihr entsprechenden Klassen die* E r w e i t e r u n g s t y p e n b z g l. B_0.

Die in Satz 9 für die Relation $\mathsf{B} \cong \mathsf{B}'$ geforderten Bedingungen besagen, daß beim Übergang von B zu B' oder von B' zu B durch die betr. Zuordnung erstens nach (δ), (δ') jedem Element von B eines von B' entspricht und umgekeht, oder, kurz gesagt, die *Gesamtheit* der Elemente erhalten bleibt, zweitens nach (ε), (ε') verschiedenen Elementen von B verschiedene von B' entsprechen und umgekehrt, oder, kurz gesagt, die *Unterschiedenheit* der Elemente erhalten bleibt, und drittens nach (3) bzw. (4) jede Additions- bzw. Multiplikationsverknüpfung in B in die für die entsprechenden Elemente aus B' übergeht und umgekehrt, oder, kurz gesagt, die *Verknüpfungen* Addition und Multiplikation erhalten bleiben. Nun sind nach § 1 die vorliegende G e s a m t h e i t B von Elementen inkl. ihrer U n t e r s c h i e d e n h e i t e n [§ 1, (a)] und die Art, wie die Verknüpfungen Addition und Multiplikation für sie erklärt sind [§ 1, (b)], das einzige, was bei Absehen von der Bedeutung der Elemente als charakteristisch für den Bereich B übrigbleibt. Demgemäß ist jede von der Bedeutung der Elemente von B unabhängige Aussage über sie, wie sie ja von dem in der Einleitung formulierten abstrakten Standpunkt aus allein interessiert, lediglich mit den Relationen $=$, $\neq$ und den Verknüpfungen Addition und Multiplikation, auf die ja nach § 1 auch die Subtraktion und Division zurückführbar sind, gebildet und bleibt somit, wenn man durch die betr. Zuordnung von B zu B' übergeht, in obigem Sinne erhalten und ebenso umgekehrt beim Übergang von B' zu B. In dem angegebenen Umfange sind mithin, kurz gesagt, die Bereiche B und B' gar nicht zu unterscheiden. Daher ist es also von unserem Standpunkt aus ganz einerlei, ob man solche Aussagen über B oder B' macht.

Weiter geht für zwei bzgl. B_0 isomorphe Erweiterungsbereiche B und B' von B_0 jede allein auf Gleichheit, Unterschiedenheit und die vier elementaren Rechenoperationen gegründete Aussage, die Elemente von B mit solchen des Teilbereichs B_0 in Beziehung setzt, in eine richtige Aussage über, wenn man die ersteren Elemente durch die ihnen zugeordneten aus B' ersetzt und ebenso umgekehrt bei entsprechendem Übergang von B' zu B. Kurz gesagt sind also die Erweiterungsbereiche B und B' in dem angegebenen Umfange von B_0 aus nicht zu unterscheiden. Daher ist es also wieder einerlei, ob man solche Aussagen über B oder B' macht.

Dadurch, daß hiernach die Algebra sich beim Studium von Bereichen schlechthin nur für solche Aussagen interessiert, die allen Bereichen eines Typus gemeinsam sind, und beim Studium der Erweiterungsbereiche eines festen Bereichs B_0 nur für solche Aussagen, die allen Bereichen eines Erweiterungstypus von B_0 gemeinsam sind, rechtfertigen sich die in Def. 7 und Zusatz zu Def. 7 eingeführten Bezeichnungen *Typus* und *Erweiterungstypus* in Hinsicht auf die gewöhnliche Bedeutung des Wortes „Typus“. Von Aussagen der genannten Art sagt man auch, sie betreffen die *Struktur der Bereiche.* Die Gewinnung solcher Aussagen wurde am Schluß der Einleitung als Hauptaufgabe der modernen Algebra hingestellt.

Wenn es nach diesen Ausführungen scheint, als ob in der Algebra ein Unterschied zwischen isomorphen Bereichen überhaupt nicht zu machen sei, so bedarf das einer Einschränkung. Während es zwar gleichgültig ist, ob man die in der Einleitung formulierte Grundaufgabe der Algebra in einem Bereiche B oder in einem zu B isomorphen Bereiche B' behandelt, ist eine Unterscheidung isomorpher Bereiche B und B' natürlich dann geboten, wenn beide Bereiche Teilbereiche eines anderen Bereiches B^* sind, also ihre Elemente auf Grund der Unterschiedenheit der Elemente von B^* (für Betrachtungen innerhalb B^*) zu unterscheiden sind (vgl. die Beispiele auf S. 37 und S. 56).

Es sei noch bemerkt, daß nach den obigen Ausführungen die spezielle Eigenschaft, Körper bzw. Integritätsbereich zu sein, gleichzeitig allen Bereichen eines Typus zukommt, so daß man neben den allgemeinen *Ringtypen* speziell von *Körpertypen* und *Integritätsbereichtypen* reden kann.

Beispiele

1. Jeder Bereich B ist Teil- und Erweiterungsbereich von sich selbst. Jeder andere Teil- bzw. Erweiterungsbereich von B heißt *echt* oder *eigentlich.*

2. Aus den Beispielen 1—3 von § 1 ergeben sich ohne nähere Ausführung verständliche Beispiele für Teil- und Erweiterungsbereiche.

3. Sind $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2$ Teilkörper von K, so ist dann und nur dann ihr Durchschnitt mit K_1 und ihr Kompositum mit K_2 identisch, wenn K_1 Teilkörper von K_2 ist. Das ist leicht aus Satz 7 und Def. 5 zu entnehmen.

4. Weitere Beispiele für Teil- und Erweiterungsbereiche sowie auch für Isomorphie von Bereichen werden uns in §§ 3, 4 eingehend beschäftigen.

5. Die Einteilung der ganzen Zahlen in gerade und ungerade liefert gemäß (A) eine Äquivalenzrelation, die sich leicht als Kongruenzrelation für den Integritätsbereich Γ (Satz 5 [13]) erweist. Der zugehörige Restklassenring ist isomorph mit dem in § 1, Beispiel 4 genannten Körper, also ein Restklassenkörper.

6. Weitere Beispiele für Kongruenzrelationen und Restklassenringe werden uns in **2**, § 2 eingehend beschäftigen.

§ 3. Der Quotientenkörper eines Integritätsbereiches

Es ist für uns von Wichtigkeit nachzuweisen, daß jeder Integritätsbereich durch Hinzunahme aller aus seinen Elementen zu bildenden „Quotienten" zu einem Körper erweitert werden kann. Wir zeigen nämlich:

Satz 10. *Zu jedem Integritätsbereich* I *existiert ein Erweiterungskörper* K, *dessen sämtliche Elemente sich als Quotienten von Elementen aus* I *darstellen lassen. Der Erweiterungstypus von* K *bzgl.* I *ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt.*

Beweis[1]).

a) *Eindeutigkeitsnachweis*

Ist K ein Körper der im Satz genannten Art, so enthält er als Körper auch umgekehrt alle Quotienten $\frac{a}{b}$ von Elementen a, b ($b \neq 0$) aus I, d. h. besteht aus der Gesamtheit aller dieser (natürlich nicht notwendig sämtlich verschiedenen) Quotienten. Nach den Gesetzen § 1, (1)—(7) für Körper bestehen dann die folgenden Tatsachen in K:

(1) $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ dann und nur dann, wenn $ab' = a'b$,

(2) $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$,

(3) $\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$,

(4) $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2}$,

(5) $\frac{a_1}{b_1} \Big/ \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}$, wenn $\frac{a_2}{b_2} \neq 0$, d. h. $a_2 \neq 0$ (neben $b_1, b_2 \neq 0$).

Ist nun $\overline{\mathsf{K}}$ ein weiterer Körper der im Satz genannten Art und ordnet man jedem Element α von K auf Grund einer beliebigen seiner Darstellungen als Quotient $\frac{a}{b}$ von Elementen aus I das durch denselben Quotienten dargestellte

[1]) Wir legen hier, wie auch bei dem entsprechenden Beweis zu Satz 11 in § 4 den Nachdruck auf das logische Gerüst des Beweises. Die Bestätigung der bei den einzelnen Schritten angeführten Tatsachen ist auf Grund von §§ 1, 2 stets leicht zu erbringen. Wir begnügen uns fast durchweg mit dem Hinweis auf die heranzuziehenden Stellen aus §§ 1, 2 und überlassen die nähere Ausführung dem Leser.

Element $\bar{\alpha}$ von $\bar{\mathsf{K}}$ zu, so ist das nach dem Bemerkten und (1) eine eineindeutige Zuordnung [§ 2, (δ), (δ'), (ε), (ε')] zwischen den sämtlichen Elementen von K und $\bar{\mathsf{K}}$, die nach (2) und (3) den Bedingungen § 2, (3) und (4) genügt und ferner ersichtlich auch die Bedingung § 2, (5) bzgl. I als Grundbereich erfüllt. Also ist dann $\bar{\mathsf{K}} \cong \mathsf{K}$ bzgl. I. Damit ist der Nachweis für die eindeutige Bestimmtheit des Erweiterungstypus von K bzgl. I erbracht.

b) *Vorbemerkungen zum Existenznachweis*

Der Nachweis der Existenz eines Körpers K der im Satz genannten Art kann prinzipiell nur durch Konstruktion von K, d.h. durch Angabe seiner Elemente und ihrer Verknüpfungen geführt werden. Hierbei dürfen wir natürlich nicht schon mit den Quotienten $\frac{a}{b}$ operieren, da diese erst auf Grund der Existenz von K einen Sinn haben. Wir entziehen daher für die Konstruktion dem Bruchstrich in $\frac{a}{b}$ die Bedeutung eines Divisionszeichens, sehen vielmehr $\frac{a}{b}$ lediglich als geordnetes Elementpaar aus I an und schreiben dafür (a, b), um Verwechslungen mit den ev. schon teilweise in I definierten Quotienten $\frac{a}{b}$ zu vermeiden. Aus (1)—(3) entnehmen wir dann die nötigen Richtlinien für die Angabe der Elemente von K und ihrer Verknüpfungen.

c) *Konstruktion eines zu* K *isomorphen Körpers* K'

In der Menge M aller geordneten Elementpaare (a, b) aus I, bei denen $b \neq 0$ ist, definieren wir eine Äquivalenzrelation durch die Festsetzung:

(1′) $(a, b) \sim (a', b')$ dann und nur dann, wenn $ab' = a'b$.

Man bestätigt leicht das Erfülltsein von § 2, (α), (β), (γ), so daß wirklich eine Äquivalenzrelation im Sinne von § 2, (I) vorliegt.

Auf Grund von (1′) zerfällt M in Klassen. Diese Klassen sehen wir als Menge K' unterschiedener Elemente an. Die durch (a, b) erzeugte Klasse werde mit $\{a, b\}$ bezeichnet.

Da nach (1′) und dem Analogon zu Satz 3 [11] $\{0, e\} \neq \{e, e\}$ gilt, ist § 1, (a) in K' realisiert.

Wir definieren weiter in K' zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation durch die Festsetzungen:

$$(2') \quad \{a_1, b_1\} + \{a_2, b_2\} = \{a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2\},$$

$$(3') \quad \{a_1, b_1\} \{a_2, b_2\} = \{a_1 a_2, b_1 b_2\}.$$

Da nach Satz 4 [12] mit b_1 und b_2 auch $b_1 b_2 \neq 0$ ist, sind die rechten Seiten in (2′) und (3′) wirklich bestimmte Klassen aus K'.

Ferner sind diese, zunächst mittels einzelner Repräsentanten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) der Klassen links getroffenen Festsetzungen unabhängig von der Auswahl dieser Repräsentanten innerhalb ihrer Klassen. Man bestätigt nämlich leicht, daß sich nur der Repräsentant, nicht die Klasse rechts ändert, wenn man links (a_1, b_1) und (a_2, b_2) durch äquivalente (a_1', b_1') und (a_2', b_2') ersetzt. Somit ist vermöge (2′) und (3′) auch § 1, (b) in K' realisiert.

Schließlich befriedigen die in (2′) und (3′) definierten Verknüpfungen die Gesetze § 1, (1)—(7). Für § 1, (1)—(5) folgt das leicht aus dem Erfülltsein jener Gesetze in I, für § 1, (6) und (7) zeigt man ebenso auf Grund der Gültigkeit von § 1, (6) und (7a) in I, daß Differenz und Quotient in K' eindeutig bestimmt und durch

$$(4') \quad \{a_1, b_1\} - \{a_2, b_2\} = \{a_1 b_2 - a_2 b_1, b_1 b_2\},$$

$$(5') \quad \frac{\{a_1, b_1\}}{\{a_2, b_2\}} = \{a_1 b_2, a_2 b_1\}, \quad \text{wenn } \{a_2, b_2\} \neq 0,$$

stets gegeben sind. Die im Falle (5′) zu stellende Bedingung $\{a_2, b_2\} \neq 0$ bedeutet $a_2 \neq 0$, weil nach (2′) oder (4′) die Klasse $\{0, e\}$ Nullelement von K' ist und nach (1′) aus $\{a, b\} = \{0, e\}$ folgt $a = 0$.

Somit ist K' ein Körper bezüglich der Verknüpfungen (2′) und (3′).

d) *Konstruktion von* K

Der Körper K' enthält die Teilmenge I' der speziellen Klassen $\{a, e\}$, die nach (2')—(4') und Satz 6 [19] ein Teilintegritätsbereich von K' und weiter nach (1')—(3') und Def. 7 [23] vermöge der Zuordnung $\{a, e\} \longleftrightarrow a$ zu I isomorph ist. Wir können nun aus K' eine Menge K dadurch bilden, daß wir die zu I' gehörigen Elemente $\{a, e\}$ von K' je durch die ihnen zugeordneten Elemente a von I ersetzen, die nicht zu I' gehörigen Elemente von K' dagegen beibehalten. Dann wird also K eine K' eineindeutig zugeordnete Menge unterschiedener Elemente. Weiter können wir in K zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation, die den Gesetzen § 1, (1)—(7) genügen und die für die Teilmenge I mit den in I bereits bestehenden Verknüpfungen identisch sind, dadurch eindeutig erklären, daß wir auf die für die zugeordneten Elemente von K' definierten Verknüpfungen zurückgehen, m. a. W. die Bedingungen (3) und (4) von Satz 9 [22] zugrunde legen. Dann wird also K ein zu K' isomorpher Erweiterungskörper von I.

Dieser Körper K hat nun die im Satz genannte Eigenschaft. Da nämlich nach (3') oder (5') jedes Element $\{a, b\}$ von K' eine Darstellung $\{a, b\} = \dfrac{\{a, e\}}{\{b, e\}}$ als Quotient zweier Elemente von I' besitzt — (es ist $\{b, e\} \neq 0$ wegen $b \neq 0$) —, folgt für das zugeordnete Element von K die Darstellung $\dfrac{a}{b}$ als Quotient zweier Elemente von I.

Damit ist Satz 10 bewiesen.

Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 10 kann noch etwas verschärft werden, nämlich durch den folgenden Zusatz, dessen Existenzaussage nach Satz 6 [19] und (2)—(5) auf der Hand liegt:

Zusatz. *Innerhalb eines beliebigen Erweiterungskörpers* K^* *von* I *gibt es einen und nur einen Repräsentanten des in Satz* 10 *genannten Erweiterungstypus, nämlich den Körper* K, *der durch die in* K^* *gebildeten Quotienten von Elementen aus* I *gebildet wird.*

Beweis. Wird im vorhergehenden Beweis unter a) die Voraussetzung hinzugefügt, daß K und $\bar{\mathsf{K}}$ beide Teilkörper eines und desselben Erweiterungskörpers K^* von I sind, so folgt dort sogar $\overline{\mathsf{K}} = \mathsf{K}$, weil dann die Quotienten $\frac{a}{b}$ in K und $\overline{\mathsf{K}}$ eine und dieselbe, durch K^* festgelegte Bedeutung haben.

Im Hinblick auf die Ausführungen nach Def. 7 [23f.] ist es daher gerechtfertigt, isomorphe Erweiterungskörper von I des in Satz 10 genannten Typus nicht zu unterscheiden und mit dem bestimmten Artikel zu definieren:

Definition 8. *Der in Satz* 10 *genannte Körper* K *heißt* der Quotientenkörper *des Integritätsbereiches* I.

Beispiele

1. Ist I schon selbst ein Körper, so ist sein Quotientenkörper mit I identisch, und umgekehrt.

2. Der Quotientenkörper des in Satz 5 genannten Integritätsbereiches Γ ist der ebendort genannte Körper P. In der Tat geht das unter c) benutzte Konstruktionsverfahren für $\mathsf{I} = \Gamma$ in die bekannte Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen über.

3. Vgl. § 4, Def. 10 [38].

§ 4. Der Integritätsbereich der ganzen rationalen Funktionen von n Unbestimmten über I und der Körper der rationalen Funktionen von n Unbestimmten über K

Der in der Algebra zu verwendende Begriff der ganzen rationalen und der rationalen Funktion ist von dem in der Analysis üblichen grundsätzlich verschieden.

In der *Analysis* definiert man die Funktionen als Zuordnungen von Funktionswerten zu den Elementen einer Argumentmenge. Dementsprechend würde im Sinne der Analysis (i. S. d. An.) von einer Funktion f von n Veränderlichen über einem Integritätsbereich I zu reden sein, wenn jedem geordneten Elementsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus I ein Element $f(x_1, \ldots, x_n)$ aus I zugeordnet ist, und speziell von einer ganzen rationalen Funktion (g. r. Fkt.), wenn jene Zuordnung für alle $x_1, \ldots, x_n$ aus I in ein- und demselben, auf $x_1, \ldots, x_n$ und feste Elemente aus I anzuwendenden Rechenverfahren besteht, das aus endlich vielen Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, wie sie ja in I definiert sind, zusammengesetzt ist. Entsprechend wäre unter Hinzunahme auch der Division eine rationale Funktion (r. Fkt.) i. S. d. An. von n Veränderlichen über einem Körper K zu erklären, wobei allerdings wegen des Nichtdefiniertseins der Division durch 0 bei einem gegebenen Rechenverfahren unter Umständen nicht jedes System $x_1, \ldots, x_n$ aus K als Argumentsystem zulässig ist; das wird nachher noch zu präzisieren sein. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß die g. r. Fkt. bzw. r. Fkt. i. S. d. An. von n Veränderlichen über I bzw. K jedenfalls je einen Ring bilden, wenn man die Verknüpfungen durch Addition und Multiplikation je aller (definierten) Funktionswerte erklärt.

In der Algebra kommt man aus einem später (nach Satz 12 [40]) näher auszuführenden Grunde mit diesem Funktionsbegriff, der die *Zuordnung* als das Primäre, die Art der Zuordnung, d. h. im Falle der rationalen Funktionen das *Rechenverfahren* als das Sekundäre hinstellt, nicht aus. Man muß vielmehr umgekehrt für die dort allein zu betrachtenden rationalen Funktionen den Rechenausdruck als das Primäre, die durch ihn gelieferte Zuordnung als das Sekundäre ansehen[1]). Dem letzteren Standpunkte entspricht es, wenn wir im folgenden eine Theorie der in $x_1, \ldots, x_n$ ganzen rationalen bzw. rationalen Rechenausdrücke über I bzw. K entwickeln, die wir dann der formalen Analogie halber, wie üblich, auch g. r. bzw. r. Fkt. von $x_1, \ldots, x_n$ über I bzw. K nennen, und wenn wir dabei, um ein Zurückfallen in den Zuordnungsstandpunkt auszuschließen, den $x_1, \ldots, x_n$ vorläufig die Bedeutung von Veränderlichen in I bzw. K entziehen, sie vielmehr als feste Elemente außerhalb I bzw. K, sog. *Unbestimmte*[2]), einführen.

Zu dem Bereich der ganzen rationalen Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ über einem Integritätsbereich I im Sinne der Algebra gelangen wir durch eine, zu der in § 3 ganz analoge, abstrakte Konstruktion, indem wir beweisen:

Satz 11. *Zu jedem Integritätsbereich I existiert ein Erweiterungsintegritätsbereich I_n mit der Eigenschaft:*

Es existieren n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ in I_n derart, daß sich jedes Element von I_n eindeutig in der Form

[1]) Das ist also derjenige, vom Standpunkte der Analysis primitivere Funktionsbegriff, der historisch dem genannten, modernen Funktionsbegriff i. S. d. An. vorausgegangen ist. Unsere nachstehenden Entwicklungen zeigen, daß vom Standpunkte der Algebra umgekehrt jener in der Analysis primitivere Funktionsbegriff der tiefergehende ist.

[2]) Siehe zu dieser Bezeichnung die Erläuterung hinter Def. 9 [37].

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}\ ^{1)}$$

darstellen läßt, wo die $a_{k_1, \ldots, k_n}$ *Elemente aus* $\mathfrak{I}$ *sind, unter denen nur endlich viele von Null verschiedene vorkommen.*

Der Erweiterungstypus von $\mathfrak{I}_n$ *bzgl.* $\mathfrak{I}$ *ist durch diese Forderung eindeutig bestimmt.*

Beweis[2]. Wir führen den Beweis zunächst für $n = 1$, und zwar in vollständiger Analogie zum Beweis von Satz 10 in § 3.

a) *Eindeutigkeitsnachweis*

Ist $\mathfrak{I}_1$ ein Integritätsbereich der im Satz genannten Art für $n = 1$ und x das im Satz mit x_1 bezeichnete Element aus $\mathfrak{I}_1$, so enthält $\mathfrak{I}_1$ als Integritätsbereich auch umgekehrt alle Ausdrücke $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, wo die a_k Elemente aus $\mathfrak{I}$ sind, von denen nur endlich viele $\neq 0$ sind, d. h. $\mathfrak{I}_1$ besteht aus der Gesamtheit aller dieser Ausdrücke. Wegen der Eindeutigkeitsforderung des Satzes und nach den Gesetzen § 1, (1)—(6) für Ringe bestehen dann folgende Tatsachen in $\mathfrak{I}_1$:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a'_k x^k$ dann und nur dann, wenn

$$a_k = a'_k \text{ für alle } k,$$

(2) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)\, x^k\,,$$

(3) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{\lambda, \mu = 0 \\ \lambda + \mu = k}}^{k} a_\lambda b_\mu\Big)\, x^k\,,$$

---

1) Die Bedeutung des Summenzeichens Σ mit angefügten Angaben über den Summationsbereich darf als bekannt vorausgesetzt werden. — Daß wir hier für die in Wahrheit endlichen Summen formal unendliche Summen mit nur endlich vielen Summanden $\neq 0$ setzen, wobei natürlich stillschweigend unter einer Summe von unendlich vielen Nullen wieder Null verstanden ist, geschieht lediglich aus bezeichnungstechnischen Gründen. Sonst würden nämlich die Formulierung der Eindeutigkeit unserer Darstellungen, sowie später die Formeln für das Rechnen mit so dargestellten Elementen ziemlich kompliziert.

2) Vgl. die Anm. 1 [26] zum Beweis von Satz 10.

(4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)\, x^k$.

Ist nun $\bar{\mathfrak{I}}_1$ ein weiterer Integritätsbereich dieser Art, $\bar{x}$ das im Satz mit x_1 bezeichnete Element für $\bar{\mathfrak{I}}_1$, und ordnet man einem Element $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ von $\mathfrak{I}_1$ immer das Element $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{x}^k$ von $\bar{\mathfrak{I}}_1$ zu, so erschließt man aus (1)—(3) ganz entsprechend wie in § 3, a), daß auf Grund dieser Zuordnung $\bar{\mathfrak{I}}_1 \cong \mathfrak{I}_1$ bzgl. $\mathfrak{I}$ ist, also die eindeutige Bestimmtheit des Erweiterungstypus von $\mathfrak{I}_1$ bzgl. $\mathfrak{I}$.

b) *Vorbemerkungen zum Existenznachweis*

Der Nachweis der Existenz eines Integritätsbereiches $\mathfrak{I}_1$ der im Satz genannten Art kann prinzipiell nur durch Konstruktion von $\mathfrak{I}_1$, d.h. durch Angabe seiner Elemente und ihrer Verknüpfungen geführt werden. Hierbei dürfen wir natürlich nicht schon mit dem Element x und den Summendarstellungen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ operieren, da diese erst auf Grund der Existenz von $\mathfrak{I}_1$ einen Sinn haben. Wir entziehen daher für die Konstruktion dem x die Bedeutung eines Elementes, das mit den Elementen von $\mathfrak{I}$ zusammen den drei ersten elementaren Rechenoperationen unterworfen werden kann, und somit den Ausdrücken $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Bedeutung von Rechenausdrücken, sehen diese vielmehr lediglich als geordnete Systeme $(a_0, a_1, \ldots)$ von Elementen aus $\mathfrak{I}$ an. Aus (1)—(3) entnehmen wir dann die nötigen Richtlinien für die Angabe der Elemente von $\mathfrak{I}_1$ und ihrer Verknüpfungen.

c) *Konstruktion eines zu* $\mathfrak{I}_1$ *isomorphen Integritätsbereiches* $\mathfrak{I}_1'$

Wir sehen die Menge $\mathfrak{I}_1'$ aller geordneten Elementsysteme $(a_0, a_1, \ldots)$ von je abzählbar unendlich vielen Elementen aus $\mathfrak{I}$, wobei aber jedesmal nur endlich viele $a_k \neq 0$ sein sollen, als Menge unterschiedener Elemente an, haben also:

(1′) $(a_0, a_1, \ldots) = (a_0', a_1', \ldots)$ dann und nur dann, wenn $a_k = a_k'$ für alle k.

Wegen $(0, 0, \ldots) \neq (e, 0, \ldots)$ ist dann § 1, (a) in $\mathfrak{I}_1'$ realisiert.

Wir definieren weiter in $\mathfrak{l}_1$ zwei Verknüpfungen Addition und Multiplikation durch die Festsetzungen:

$$(2') \quad (a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots),$$

$$(3') \quad (a_0, a_1, \ldots)(b_0, b_1, \ldots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots).$$

Man überzeugt sich leicht, daß die rechten Seiten in (2′) und (3′) wieder nur endlich viele Glieder $\neq 0$ haben, also zu $\mathfrak{l}_1'$ gehören, so daß § 1, (b) vermöge (2′) und (3′) realisiert ist.

Ferner befriedigen die in (2′) und (3′) definierten Verknüpfungen die Gesetze § 1, (1)—(6). Für § 1, (1)—(5) folgt das leicht aus dem Erfülltsein jener Gesetze in $\mathfrak{l}$, für § 1, (6) zeigt man ebenso auf Grund der Gültigkeit von § 1, (6) in $\mathfrak{l}$, daß die Differenz in $\mathfrak{l}_1$ eindeutig bestimmt und stets durch

$$(4') \quad (a_0, a_1, \ldots) - (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 - b_0, a_1 - b_1, \ldots)$$

gegeben ist.

Näherer Ausführung bedarf jedoch der Nachweis, daß das Gesetz § 1, (7a) in $\mathfrak{l}_1'$ gilt, an dessen Stelle nach dem Zusatz zu Def. 3 [12] auch der Nachweis treten darf, daß das Analogon zu Satz 4 [12] in $\mathfrak{l}_1'$ richtig ist. Da sich als Nullelement von $\mathfrak{l}_1'$ aus (2′) oder (4′) das Element $(0, 0, \ldots)$ ergibt, bedeutet die Voraussetzung

$$(a_0, a_1, \ldots)(b_0, b_1, \ldots) = 0,$$

daß alle Glieder dieses nach (3′) zu bildenden Produktsystems Null sind. Wäre nun $(a_0, a_1, \ldots) \neq 0$, $(b_0, b_1, \ldots) \neq 0$, so daß also ein letztes $a_\nu \neq 0$ und ein letztes $b_\mu \neq 0$ existierte, so folgte für das $(\nu + \mu)$-te Glied

$$a_0 b_{\mu+\nu} + \cdots + a_{\nu-1} b_{\mu+1} + a_\nu b_\mu + a_{\nu+1} b_{\mu-1} + \cdots + a_{\nu+\mu} b_0$$

des Produktsystems nach Wahl von a_ν und b_μ, daß es gleich $a_\nu b_\mu$, also wegen der Gültigkeit von Satz 4 in $\mathfrak{l}$ von Null verschieden wäre, im Widerspruch zu der Voraussetzung. Somit gilt das Analogon zu Satz 4 in $\mathfrak{l}_1'$.

Schließlich gilt auch § 1, (7b), d. h. das Analogon zu Satz 3 [11] in $\mathfrak{l}_1'$, weil nach (3′) das Element $(e, 0, 0, \ldots)$ Einselement von $\mathfrak{l}_1'$ ist.

Somit ist $\mathfrak{l}_1'$ ein Integritätsbereich bezüglich der Verknüpfungen (2′) und (3′).

d) *Konstruktion von* I_1

Der Integritätsbereich I'_1 enthält die Teilmenge I' der speziellen Elemente $(a, 0, 0, \ldots)$, die nach (2')—(4') und Satz 6 [19] ein Teilintegritätsbereich von I'_1 und weiter nach nach (1')—(3') und Def. 7 [23] vermöge der Zuordnung $(a, 0, 0, \ldots) \longleftrightarrow a$ zu I isomorph ist. Ganz entsprechend wie in § 3, d) kann man dann einen zu I'_1 isomorphen Erweiterungsintegritätsbereich I_1 von I herleiten, indem man die Elemente von I' durch die ihnen zugeordneten von I ersetzt.

Dieser Integritätsbereich I_1 hat nun die im Satz genannte Eigenschaft. Bezeichnet nämlich x das spezielle Element $(0, e, 0, 0, \ldots)$ von I'_1, so daß also nach (3') gilt

$$x^0 = e = (e, 0, 0, \ldots), x^1 = x = (0, e, 0, 0, \ldots),$$
$$x^2 = (0, 0, e, 0, 0, \ldots), \ldots,$$

und ist $(a_0, a_1, \ldots)$ irgendein Element von I'_1, so ist nach (2') und (3')

$$(a_0, a_1, \ldots) = (a_0, 0, 0, \ldots)\, x^0 + (a_1, 0, 0, \ldots)\, x^1 + \cdots.$$

Da x nicht zum Teilbereich I' von I'_1 gehört, bleibt es beim Übergang zu I_1 erhalten, und es besteht demnach für das zugeordnete Element von I_1 die Darstellung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Diese Darstellung ist schließlich eindeutig. Denn aus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a'_k x^k$ folgt durch Übergang zum isomorphen I'_1 zunächst $(a_0, a_1, \ldots) = (a'_0, a'_1, \ldots)$ und daraus nach (1') $a_k = a'_k$ für alle k.

Damit ist Satz 11 für $n = 1$ bewiesen. Zum Beweise für beliebiges n stehen folgende zwei Wege zur Verfügung:

Entweder kann man den gesuchten Integritätsbereich I_n sukzessive konstruieren. Bezeichnet man dazu den zu irgendeinem Integritätsbereich I nach dem schon bewiesenen Teil des Satzes vorhandenen Integritätsbereich I_1 mit $I[x]$, so bilde man sukzessive

$$I_1 = I[x_1], I_2 = I_1[x_2], \ldots, I_n = I_{n-1}[x_n].$$

Dann lassen sich die Behauptungen des Satzes für $\mathfrak{l}_n$ sämtlich durch vollständige Induktion bezüglich n beweisen.

Oder man übertrage die Entwicklungen des vorstehenden Beweises für $n = 1$ sinngemäß auf beliebiges n, was ohne weiteres möglich ist. An Stelle von (1)—(3) tritt dabei:

$$(1\,\mathrm{a})\quad \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a'_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$$

dann und nur dann, wenn $a_{k_1,\ldots,k_n} = a'_{k_1,\ldots,k_n}$ für alle Systeme $(k_1, \ldots, k_n)$,

$$(2\,\mathrm{a})\quad \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} + \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} b_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} (a_{k_1,\ldots,k_n} + b_{k_1,\ldots,k_n})\, x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n},$$

$$(3\,\mathrm{a})\quad \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} \cdot \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} b_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{\substack{\lambda_1,\mu_1=0\\ \lambda_1+\mu_1=k_1}}^{\infty} \cdots\cdots \sum_{\substack{\lambda_n,\mu_n=0\\ \lambda_n+\mu_n=k_n}}^{\infty} a_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} b_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\Bigr) x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n},$$

und daraus ist die zu treffende Wahl der Elemente von $\mathfrak{l}_n$ [nämlich alle in ein n-dimensionales Schema geordneten Systeme $a_{k_1,\ldots,k_n}$ $(k_1, \ldots, k_n = 0, 1, \ldots)$ von Elementen aus $\mathfrak{l}$ mit nur endlich vielen $\neq 0$] und der Verknüpfungen für sie ohne weiteres ersichtlich.

Die nähere Ausführung darf auf Grund dieser Hinweise für beide Wege dem Leser überlassen bleiben.

Während der erste Weg neben dem Vorzug des Auskommens mit den rechnerisch einfachen Entwicklungen des ausgeführten

Beweises für $n = 1$ insofern auch theoretisch von Bedeutung ist, als manche Sätze über I_n nur durch vollständige Induktion bezüglich n, also durch Zurückgehen auf die angegebene rekursive Konstruktion von I_n beweisbar sind (vgl. z. B. **2**, Satz 49 [41]), ist der zweite Weg deshalb befriedigender, weil er einmal die besondere Behandlung des Falles $n = 1$ entbehrlich macht, dann aber auch im Gegensatz zum ersten einer wichtigen Eigenschaft von I_n gerecht wird, nämlich der Symmetrie in $x_1, \ldots, x_n$, d. h. der aus Satz 11 ohne weiteres ersichtlichen Tatsache, daß I_n in sich übergeht, wenn die Rollen der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ irgendwie vertauscht werden.

Anders als in § 3, Satz 10, Zusatz [29] können hier zwar innerhalb eines beliebigen Erweiterungsintegritätsbereiches I^* mehrere verschiedene Repräsentanten des in Satz 11 genannten Erweiterungstypus vorhanden sein (z. B. wenn $I^* = I[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$ ist, alle $I[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}]$, wo $i_1, \ldots, i_n$ irgendwelche n verschiedenen Ziffern aus der Reihe $1, \ldots, n + m$ sind); aber offenbar ist jeder solche Repräsentant innerhalb I^* durch die Angabe derjenigen Elemente aus I^*, die die Rolle von $x_1, \ldots, x_n$ haben, eindeutig bestimmt, nämlich als die Gesamtheit der Ausdrücke der in Satz 11 genannten Form in diesen Elementen.

Im Hinblick auf die Ausführungen nach Def. 7 ist es daher wieder gerechtfertigt, mit dem bestimmten Artikel zu definieren:

Definition 9. *Der in Satz* 11 *genannte Integritätsbereich* I_n *heißt* der Integritätsbereich der ganzen rationalen Funktionen der n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ *über* I. *Er werde mit* $I[x_1, \ldots, x_n]$, *seine Elemente auch kurz mit* $f(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ *oder noch kürzer mit* $f, \ldots$ *bezeichnet.*

Die eindeutigen Darstellungen dieser Elemente in der Form von Satz 11 *nennen wir ihre* Normaldarstellungen *und die darin auftretenden Elemente* $a_{k_1, \ldots, k_n}$ *aus* I *die* Koeffizienten *dieser Darstellungen.*

Die Bezeichnung *Unbestimmte* für die x_i erläutern wir dahin, daß jedes einzelne der x_i von I aus keiner anderen Bestimmung fähig ist, als der negativen, daß keine Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_i^k = 0$ (mit nur endlich vielen Koeffizienten $a_k \neq 0$) besteht, außer der trivialen, wo alle $a_k = 0$ sind. Die x_i sind also weder Elemente von I, noch genügen sie algebraischen Gleichungen in I (siehe § 5 [47] und **2**, Def. 21 [54]). Steinitz (Lit.-Verz. 21) nennt sie daher bzgl. $\mathfrak{I}$ *transzendente* Elemente. Übrigens sind die x_i wegen (1a) auch nicht untereinander durch positive Bestimmungen (algebraische Gleichungen) verknüpft. Steinitz nennt sie daher genauer ein System bzgl. $\mathfrak{I}$ *algebraisch unabhängiger* Elemente.

$\mathfrak{I}[x_1, \ldots, x_n]$ ist stets ein echter Erweiterungsbereich von $\mathfrak{I}$, da infolge der Eindeutigkeit der Normaldarstellungen z. B. die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ nicht zu $\mathfrak{I}$ gehören.

$\mathfrak{I}[x_1, \ldots, x_n]$ ist in keinem Falle ein Körper (auch nicht, wenn $\mathfrak{I}$ ein Körper ist). Auf Grund der obigen sukzessiven Konstruktion genügt es, das für $\mathfrak{I}[x]$ zu beweisen. In $\mathfrak{I}[x]$ existiert aber sicher nicht der Quotient $\frac{e}{x}$, weil für jedes $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ aus $\mathfrak{I}[x]$ gilt

$$x f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1}$$
$$= 0 + a_0 x + a_1 x^2 + \ldots \neq e + 0x + 0x^2 + \ldots = e.$$

Um auch die zu Beginn dieses Paragraphen schon genannten *rationalen* Rechenausdrücke in $x_1, \ldots, x_n$ einzubeziehen, erweitern wir $\mathfrak{I}[x_1, \ldots, x_n]$ zum Quotientenkörper. Da hierbei insbesondere der Teilbereich $\mathfrak{I}$ zum Quotientenkörper erweitert wird, genügt es, von vornherein von einem Körper K und dem zugeordneten Integritätsbereich $K[x_1, \ldots, x_n]$ auszugehen:

Definition 10. *Ist K ein Körper, so heißt der Quotientenkörper des Integritätsbereiches $K[x_1, \ldots, x_n]$ der* Körper der rationalen Funktionen der n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ *über K. Er werde mit $K(x_1, \ldots, x_n)$, seine Elemente auch kurz mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ oder noch kürzer mit $\varphi, \ldots$ bezeichnet.*

Aus den im vorstehenden vom algebraischen Standpunkt aus definierten ganzen rationalen bzw. rationalen Funktionen über $\mathfrak{I}$ bzw. K lassen sich nun die ganzen rationalen bzw. rationalen Funktionen i. S. d. An. über $\mathfrak{I}$ bzw. K dadurch herleiten, daß man den bisherigen *Unbestimmten* $x_1, \ldots, x_n$ die Bedeutung von *Elementen aus* $\mathfrak{I}$ *bzw.* K beilegt. Wir definieren zunächst für $\mathfrak{I}[x_1, \ldots, x_n]$:

Definition 11. *Unter der einem Element f von $\mathfrak{I}[x_1, \ldots, x_n]$* zugeordneten ganzen rationalen Funktion i. S. d. An.

verstehen wir diejenige Funktion i. S. d. An. über I, *die entsteht, wenn man jedem Elementsystem* $x_1, \ldots, x_n$ *aus* I *das durch die Normaldarstellung von* f *gelieferte Element von* I *als Funktionswert zuordnet.*

Wir bezeichnen für den Augenblick den zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Ring der ganzen rationalen Funktionen i. S. d. An. von $x_1, \ldots, x_n$ über I mit $\overline{\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]}$ und beweisen die folgende, für den Übergang von $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ zu $\overline{\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]}$ grundlegende Tatsache, die wir **Einsetzungsprinzip** nennen:

Satz 12. *Beim Übergang von* $\mathsf{B} = \mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ *zu* $\mathsf{B}' = \overline{\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]}$ *durch die in Def.* 11 *erklärte Zuordnung sind die Bedingungen* § 2, (δ), (δ'), (ε), (3), (4), (5) *erfüllt, dagegen nicht immer* (ε'). *Jener Übergang liefert also die Gesamtheit der Elemente von* $\overline{\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]}$ *aus der Gesamtheit derjenigen von* $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$, *und es bleiben bei ihm die Gleichheit und alle Verknüpfungsbeziehungen, dagegen nicht immer die Unterschiedenheit der Elemente von* $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ *erhalten. Dann und nur dann, wenn auch* § 2, (ε') *erfüllt ist, gilt auf Grund jener Zuordnung* $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n] \cong \overline{\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]}$.

Beweis. a) Das Erfülltsein von § 2, (δ), (ε) liegt natürlich in der eindeutigen und für jedes Element aus $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ anwendbaren Zuordnungsvorschrift von Def. 11.

b) Das Erfülltsein von § 2, (3), (4), (5) ist leicht aus den obigen Formeln (2a), (3a) zu entnehmen, die die Normaldarstellung der Summe und des Produkts zweier Elemente von $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ aus denen der Summanden bzw. Faktoren unter alleiniger Anwendung der in $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ gültigen Gesetze § 1, (1)—(5) berechnen. Denn weil diese Gesetze auch in I gültig sind, dürfen jene Umformungen auch vorgenommen werden, wenn $x_1, \ldots, x_n$ Elemente aus I sind.

c) Um das Erfülltsein von § 2, (δ') einzusehen, ist zu zeigen, daß auch umgekehrt jede ganze rationale Funktion i. S. d. An. von $x_1, \ldots, x_n$ über I einem Element f von $\mathsf{I}\,[x_1, \ldots, x_n]$ gemäß Def. 11 zugeordnet ist. Nun liefert jedes auf $x_1, \ldots, x_n$ und feste Elemente aus I anzuwendende, aus endlich vielen Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen bestehende Rechenverfahren, wenn man zunächst $x_1, \ldots, x_n$ als Unbestimmte, also als Elemente aus $\mathsf{I}[x_1 \ldots, x_n]$ auffaßt, ein Element f aus $\mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]$, einfach weil im Integritätsbereich $\mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]$ jene Operation unbeschränkt ausführbar sind. Nach dem unter b) schon Bewiesenen bleiben ferner beim Übergang von $\mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]$ zu $\overline{\mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]}$ durch unsere Zuordnung alle Verknüpfungsbeziehungen erhalten. Wendet man das auf diejenige Verknüpfungsbeziehung an, die das Element f durch die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ und die festen Elemente aus I ausdrückt, so folgt, daß die durch jenes Rechenverfahren gelieferten Funktionswerte dieselben sind, wie die durch die Normaldarstellung von f gelieferten, daß also die betr. ganze rationale Funktion i. S. d. An. mit der f zugeordneten identisch ist.

d) § 2, (ε') ist z. B. nicht erfüllt, wenn für I der nur aus 0 und e bestehende Körper K (§ 1, Beispiel 4) gewählt wird. Denn dann ist den beiden verschiedenen Elementen $x + x^2$ und 0 von $\mathsf{K}[x]$ dieselbe Funktion 0 i. S. d. An. zugeordnet, weil ja auch $x + x^2$ für alle x aus K (d. h. für $x = 0$ und $x = e$) Null ist.

Wir werden im übrigen in **2**, Satz 49 [41] und **3**, 1, § 4, Aufg. 7, 8 sowie § 1, Aufg. 9 sehen, daß § 2, (ε') dann und nur dann erfüllt ist, wenn I unendlich viele Elemente besitzt, daß also für unendliches I gilt $\overline{\mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]} \cong \mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]$ bzgl. I, für endliches I aber nicht.

In der nach d) vorhandenen Möglichkeit liegt der Grund, weswegen man in der Algebra mit dem auf Zuordnung gestützten und demgemäß die Funktionen nach ihren Funktionswerten unterscheidenden Funktionsbegriff nicht auskommt, sondern den auseinandergesetzten formalen Funktionsbegriff braucht, der eine feinere Unterscheidung der Funktionen vermöge ihrer Rechenausdrücke liefert. Wenn auch diese Notwendigkeit nach dem unter d) Bemerkten tatsächlich nur für endliche Integritätsbereiche vorliegt, so sprechen natürlich weiterhin methodische Gesichtspunkte dafür, von den in § 1 gegebenen Grundlagen ausgehend den Rechenausdruck als den durch ihn gelieferten Funktionswerten übergeordnet anzusehen.

Wir haben im vorhergehenden absichtlich nicht in der Bezeichnung, sondern nur im Text unterschieden, ob $x_1, \ldots, x_n$ als Unbestimmte oder als Elemente aus I gemeint sind, um den im folgenden oft auszuführenden Übergang von der ersten zur zweiten Bedeutung der $x_1, \ldots, x_n$ nicht immer mit einem Bezeichnungswechsel verbinden zu müssen. Auf Grund von Satz 12 ist es weiterhin hinsichtlich der *Verknüpfungen* angängig, auch die Bezeichnung $f(x_1, \ldots, x_n)$ der Elemente von $I[x_1, \ldots, x_n]$ unverändert für die zugeordneten Funktionswerte zu verwenden. Wir wollen daher fortan $f(x_1, \ldots, x_n)$ auch zur Bezeichnung des f zugeordneten Funktionswertes für das Elementsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus I gebrauchen und einen solchen *Funktionswert* dann der kürzeren Ausdrucksweise halber auch einfach eine ganze rationale *Funktion* von $x_1, \ldots, x_n$ über I nennen; dagegen soll die Bezeichnung f (ohne Argumente) für das Element von $I[x_1, \ldots, x_n]$ vorbehalten bleiben. [$f(x_1, \ldots, x_n)$ ist hiernach nicht auch Zeichen für die f zugeordnete Funktion i. S. d. An., sondern nur für einen einzelnen Wert dieser Funktion, die selbst erst durch die Gesamtheit aller Funktionswerte $f(x_1, \ldots, x_n)$ gebildet wird.] Wir müssen dann nur irgendwie einen Bezeichungsunterschied für die folgenden beiden ganz verschiedenartigen *Gleichheits*aussagen einführen:

$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ als Elemente von $I[x_1, \ldots, x_n]$,
$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ als Funktionswert für das Elementsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus I.

Daher setzen wir weiter fest, daß fortan zur Bezeichnung der ersteren dieser beiden Aussagen das Zeichen $\equiv$ (Gegenteil $\not\equiv$) verwendet werden soll[1]). Auf Grund obiger Verabredung können und wollen wir aber die Schreibweise $f = g$ gleichbedeutend mit $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n)$ verwenden.

[1]) Die Relation $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv g(x_1, \ldots, x_n)$ hat dann zwar die Relation:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \text{ für } \textit{alle } x_1, \ldots, x_n \text{ aus } I$$

zur Folge, aber nach obigem nicht notwendig umgekehrt. Das Zeichen $\equiv$ hat also i. a. eine weitergehende Bedeutung, als die häufig darunter verstandene: gleich für *alle* $x_1, \ldots, x_n$. — Eine Verwechslung der hier gemeinten Relation $\equiv$ mit einer Kongruenzrelation im Sinne von Def. 6 [21] wird durch den Zusammenhang ausgeschlossen.

Nach diesen Festsetzungen geht aus der gewählten Bezeichnung stets unzweideutig hervor, welche der beiden möglichen Auffassungen der $x_1, \ldots, x_n$ in einer Gleichheits- oder Ungleichheitsrelation vorliegt.

Wir vollziehen nun schließlich den Übergang von den Elementen von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ zu den rationalen Funktionen i. S. d. An. durch folgende Definition:

Definition 12. *Unter der einem Element φ von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ zugeordneten rationalen Funktion i. S. d. An. verstehen wir diejenige Funktion i. S. d. An. über K, die entsteht, wenn jedem Elementsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus K, für das mindestens eine Darstellung $\frac{f}{g}$ von φ als Quotient zweier Elemente aus $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit $g(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ existiert, als Funktionswert der Quotient $\frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)}$ der Funktionswerte von f und g zugeordnet wird.*

Analog zu Satz 12 gilt dann hier das **Einsetzungsprinzip:**

Satz 13. *Für den Körper $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ und den Ring $\overline{\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)}$ der rationalen Funktionen i. S. d. An. von $x_1, \ldots, x_n$ über K gilt vermöge der in Def. 12 erklärten Zuordnung entsprechendes wie in Satz 12, nur daß hier die ev. Nichtgültigkeit von § 2, (ε') stets auch die Nichtgültigkeit von § 2, (δ) zur Folge hat.*

Beweis. a) Um das Erfülltsein von § 2, (ε) zu beweisen, ist zu zeigen, daß die einem Element φ von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ nach Def. 12 zugeordnete Funktion i. S. d. An. unabhängig von der speziellen Wahl der (der Bedingung von Def. 12 genügenden) Quotientendarstellung $\frac{f}{g}$ allein durch φ bestimmt ist. Sind nun $\frac{f}{g}$ und $\frac{f'}{g'}$ zwei (dieser Bedingung genügende) Quotientendarstellungen von φ, so folgt aus der dann nach § 3, (1) bestehenden Relation $fg' = f'g$ nach Satz 12, daß auch

$$f(x_1, \ldots, x_n)\, g'(x_1, \ldots, x_n) = f'(x_1, \ldots, x_n)\, g(x_1, \ldots, x_n)$$

ist, woraus sich unter der Annahme von Def. 12 über g und g' weiter $\dfrac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} = \dfrac{f'(x_1, \ldots, x_n)}{g'(x_1, \ldots, x_n)}$ ergibt.

b) Durch Zurückgehen auf die Formeln § 3, (2) und (3) und Anwendung von Satz 12 ergibt sich ebenso das Erfülltsein von § 2, (3), (4), (5).

c) Das Erfülltsein von § 2, (δ') folgt dann entsprechend wie im Beweis zu Satz 12 unter c); siehe dazu die Präzisierung und Anleitung in **3**, 1, § 5, Aufg. 1.

d) Daß § 2, (ε') nicht notwendig erfüllt ist, zeigt dasselbe Beispiel wie oben. Es tritt das offenbar dann und nur dann ein, wenn mindestens ein Element g in $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ derart existiert, daß zwar $g \neq 0$, aber doch $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für alle $x_1, \ldots, x_n$ aus K ist. Ist nun einerseits dies der Fall, so hat das Element $\dfrac{e}{g}$ aus $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ die Eigenschaft, daß zu ihm für kein Elementsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus K eine Quotientendarstellung existiert, deren Nenner einen von Null verschiedenen Funktionswert hat; denn nach § 3, (1) ist $\dfrac{f}{gf}$ seine allgemeinste Quotientendarstellung, wo f ein beliebiges Element aus $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist. Also existiert dann zu $\dfrac{e}{g}$ keine zugeordnete Funktion i. S. d. An., indem die Def. 12 des Funktionswertes für j e d e s $x_1, \ldots, x_n$ aus K versagt. Existiert andererseits kein g der angegebenen Art in $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, so läßt sich dem Quotienten $\dfrac{f}{g}$ mindestens für ein Elementsystem $x_1, \ldots, x_n$ aus K ein Funktionswert gemäß Def. 12 zuordnen.

Auf Grund von Satz 13 übertragen sich die im Anschluß an Satz 12 gemachten Bemerkungen über $\mathsf{I}[x_1, \ldots, x_n]$ sinngemäß auch auf $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Es sollen daher unsere Bezeichnungsfestsetzungen auch für die Elemente von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ Gültigkeit haben.

§ 5. Ausführliche Formulierung der Grundaufgabe der Algebra

Mittels der im vorhergehenden auseinandergesetzten Begriffe wollen wir jetzt eine genaue Formulierung der in der Einleitung genannten Grundaufgabe der Algebra geben.

Eine mittels der vier elementaren Rechenoperationen gebildete „*Gleichung*“ zwischen bekannten und unbekannten Elementen eines Körpers K, wie sie in der Formulierung der Einleitung gemeint ist, entsteht, wenn zwei auf die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und vorgegebene (bekannte) Elemente von K anzuwendende Rechenverfahren vorliegen und gefragt wird, für welche Elementsysteme $x_1, \ldots, x_n$ aus K beide Verfahren dasselbe Ergebnis liefern. Hierbei haben also die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ zunächst den Charakter von Unbestimmten, und die vorliegenden Rechenverfahren sind zwei Elemente φ und φ' von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Die in der „Gleichung“ liegende Frage bezieht sich dann, in gewisser Analogie zu den letzten Entwicklungen von § 4, auf die Ersetzung der Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ durch Elementsysteme $x_1, \ldots, x_n$ aus K und geht dahin, für welche solchen Elementsysteme die Gleichung $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ besteht.

Da das Hinschreiben einer solchen „Gleichung“ als F o r d e r u n g oder F r a g e logisch einen ganz anderen Sinn hat als die gewöhnlich ebenso bezeichnete T a t s a c h e des Bestehens der Gleichung, wollen wir für die Forderungsgleichheit ein besonderes Zeichen $\doteq$ (Gegenteil $\not\doteq$) einführen, also die eben genannte Frage mit

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \doteq \varphi'(x_1, \ldots, x_n)$$

bezeichnen.

Die Gleichung $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \doteq \varphi'(x_1, \ldots, x_n)$ ist nun zunächst nach dem Einsetzungsprinzip, angewandt auf die Verknüpfungsbeziehung $\varphi - \varphi' = \psi$, gleichbedeutend mit einer Gleichung der Form $\psi(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0$, wo ψ wieder ein Element von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Ehe wir diese Gleichung weiter reduzieren, müssen wir uns mit dem folgenden Umstand auseinandersetzen: Einerseits besteht das zu ψ führende Rechenverfahren im Sinne der gestellten Aufgabe (das gemäß $\psi = \varphi - \varphi'$ aus den beiden ursprünglich gegebenen, zu φ und φ' führenden zusammengesetzt ist) genauer betrachtet in einer Kette von Einzeloperationen, deren jede eine Addition, Substraktion, Multiplikation oder Division von je zwei Elementen ist, deren jedes entweder ein Element aus K oder eines der $x_1, \ldots, x_n$ oder ein Resultat einer der vorhergehenden Operationen ist. Andererseits läßt sich ψ als Element von $\mathsf{K}(x_1, \ldots, x_n)$ in der einfachen Form eines Quotienten $\frac{f}{g}$ zweier Elemente aus $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ in Normaldarstellung darstellen. Nach dem Einsetzungsprinzip hat es dabei auf das Resultat der Einsetzung eines Elementsystems $x_1, \ldots, x_n$ aus K keinen Einfluß, ob man diese Einsetzung vor der Ausführung des Verfahrens stattfinden läßt (ob man also, wie es dem Sinn der Aufgabe entspricht, von vornherein mit den $x_1, \ldots, x_n$ als Elementen aus K losrechnet), oder ob man erst nach der Ausführung des Verfahrens, in eine Quotientendarstellung $\frac{f}{g}$ einsetzt, solange man nur solche Einsetzungen betrachtet, für die weder der Nenner g noch einer der sukzessive bei dem Rechenverfahren auftretenden Nenner Null wird. Es ist nun keineswegs von vornherein sicher, daß der Nenner g genau für diejenigen Elementsysteme aus K nicht Null wird, für die keiner der sukzessiven Nenner des Verfahrens Null wird, die also im Sinne der gestellten Aufgabe zulässig sind. Doch läßt sich zeigen, daß es unter allen Quotientendarstellungen von ψ (mindestens) eine mit dieser Eigenschaft gibt (siehe dafür **3**, 1, § 5, Aufg. 1). Eine solche, der Aufgabe naturgemäß angepaßte Quotientendarstellung $\psi = \frac{f}{g}$ sei im folgenden zugrunde gelegt.

Vermöge einer Quotientendarstellung $\psi = \frac{f}{g}$ (der eben näher charakterisierten Art) reduziert sich nun nach § 3 und dem Einsetzungsprinzip die Lösung der Gleichung $\psi(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0$ weiter darauf, alle diejenigen Lösungen von $f(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0$ zu bestimmen, die zudem Lösungen von $g(x_1, \ldots, x_n) \mathrel{\dot{\neq}} 0$ sind. Da man nun die Lösungen der letzteren Ungleichung kennt, wenn man die der Gleichung

$g(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0$ kennt, reduziert sich die Aufgabe auf die Behandlung von Gleichungen der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0,$$

wo f ein Element aus $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

Obwohl man nun im Prinzip die gemeinsamen Lösungen einer Anzahl von Gleichungen beherrscht, wenn man die Lösungen jeder Einzelgleichung kennt, ist es doch sowohl von theoretischen als auch von praktischen Gesichtspunkten aus zweckmäßig, solche *Gleichungssysteme* als Ganzes zu behandeln. Somit formulieren wir als die uns zum Leitfaden dienende **Aufgabe der Algebra:**

Es seien K ein Körper und $f_1, \ldots, f_m$ Elemente aus $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Es sollen Methoden zur Gewinnung aller Lösungen des Gleichungssystems

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \doteq 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

entwickelt werden[1]).

Eine systematisch vollendete Theorie zur Lösung dieser Aufgabe in ihrer vollen Allgemeinheit würde den Rahmen dieser Darstellung übersteigen. Daher sollen uns hier nur die beiden nachstehenden, für den allgemeinen Fall grundlegenden Spezialfälle beschäftigen:

1) Die Elemente $f_1, \ldots, f_m$ sind linear, d. h. in ihrer Normaldarstellung (Def. 9 [38]) sind höchstens die $n + 1$ Koeffizienten

$$a_{0,\ldots,0}, \; a_{1,0,\ldots,0}, \ldots, a_{0,\ldots,0,1}$$

von Null verschieden. Dann handelt es sich also um ein Gleichungssystem, das in der Form

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \doteq a_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

---

[1]) Es sei auf die beiden folgenden, naheliegenden Verallgemeinerungen dieser Aufgabe hingewiesen:
1. die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten wird auch als abzählbar unendlich zugelassen,
2. an Stelle des Körpers K wird ein Integritätsbereich (oder auch nur ein Ring) zugrunde gelegt,

mit denen man sich in neuerer Zeit ebenfalls beschäftigt hat.

geschrieben werden kann, wo die a_{ik} und a_i Elemente aus K sind. Ein Gleichungssystem der Form (1) heißt ein *lineares Gleichungssystem* in K.

2) Es ist $m = n = 1$. Dann handelt es sich also um eine einzelne Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \doteq 0\,,$$

wo die a_k Elemente aus K sind, von denen nur endlich viele $\neq 0$ sind. Von dem trivialen Falle, wo alle $a_k = 0$ sind und somit jedes x aus K Lösung der Gleichung ist, darf abgesehen werden. Dann existiert also ein letztes $a_r \neq 0$. Der so bestimmte Index r heißt der Grad des links stehenden Elementes aus $\mathsf{K}[x]$. Der Fall $r = 0$ ist ebenfalls trivial, weil dann wegen der Annahme $a_0 \neq 0$ kein x aus K Lösung der Gleichung ist. Somit ist eine Gleichung der Form

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{r} a_k x^k \doteq 0 \qquad (a_r \neq 0, \quad r \geqq 1)$$

zu behandeln. Eine Gleichung der Form (2) heißt eine *algebraische Gleichung r-ten Grades* in K.

In **1**, III und IV werden wir die Teilaufgabe 1), in **2** die Teilaufgabe 2) behandeln.

II. Gruppen

§ 6. Definition der Gruppen

Man redet von einer Gruppe, wenn folgender Tatbestand realisiert ist:

(a) *Es liegt eine* Menge $\mathfrak{G}$ von unterschiedenen Elementen *in irgendeiner endlichen oder unendlichen Anzahl vor.*

Vgl. die Bemerkungen zu § 1, (a). Anders als dort wird hier nicht gefordert, daß $\mathfrak{G}$ mindestens zwei verschiedene Elemente besitzt. Wir bezeichnen Gruppen mit großen deutschen, Elemente aus Gruppen mit großen lateinischen Buchstaben.

(b) *Für je zwei in bestimmter Reihenfolge gegebene Elemente A, B aus $\mathfrak{G}$ ist* eine Verknüpfung *definiert, d. h. jedem geordneten Elementpaar A, B aus $\mathfrak{G}$ ist irgendwie ein Element C aus $\mathfrak{G}$ zugeordnet.*

Vgl. die Bemerkungen zu § 1, (b). Wir nennen diese Verknüpfung hier *Multiplikation*, obwohl gelegentlich auch die Addition in einem Bereich als Gruppenverknüpfung zu betrachten ist, schreiben $C = AB$ und nennen C das *Produkt* von A und B.

(c) *Die in* (b) *genannte Verknüpfung genügt für beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$ den Gesetzen:*

(1) $(AB)\,C = A(BC)$ (assoziatives Gesetz);

(2) *Zu jedem geordneten Elementpaar A, C aus $\mathfrak{G}$ existieren eindeutig bestimmte Elemente B_1 und B_2 aus $\mathfrak{G}$ so, daß $AB_1 = C$ und $B_2A = C$ ist* (Gesetz der unbeschränkten und eindeutigen, hinteren und vorderen Division).

Es fehlt also gegenüber den Additions- bzw. Multiplikationsgesetzen des § 1 für Körper das kommutative Gesetz. Daher muß in (2) zwischen hinterer[1]) Division (Bestimmung von B_1 aus $AB_1 = C$) und vorderer[1]) Division (Bestimmung von B_2 aus $B_2A = C$) unterschieden werden. Man kann aus diesem Grunde auch nicht die Bezeichnung $\frac{C}{A}$ verwenden, sondern schreibt statt dessen gelegentlich $B_1 = A \setminus C$, $B_2 = C / A$; mehr eingebürgert hat sich jedoch die Schreibweise aus Satz 15. Die Einschränkung $a \neq 0$ in dem (2) entsprechenden Gesetz § 1, (7) fällt hier natürlich fort, weil keine zweite Verknüpfung und somit kein distributives Gesetz vorliegt [vgl. die Bemerkung hinter § 1, (7)].

Definition 13. *Wenn für eine Menge $\mathfrak{G}$ die unter* (a), (b), (c) *aufgeführten Tatsachen realisiert sind, heißt $\mathfrak{G}$ eine* Gruppe *bezüglich der Verknüpfung* (b). *Die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{G}$ (sei sie endlich oder unendlich) heißt die* Ordnung *von $\mathfrak{G}$. Wenn speziell auch noch das kommutative Gesetz*

(3) $$AB = BA$$

erfüllt ist, heißt $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe.

---

1) Diese Angaben beziehen sich auf die Stellung der Quotienten B_1, B_2.

Auch für Gruppen gilt analog zu Satz 3 [11]:

Satz 14. *In jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element E, das* Einselement *oder* Eins *von $\mathfrak{G}$ heißt, mit der Eigenschaft:*

$$AE = EA = A \text{ für alle } A \text{ aus } \mathfrak{G}.$$

Beweis. Nach (2) existieren in $\mathfrak{G}$ für alle $A, B, \ldots$ aus $\mathfrak{G}$ Elemente $E_A, E_B, \ldots$ und $F_A, F_B, \ldots$ derart, daß

$$AE_A = A, \quad BE_B = B, \ldots$$
$$F_A A = A, \quad F_B B = B, \ldots$$

ist. Nach (2) kann man ferner zu jedem Elementpaar A, B aus $\mathfrak{G}$ Elemente C und D so wählen, daß

$$AC = B, \quad DA = B$$

ist. Daraus folgt nach (1)

$$BE_A = (DA)E_A = D(AE_A) = DA = B = BE_B,$$
$$F_A B = F_A(AC) = (F_A A)C = AC = B = F_B B,$$

also $E_A = E_B$, $F_A = F_B$ wegen der Eindeutigkeit in (2). Daher sind $E_A, E_B, \ldots$ einerseits und $F_A, F_B, \ldots$ andererseits alle dasselbe Element E bzw. F, und es gilt $AE = A$, $FA = A$ für jedes A aus $\mathfrak{G}$. Insbesondere folgt daraus für $A = F$ bzw. E

$$FE = F \text{ bzw. } FE = E, \quad \text{also } E = F.$$

Daß E eindeutig durch die Forderung des Satzes bestimmt ist, folgt natürlich aus der Eindeutigkeit in (2).

Bezüglich der Division in einer Gruppe beweisen wir ferner:

Satz 15. *Zu jedem Element A einer Gruppe $\mathfrak{G}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element A^{-1} aus $\mathfrak{G}$, das das* Reziproke *zu A heißt, mit der Eigenschaft*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Die in (2) genannten Elemente B_1 und B_2 (hinterer und vorderer Quotient von C und A) sind durch

$$B_1 = A^{-1}C, \quad B_2 = CA^{-1}$$

gegeben.

Beweis. a) Nach (2) existieren eindeutig bestimmte Elemente A_1 und A_2 in $\mathfrak{G}$ derart, daß

$$AA_1 = A_2A = E$$

gilt. Nach (1) und Satz 14 folgt dann

$$A_1 = EA_1 = (A_2A)\,A_1 = A_2(AA_1) = A_2E = A_2.$$

Es hat also das Element $A^{-1} = A_1 = A_2$ die im Satz genannte Eigenschaft und ist durch A eindeutig bestimmt.

b) Aus $(AB)\,(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})\,A^{-1} = AEA^{-1}$
$= AA^{-1} = E$

und der Eindeutigkeit von $(AB)^{-1}$ folgt, daß $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$ ist.

c) Die Elemente $B_1 = A^{-1}C$, $B_2 = CA^{-1}$ befriedigen nach (1), Satz 14 und dem unter a) Bewiesenen die Gleichungen $AB_1 = C$, $B_2A = C$, sind also deren nach (2) eindeutig bestimmte Lösungen.

Analog zu den am Schluß von § 1 getroffenen Festsetzungen schreibt man

$\ldots, A^{-2}, A^{-1}, A^0, A^1, A^2, \ldots$ für $\ldots, A^{-1}A^{-1}, A^{-1}, E, A, AA, \ldots$
(ganze Potenzen von A).

Unter Berücksichtigung der nach Satz 15 bestehenden Formel

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ergibt sich dann mittels der Definition der Rechenoperationen im Bereich der ganzen Zahlen

$$A^mA^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn}$$

für beliebige ganze Zahlen m, n. Speziell gilt $E^m = E$ für jede ganze Zahl m.

Der späteren Anwendung halber formulieren wir noch besonders die beiden folgenden Sätze, deren erster nur eine andere Ausdrucksweise für das Gesetz (2) ist:

Satz 16. *Ist A ein festes Element einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so durchläuft jedes der Produkte AB und BA alle Elemente von $\mathfrak{G}$, jedes einmal, wenn B dieses tut.*

Satz 17. *Das Reziproke B^{-1} durchläuft alle Elemente von $\mathfrak{G}$, jedes einmal, wenn B dieses tut.*

Beweis. a) Ist A irgendein Element von $\mathfrak{G}$, so ist nach Satz 15 $A = (A^{-1})^{-1}$; A ist also Reziprokes B^{-1} zu $B = A^{-1}$.

b) Aus $B_1^{-1} = B_2^{-1}$ folgt $(B_1^{-1})^{-1} = (B_2^{-1})^{-1}$, also $B_1 = B_2$, wieder nach Satz 15.

Für den Nachweis, daß eine Gruppe vorliegt, kann man die Feststellung (2), daß alle hinteren und vorderen Quotienten vorhanden und eindeutig bestimmt sind, auf Grund des folgenden Satzes durch zwei einfachere Feststellungen ersetzen:

Satz 18. *Unter der Voraussetzung, daß* (a), (b) *und* (1) *erfüllt sind, ist die Forderung* (2) *gleichwertig mit den beiden Forderungen:*

(2a) *Es existiert ein Element E in $\mathfrak{G}$ derart, daß $AE = A$ für alle A aus $\mathfrak{G}$ ist* (Existenz des hinteren Einselements).

(2b) *Zu jedem A aus $\mathfrak{G}$ existiert ein Element A^{-1} aus $\mathfrak{G}$ derart, daß $AA^{-1} = E$ ist* (Existenz des hinteren Reziproken).

Beweis. a) Ist (a), (b), (1), (2) erfüllt, so stimmen nach dem Vorhergehenden auch (2a) und (2b).

b) Es seien (a), (b), (1), (2a) und (2b) erfüllt. Ist dann $(A^{-1})^{-1}$ das nach (2b) ebenfalls existierende hintere Reziproke zu A^{-1}, also $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$, so ergibt sich durch vordere Multiplikation dieser Relation mit A nach (1), (2a), (2b) $E(A^{-1})^{-1} = A$. Daher ist einerseits auch $EA = E(A^{-1})^{-1} = A$, d. h. E ist auch vorderes Einselement, und andererseits somit $(A^{-1})^{-1} = A$, also $A^{-1}A = E$, d. h. A^{-1} ist auch vorderes Reziprokes zu A. Hieraus und aus (2b) sowie (1) ergibt sich dann, daß die Gleichungen $AB_1 = C$ und $B_2A = C$ mit den

Relationen $B_1 = A^{-1}C$ bzw. $B_2 = CA^{-1}$ gleichwertig sind, nämlich mit ihnen durch vordere bzw. hintere Multiplikation mit A^{-1} und rückwärts mit A zusammenhängen. Jene Gleichungen werden also durch diese Ausdrücke B_1, B_2 eindeutig gelöst. Daher ist (2) erfüllt.

Beispiele

1. Offenbar ist jeder Ring eine abelsche Gruppe bezüglich seiner Addition als Gruppenverknüpfung. Das Einselement dieser Gruppe ist die Null des Ringes. Ferner bilden auch die von Null verschiedenen Elemente eines Körpers eine abelsche Gruppe bezüglich der Körpermultiplikation als Gruppenverknüpfung.

2. Besteht die Menge $\mathfrak{E}$ nur aus einem Element E und setzt man fest $EE = E$, so ist $\mathfrak{E}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung 1 bezüglich dieser Verknüpfung, die sog. *identische Gruppe* oder *Einsgruppe*. E ist ihr Einselement.

3. Enthält $\mathfrak{G}$ nur zwei Elemente E, A und setzt man fest

$$EE = E,\quad EA = AE = A,\quad AA = E,$$

so sieht man leicht, daß $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe der Ordnung 2 bezüglich dieser Verknüpfung ist. Diese entsteht aus dem in § 1, Beispiel 4 genannten Körper, wenn man dessen Addition als Gruppenverknüpfung ansieht und 0 mit E, e mit A identifiziert.

4. Es sei ein gleichseitiges Dreieck im Raum gegeben, dessen drei Ecken und zwei Seitenflächen als unterschieden gelten. Wir betrachten alle Drehungen, die dieses Dreieck als Ganzes mit sich zur Deckung bringen (ohne daß jedoch jede einzelne Ecke oder Fläche in sich überzugehen braucht), und unterscheiden diese Drehungen nur nach der Endlage der Ecken und Flächen des Dreiecks relativ zu deren Anfangslage (also weder nach den Zwischenstadien, noch nach der absoluten Anfangs- oder Endlage). Die so erklärte Menge $\mathfrak{G}$ unterschiedener Elemente besteht offenbar aus den folgenden Drehungen:

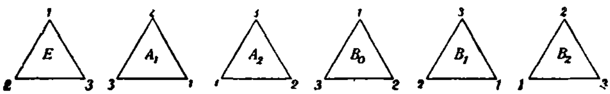
a) der identischen Drehung E (Erhaltung der Lage),

b) zwei Drehungen A_1, A_2 um die durch den Dreiecksmittelpunkt gehende, zur Dreiecksebene senkrechte Achse um die Winkel $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$,

c) drei Drehungen B_0, B_1, B_2 um je eine der drei Mittellinien des Dreiecks um den Winkel π.

Dabei mögen der in b) vorliegende Drehungssinn sowie die in c) genannten Drehachsen als im Raume fest, d. h. den Drehungen des Dreiecks nicht mitunterworfen angesehen werden.

Ausgehend von einer festen Anfangslage lassen sich diese Drehungen wie folgt durch ihre Endlagen veranschaulichen:



Definiert man nun die Multiplikation in $\mathfrak{G}$ durch Nacheinanderausführung der betr. Drehungen, so ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung 6 bezüglich dieser Multiplikation. Denn nach dem Gesagten sind (a), (b) in $\mathfrak{G}$ realisiert, ferner stimmt (1) offensichtlich, schließlich sind (2a) und (2b) erfüllt, weil $\mathfrak{G}$ die identische Drehung E als Einselement und zu jeder Drehung C die durch rückwärtige Ausführung entstehende D enthält, für die offenbar $CD = E$ gilt. Wie sich aus obiger Veranschaulichung sofort ergibt, lassen sich die von E verschiedenen Elemente von $\mathfrak{G}$ wie folgt durch $A = A_1$ und $B = B_0$ ausdrücken:

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^2, \quad B_0 = B, \quad B_1 = BA, \quad B_2 = BA^2.$$

Es bestehen ferner die folgenden Verknüpfungsbeziehungen:

$$A^3 = E, \quad B^2 = E, \quad AB = BA^2,$$

aus denen sich übrigens alle anderen herleiten lassen. Die letzte dieser Beziehungen zeigt, daß $\mathfrak{G}$ keine abelsche Gruppe ist. Als Reziproke findet man

$$\begin{aligned} &E^{-1} = E, \quad A^{-1} = A^2 && (A^2)^{-1} = A^{-2} = A, \\ &B^{-1} = B, \ (BA)^{-1} = BA, && (BA^2)^{-1} = BA^2. \end{aligned}$$

Während uns die in Beispiel 1 hervorgehobene Anwendung des Gruppenbegriffs in **2**, § 4 eine wichtige Einsicht in die Struktur von Integritätsbereichen und Körpern liefern wird, werden wir es an zwei entscheidenden Stellen (Definition der Determinanten in **1**, § 17 und Definition der galoisschen Gruppe in **2**, § 15) mit endlichen, nicht notwendig abelschen Gruppen zu tun haben, deren Elemente nicht gleichzeitig Elemente desjenigen Bereiches sind, den wir für die Lösung der Aufgaben der Algebra zugrunde legen.

§ 7. Untergruppen, Kongruenzrelationen, Isomorphie

Wir übertragen in diesem Paragraphen die Entwicklungen des § 2 sinngemäß auf Gruppen. In Analogie zu Def. 4 [19] setzen wir fest:

Definition 14. *Bilden die Elemente einer Teilmenge $\mathfrak{H}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezüglich der in $\mathfrak{G}$ zugrunde liegenden Multiplikation eine Gruppe, so heißt $\mathfrak{H}$ eine* Untergruppe *von $\mathfrak{G}$.*

Genau wie in § 2 den Satz 6 [19], beweist man hier:

Satz 19. *Eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn Produkt sowie hinterer und vorderer Quotient von Elementen aus $\mathfrak{H}$, wie sie innerhalb $\mathfrak{G}$ definiert sind, stets wieder zu $\mathfrak{H}$ gehören.*

Bezüglich der Zugehörigkeit der Quotienten zu $\mathfrak{H}$ genügt es nach § 6 offenbar auch, zu fordern, daß das Einselement E von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$ gehört, ebenso jedes Reziproke B^{-1} eines Elementes B aus $\mathfrak{H}$. Für den Fall einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ gilt sogar:

Satz 20. *Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe, so ist die Behauptung von Satz* 19 *auch richtig, wenn nur die Produkte von Elementen aus $\mathfrak{H}$ (nicht auch die Quotienten) berücksichtigt werden.*

Beweis. Nach § 6, (2) sind für festes A aus $\mathfrak{H}$ die Elemente AB und BA je sämtlich verschieden, wenn B die Elemente von $\mathfrak{H}$, jedes einmal, durchläuft. Also müssen sie mit den in derselben Anzahl vorhandenen sämtlichen Elementen von $\mathfrak{H}$ übereinstimmen, was die Existenz aller hinteren und vorderen Quotienten von Elementen aus $\mathfrak{H}$ innerhalb $\mathfrak{H}$ besagt.

Für die Übertragung der weiteren Sätze 7—9 [20—22] und Definitionen 5—7 [20—23] des § 2 können wir uns mit der Formulierung der entsprechenden Sätze und Definitionen begnügen und im übrigen auf die entsprechenden Beweise und Ausführungen des § 2 verweisen.

Satz 21. *Sind $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ irgendwelche [endlich oder unendlich[1]) viele] Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist auch der Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$; diese heißt* Durchschnittsgruppe *oder kurz* Durchschnitt *der Gruppen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$.*

Definition 15. *Sind $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ irgendwelche (endlich oder unendlich viele) Untergruppen einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so heißt der Durchschnitt aller $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ als Untergruppen enthaltenden Untergruppen von $\mathfrak{G}$ das* Kompositum *von $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$ oder auch die aus $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots$* komponierte Gruppe.

---

[1]) Vgl. das in der Anm. 1 zu Satz 7 [20] über die Numerierung Gesagte.

Definition 16. *Erfüllt eine Äquivalenzrelation* $\equiv$ *in einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *neben* § 2, (α), (β), (γ) *auch noch die Bedingung*:

(1) *aus* $A_1 \equiv A_2$, $B_1 \equiv B_2$ *folgt* $A_1 B_1 \equiv A_2 B_2$,

so nennen wir sie eine Kongruenzrelation *in* $\mathfrak{G}$ *und die ihr entsprechenden Klassen die* Restklassen *von* $\mathfrak{G}$ *nach ihr.*

Satz 22. *Liegt in einer Gruppe* $\mathfrak{G}$ *eine Kongruenzrelation* $\equiv$ *vor und definiert man in der Menge* $\overline{\mathfrak{G}}$ *der Restklassen nach ihr eine Verknüpfung durch elementweise Multiplikation, so ist* $\overline{\mathfrak{G}}$ *eine Gruppe bezüglich dieser Verknüpfung;* $\overline{\mathfrak{G}}$ *heißt die* Restklassengruppe *von* $\mathfrak{G}$ *nach der Kongruenzrelation* $\equiv$.

Satz 23. *Die folgende Festsetzung liefert eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Gruppen: Es sei* $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$ *dann und nur dann, wenn erstens* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *gleichmächtig sind und wenn man zweitens die eineindeutige Zuordnung zwischen den Elementen* $A, B, \ldots$ *von* $\mathfrak{G}$ *und* $A', B', \ldots$ *von* $\mathfrak{G}'$ *so wählen kann, daß die Bedingung besteht*:

(2) *wenn* $A \longleftrightarrow A'$, $B \longleftrightarrow B'$ *ist, ist* $AB \longleftrightarrow A'B'$.

Definition 17. *Eine eineindeutige Zuordnung zwischen zwei Gruppen* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *mit der Eigenschaft* (2) *heißt ein* Isomorphismus *zwischen* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$, *und* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *selbst heißen dann* isomorph. *Die in Satz* 23 *genannte Äquivalenzrelation* $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$ *für Gruppen heißt* Isomorphie, *die ihr entsprechenden Klassen die* Typen *der Gruppen.*

Beispiele

1. Jede Gruppe enthält als Untergruppen: a) sich selbst, b) die nur aus ihrem Einselement bestehende, identische Untergruppe (§ 6, Beispiel 2). Alle anderen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ heißen *echt* oder *eigentlich.*

2. Alle Gruppen der Ordnung 1 sind isomorph, d. h. es gibt nur einen Gruppentypus der Ordnung 1. Auch innerhalb einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gibt es nur eine Untergruppe der Ordnung 1, denn aus $AA = A$ folgt nach § 6, (2) und Satz 14 [49] $A = E$. Daher kann man mit Recht von der identischen Gruppe $\mathfrak{E}$ und der identischen Untergruppe $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ reden.

3. Die in § 6, Beispiel 3 genannte Gruppe hat keine echten Untergruppen.

4. Man bestätigt leicht, daß die folgenden Teilmengen, und keine weiteren, echte Untergruppen der Gruppe $\mathfrak{G}$ von § 6, Beispiel 4 sind:

a) E, A, A^2; b_0) E, B; b_1) E, BA; b_2) E, BA^2.

Sie seien mit $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ bezeichnet. Ersichtlich ist der Durchschnitt je zweier $\mathfrak{E}$, das Kompositum je zweier $\mathfrak{G}$. Ferner sind $\mathfrak{H}_0$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ zueinander isomorph (vgl. d. Bem. nach Def. 7 [24/25]).

§ 8. Zerlegung einer Gruppe nach einer Untergruppe

Neben den Kongruenzrelationen (Def. 16 [55]) hat man in der Gruppentheorie wegen des Wegfallens des kommutativen Gesetzes noch allgemeinere Äquivalenzrelationen und deren Klasseneinteilungen einzuführen, deren Studium uns gleichzeitig einen tieferen Einblick in die Natur der Kongruenzrelationen in Gruppen vermitteln wird. Diese ergeben sich auf folgende Weise:

Satz 24. *Es sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$. Dann liefert jede der beiden folgenden Festsetzungen eine Äquivalenzrelation in der Menge $\mathfrak{G}$: Sind S und S' Elemente aus $\mathfrak{G}$, so sei*

(1a) $S \overset{(h)}{=} S'(\mathfrak{H})$ *dann und nur dann, wenn $S = S'A$ mit A aus $\mathfrak{H}$,*

(1b) $S \overset{(v)}{=} S'(\mathfrak{H})$ *dann und nur dann, wenn $S = AS'$ mit A aus $\mathfrak{H}$,*

d. h. wenn der hintere bzw. vordere Quotient von S und S' zu $\mathfrak{H}$ gehört.

Beweis. Es ist erfüllt: § 2, (α), weil E, § 2, (β), weil mit A auch A^{-1}, § 2, (γ), weil mit A_1, A_2 auch $A_1 A_2$ und $A_2 A_1$ zu $\mathfrak{H}$ gehören, wie man aus Def. 14 [54] oder Satz 19 [54] ohne weiteres entnimmt.

Auf Grund von Satz 24 definieren wir nun:

Definition 18. *Die in Satz* 24 *genannten Äquivalenzrelationen heißen* hintere *bzw.* vordere Äquivalenz nach $\mathfrak{H}$, *die ihr entsprechenden Klassen von Elementen aus $\mathfrak{G}$* hintere *bzw.* vordere Restklassen[1]) nach $\mathfrak{H}$, *die durch diese gelieferte Zerlegung von* $\mathfrak{G}$ hintere *bzw.* vordere Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ *und ein vollständiges Repräsentantensystem für diese* vollständiges hinteres *bzw.* vorderes Restsystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$.

Jede der Restklassen nach $\mathfrak{H}$ entsteht aus irgendeinem ihr angehörigen Elemente S, indem alle Produkte SA bzw. AS mit den Elementen A aus $\mathfrak{H}$ gebildet werden. Man deutet diese ihre Struktur gewöhnlich durch die Bezeichnung $S\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}S$ an (vgl. § 9, Def. 20 [59]). Ist ferner $S_1, S_2, \ldots$ bzw. $T_1, T_2, \ldots$[2]) ein vollständiges hinteres bzw. vorderes Restsystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$, so schreibt man dementsprechend

$$\mathfrak{G} = S_1\mathfrak{H} + S_2\mathfrak{H} + \cdots \text{ bzw. } \mathfrak{G} = \mathfrak{H}T_1 + \mathfrak{H}T_2 + \cdots$$

für die hintere bzw. vordere Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$, wo also die Zeichen $+$ die in der Mengentheorie übliche Bedeutung haben (Bildung der Vereinigungsmenge elementfremder Mengen).

Die aus dem Einselement E oder auch aus irgendeinem Element von $\mathfrak{H}$ entspringende hintere sowohl wie vordere Restklasse ist ersichtlich die Gruppe $\mathfrak{H}$ selbst.

Auf eine Beziehung der beiden Äquivalenzrelationen (1a) und (1b), sowie der ihnen entsprechenden Klasseneinteilungen zueinander wird im nächsten Paragraphen anläßlich der Definition des Begriffes *Normalteiler* eingegangen werden.

Die Zerlegungsmöglichkeit von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ liefert ein besonders wichtiges Resultat, wenn $\mathfrak{G}$ und somit auch $\mathfrak{H}$ endlich ist. Aus § 6, (2) ergibt sich dann nämlich sofort:

Satz 25. *Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe der Ordnung n und $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ der Ordnung m, so bestehen die hinteren wie die vorderen Restklassen nach $\mathfrak{H}$ sämtlich aus gleich vielen, nämlich m Elementen. Für ihre Anzahl j, den sog.* Index *von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, gilt somit $n = mj$. Hiernach ist also die Ordnung m sowie der Index j jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ein Teiler der Ordnung n von $\mathfrak{G}$.*

[1]) Die in der Literatur vielfach übliche Bezeichnung *Nebengruppen nach* $\mathfrak{H}$ ist schlecht, weil stets nur die durch $\mathfrak{H}$ selbst gebildete Klasse Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist (vgl. **3**, 1, § 8, Aufg. 11). Will man *Restklassen* allein für die in **2**, § 2 behandelten Spezialfälle vorbehalten, so sage man *Nebenklassen*; allerdings hat das den Beiklang des Ausschließens der aus der Untergruppe $\mathfrak{H}$ selbst bestehenden *Hauptklasse*, was meistens unerwünscht ist.

[2]) Vgl. das in der Anm. 1 zu Satz 7 [20] über die Numerierung Gesagte.

Beispiele

1. Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{H}$ selbst die einzige Restklasse nach $\mathfrak{H}$; für endliches $\mathfrak{G}$ der Ordnung n ist dann $m = n$, $j = 1$. Ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, so sind die Elemente von $\mathfrak{G}$ die Restklassen nach $\mathfrak{H}$; für endliches $\mathfrak{G}$ der Ordnung n ist dann $m = 1$, $j = n$.

2. Für das in §§ 6,7 behandelte Beispiel 4 erhält man:

$\mathfrak{N}$ ist Untergruppe der Ordnung 3 vom Index 2,

$\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ sind Untergruppen der Ordnung 2 vom Index 3. Es gelten die Zerlegungen

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + B\mathfrak{N} = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}B,$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_0 + A\mathfrak{H}_0 + A^2\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}_0 A + \mathfrak{H}_0 A^2.$$

Während hintere und vordere Äquivalenz und Zerlegung nach $\mathfrak{N}$ schon deshalb zusammenfallen müssen, weil nur zwei Restklassen existieren, deren eine $\mathfrak{N}$ ist, und deren andere somit aus den nicht zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Elementen B, BA, BA^2 von $\mathfrak{G}$ bestehen muß, sind hintere und vordere Äquivalenz und Zerlegung nach $\mathfrak{H}_0$ verschieden, und zwar nicht nur durch die (nicht als Verschiedenheit zu zählende) Reihenfolge der Klassen. Denn es enthält

$A\mathfrak{H}_0$ die Elemente	A, BA^2;	$A^2\mathfrak{H}_0$ die Elemente	A^2, BA;
$\mathfrak{H}_0 A$ „ „	A, BA;	$\mathfrak{H}_0 A^2$ „ „	A^2, BA^2.

§ 9. Normalteiler, konjugierte Teilmengen einer Gruppe, Faktorgruppe

Wie aus dem letzten Beispiel des vorigen Paragraphen hervorgeht, brauchen die beiden Äquivalenzrelationen $\overset{(h)}{\equiv}$ und $\overset{(v)}{\equiv}$ in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ nach einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ nicht übereinzustimmen. Wir definieren nun:

Definition 19. *Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt dann und nur dann* Normalteiler *oder* invariante Untergruppe *von $\mathfrak{G}$, wenn hintere und vordere Äquivalenz nach $\mathfrak{H}$ dasselbe besagen, d. h. dann und nur dann, wenn für jedes S aus $\mathfrak{G}$ die hintere Restklasse $S\mathfrak{H}$ mit der vorderen Restklasse $\mathfrak{H}S$ übereinstimmt.*

Ist $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist also die hintere Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ (bis auf die unbestimmte Reihenfolge der Klassen) mit der vorderen Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ identisch, und umgekehrt folgt aus der Identität beider Zerlegungen nach einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ gemäß § 2, (A), (B) auch, daß hintere und vordere Äquivalenz nach $\mathfrak{H}$ dasselbe besagen, also $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Für einen Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ brauchen wir natürlich die hintere und vordere Äquivalenz nach $\mathfrak{H}$, sowie die hinteren und vorderen Restklassen nach $\mathfrak{H}$ nicht durch die Bezeichnung „hintere" und „vordere" zu unterscheiden.

Da für eine abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ nach § 6, (3) und Satz 24 [56] hintere und vordere Äquivalenz sicher dasselbe besagen, gilt:

Satz 26. *Ist $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe, so ist jede Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.*

Um zu einer näheren Einsicht in die Bedeutung des Begriffes *Normalteiler* zu gelangen, gehen wir, zunächst ohne Zusammenhang mit Def. 19, auf eine weitere, wichtige Äquivalenzrelation der Gruppentheorie ein, die sich auf die Menge aller Teilmengen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bezieht. Es empfiehlt sich dabei zur Vereinfachung der Schreibweise und der auszuführenden Schlüsse, die obigen Bezeichnungen $S\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}S$ für die hintere bzw. vordere Kongruenzklasse von S nach $\mathfrak{H}$, d. h. für die Menge aller Elemente SA bzw. AS, wo A die Elemente von $\mathfrak{H}$ durchläuft, auf beliebige Teilmengen von $\mathfrak{G}$ zu verallgemeinern:

Definition 20. *Es seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Teilmengen der Gruppe $\mathfrak{G}$. Dann werde unter $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ diejenige Teilmenge von $\mathfrak{G}$ verstanden, die aus allen Produkten AB besteht, wo A die Elemente von $\mathfrak{M}$, B die von $\mathfrak{N}$ durchläuft.*

Aus der Gültigkeit des assoziativen Gesetzes § 6, (1) für die Multiplikation in $\mathfrak{G}$ folgt dann ohne weiteres:

Satz 27. *Die in Def. 20 erklärte „elementweise Multiplikation" in der Menge aller Teilmengen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ genügt dem assoziativen Gesetz.*

In der Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$ sind hiernach § 6, (a), (b), (1) realisiert. Dennoch ist sie, falls $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$ ist, keine Gruppe bezüglich der Verknüpfung von Def. 20. Denn ist $\mathfrak{M} = E$ und besteht $\mathfrak{N}$ aus E und $A \neq E$, so existiert keine Teilmenge $\mathfrak{L}$ derart, daß $\mathfrak{N}\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$ ist.

Nach Satz 27 hat speziell $T\mathfrak{M}S$ für beliebige T, S aus $\mathfrak{G}$ den eindeutig bestimmten Sinn $(T\mathfrak{M})S = T(\mathfrak{M}S)$, und es gilt $T'(T\mathfrak{M}S)S' = (T'T)\mathfrak{M}(SS')$, was wir im folgenden häufig benutzen werden.

Wir beweisen nun:

Satz 28. *Wird für zwei Teilmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ festgesetzt: $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{M}' = S^{-1}\mathfrak{M}S$ mit einem S aus $\mathfrak{G}$ ist, so ist das eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Es ist erfüllt: § 2, (α), weil $E^{-1}\mathfrak{M}E = \mathfrak{M}$ ist, § 2, (β), weil aus $\mathfrak{M}' = S^{-1}\mathfrak{M}S$ folgt

$$\mathfrak{M} = S\mathfrak{M}'S^{-1} = (S^{-1})^{-1}\mathfrak{M}'S^{-1},$$

§ 2, (γ), weil aus $\mathfrak{M}' = S^{-1}\mathfrak{M}S$, $\mathfrak{M}'' = T^{-1}\mathfrak{M}'T$ folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}'' = T^{-1}(S^{-1}\mathfrak{M}S)T &= (T^{-1}S^{-1})\mathfrak{M}(ST)\\ &= (ST)^{-1}\mathfrak{M}(ST).\end{aligned}$$

Die Herstellung von $\mathfrak{M}' = S^{-1}\mathfrak{M}S$ aus $\mathfrak{M}$ nennt man *Transformation von $\mathfrak{M}$ mit S.*

Auf Grund von Satz 28 definieren wir:

Definition 21. *Ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$ im Sinne von Satz 28, so heißen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$* konjugierte Teilmengen *von $\mathfrak{G}$. Die durch diese Äquivalenzrelation gelieferten Klassen in der Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{G}$ heißen die* Klassen konjugierter Teilmengen *von $\mathfrak{G}$.*

Unter diesen Klassen kommen speziell vor:

a) Die *Klassen konjugierter Elemente* von $\mathfrak{G}$, d. h. solche Klassen, die durch eine Teilmenge mit nur einem Element A aus $\mathfrak{G}$ erzeugt werden, die also aus der Gesamtheit aller Elemente $S^{-1}AS$ bestehen, wo S die Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Eine solche Klasse entspringt aus dem Einselement E und enthält kein weiteres Element. Ist $\mathfrak{G}$ abelsch, also stets $S^{-1}AS = S^{-1}SA = EA = A$, so bestehen alle Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ je nur aus einem Element; sonst muß mindestens eine solche Klasse mehr als ein Element enthalten, weil aus $AS \neq SA$ folgt $S^{-1}AS \neq A$.

b) Die *Klassen konjugierter Untergruppen* von $\mathfrak{G}$, d. h. solche Klassen, die durch eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ erzeugt werden, die also aus der Gesamtheit aller Teilmengen $S^{-1}\mathfrak{H}S$ bestehen, wo S die Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Die Bezeichnung konjugierte Untergruppen rechtfertigt sich durch den folgenden Satz:

Satz 29. *Die zu einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ konjugierten Teilmengen $S^{-1}\mathfrak{H}S$ sind wieder Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die überdies zu $\mathfrak{H}$, also auch untereinander isomorph sind.*

Beweis. a) Es ist nach Satz 27

$$(S^{-1}\mathfrak{H}S)(S^{-1}\mathfrak{H}S) = S^{-1}(\mathfrak{H}\mathfrak{H})S = S^{-1}\mathfrak{H}S,$$

da wegen der Gruppeneigenschaft § 6, (b) von $\mathfrak{H}$ und nach Satz 16 [51] offenbar $\mathfrak{H}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ ist. Diese Relation besagt nach Def. 20, daß alle Produkte von Elementen aus $S^{-1}\mathfrak{H}S$ wieder zu $S^{-1}\mathfrak{H}S$ gehören. Da ferner in $S^{-1}\mathfrak{H}S$ das Element $E = S^{-1}ES$ und mit $A' = S^{-1}AS$ auch $A'^{-1} = S^{-1}A^{-1}S$ vorkommt, weil E und mit A auch A^{-1} in $\mathfrak{H}$ enthalten ist, ist $S^{-1}\mathfrak{H}S$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ (Satz 19 [54]).

b) Ordnet man die Elemente von $\mathfrak{H}$ und $S^{-1}\mathfrak{H}S$ durch die Festsetzung $A \longleftrightarrow S^{-1}AS$ einander zu, so sind erfüllt: § 2, (δ) und § 2, (ε), weil so jedem A aus $\mathfrak{H}$ eindeutig ein Element aus $S^{-1}\mathfrak{H}S$ zugeordnet ist, § 2, (δ'), weil jedes A' aus $S^{-1}\mathfrak{H}S$ nach Definition dieser Teilmenge als $S^{-1}AS$ mit A aus $\mathfrak{H}$ darstellbar ist, und § 2, (ε'), weil aus $S^{-1}A_1S = S^{-1}A_2S$ durch vordere und hintere Multiplikation mit S bzw. S^{-1} folgt $A_1 = A_2$. Schließlich ist $(S^{-1}A_1S)(S^{-1}A_2S) = S^{-1}(A_1A_2)S$, also auch die Bedingung (2) von Satz 23 [55] erfüllt. Somit ist tatsächlich $\mathfrak{H} \cong S^{-1}\mathfrak{H}S$.

Über die Unterschiedenheit konjugierter Untergruppen beweisen wir:

Satz 30. *Zwei zur Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ konjugierte Untergruppen $S^{-1}\mathfrak{H}S$ und $T^{-1}\mathfrak{H}T$ sind sicher identisch, wenn $S \overset{(v)}{\equiv} T(\mathfrak{H})$ ist. Ist also $T_1, T_2, \ldots$ ein vollständiges vorderes Restsystem von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$, so sind höchstens die konjugierten Untergruppen*

$$T_1^{-1}\mathfrak{H}T_1, \quad T_2^{-1}\mathfrak{H}T_2, \ldots$$

voneinander verschieden, d. h. jede zu $\mathfrak{H}$ konjugierte Untergruppe $\mathfrak{G}$ ist mit einer von diesen identisch.

Beweis. Ist $S \overset{(v)}{\equiv} T(\mathfrak{H})$, also $S = AT$ mit A aus $\mathfrak{H}$, so ist $S^{-1}\mathfrak{H}S = (AT)^{-1}\mathfrak{H}(AT) = (T^{-1}A^{-1})\mathfrak{H}(AT) = T^{-1}(A^{-1}\mathfrak{H}A)T = T^{-1}\mathfrak{H}T$, weil nach Satz 16[51] offenbar $A^{-1}\mathfrak{H}A = A^{-1}(\mathfrak{H}A) = A^{-1}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$ ist.

Wir stellen jetzt den Zusammenhang der speziellen, unter a) und b) genannten Klassen konjugierter Teilmengen mit dem Begriff *Normalteiler* durch die folgenden beiden Sätze her, deren jeder auch zur Definition dieses Begriffes hätte dienen können:

Satz 31. *Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann Normalteiler von $\mathfrak{G}$, wenn sie mit allen ihren konjugierten Untergruppen identisch ist, d.h. wenn die Klasse von $\mathfrak{H}$ im Sinne von Def.* 21 *nur aus $\mathfrak{H}$ selbst besteht.*

Beweis. Die in Def. 19 vorkommenden Relationen $S\mathfrak{H} = \mathfrak{H}S$ für die Elemente S aus $\mathfrak{G}$ sind mit den Relationen $\mathfrak{H} = S^{-1}\mathfrak{H}S$ gleichbedeutend, wie sich durch vordere Multiplikation mit S^{-1} bzw. S ergibt.

Satz 32. *Eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann Normalteiler von $\mathfrak{G}$, wenn sie eine Vereinigungsmenge von Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ ist, d. h. wenn mit A stets auch alle zu A konjugierten Elemente von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$ gehören.*

Beweis. a) Ist $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, also nach Satz 31 $S^{-1}\mathfrak{H}S = \mathfrak{H}$ für alle S aus $\mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{H}$ alle Elemente $S^{-1}AS$, wo S zu $\mathfrak{G}$ und A zu $\mathfrak{H}$ gehört, d. h. mit A auch alle zu A konjugierten Elemente von $\mathfrak{G}$.

b) Ist umgekehrt letzteres der Fall, so sind $S^{-1}\mathfrak{H}S$ und $S\mathfrak{H}S^{-1}$ für jedes S aus $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}$ enthalten. Durch vordere bzw. hintere Multiplikation mit S folgt daraus, daß $\mathfrak{H}S$ in

$S\mathfrak{H}$ und $S\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}S$ enthalten ist, also $S\mathfrak{H} = \mathfrak{H}S$. Somit ist dann $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Nach Satz 31 ist eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ als Normalteiler von $\mathfrak{G}$ auch dadurch gekennzeichnet, daß $\mathfrak{H}$ bei Transformationen mit allen Elementen S aus $\mathfrak{G}$ ungeändert bleibt (vgl. die Bem. zu Satz 28); daher die weitere Bezeichnung *invariante Untergruppe* in Def. 19.

Nicht immer ist jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Man kann aber aus jeder Untergruppe nach folgendem Satz zwei Normalteiler herleiten:

Satz 33. *Ist $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so sind der Durchschnitt und das Kompositum aller zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen Normalteiler von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. a) Kommt A im Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen von $\mathfrak{G}$, d. h. in allen $S^{-1}\mathfrak{H}S$ vor, wo S die Gruppe $\mathfrak{G}$ durchläuft, so kommt $T^{-1}AT$ für jedes feste T aus $\mathfrak{G}$ in allen $T^{-1}(S^{-1}\mathfrak{H}S)T = (ST)^{-1}\mathfrak{H}(ST)$ vor. Nach Satz 16 [51] sind das für jedes feste T aus $\mathfrak{G}$ wieder alle zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Nach Satz 32 ist also $\mathfrak{D}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

b) Ist $\mathfrak{K}$ das genannte Kompositum, so enthält $\mathfrak{K}$ alle $S^{-1}\mathfrak{H}S$. Wie eben enthalten dann $T^{-1}\mathfrak{K}T$ und $T\mathfrak{K}T^{-1}$ ebenfalls alle $S^{-1}\mathfrak{H}S$, sind also solche Untergruppen von $\mathfrak{G}$, wie sie nach Def. 15 [54] zur Bestimmung von $\mathfrak{K}$ durch Durchschnittsbildung zu verwenden sind. Also ist $\mathfrak{K}$ in $T^{-1}\mathfrak{K}T$ und in $T\mathfrak{K}T^{-1}$ für jedes T aus $\mathfrak{G}$ enthalten. Daraus folgt wie im Beweis zu Satz 32 unter b), daß $\mathfrak{K}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Die wichtigste Eigenschaft der Normalteiler, die für unsere Anwendung der Gruppentheorie in **2**, § 17 von fundamentaler Bedeutung sein wird, besteht nun in dem engen Zusammenhang der Normalteiler einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den in $\mathfrak{G}$ möglichen Kongruenzrelationen. In dieser Hinsicht gelten die folgenden beiden Sätze:

Satz 34. *Ist $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist die (gleichzeitig hintere und vordere) Äquivalenz nach $\mathfrak{H}$ eine Kongruenzrelation in $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Nach Def. 19 ist $\mathfrak{H}S = S\mathfrak{H}$ für jedes S aus $\mathfrak{G}$. Daraus folgt nach Def. 20 und Satz 27

$$(1) \quad (\mathfrak{H}S)(\mathfrak{H}T) = \mathfrak{H}(S\mathfrak{H})T = \mathfrak{H}(\mathfrak{H}S)T$$
$$= (\mathfrak{H}\mathfrak{H})(ST) = \mathfrak{H}(ST).$$

Hiernach gehören alle Produkte aus Elementen zweier Restklassen $\mathfrak{H}S, \mathfrak{H}T$ nach $\mathfrak{H}$ einer und derselben Restklasse, nämlich $\mathfrak{H}(ST)$, nach $\mathfrak{H}$ an, d. h. es ist § 7, (1) für die Äquivalenz nach $\mathfrak{H}$ erfüllt.

Satz 35. *Jede Kongruenzrelation in $\mathfrak{G}$ ist mit der (gleichzeitig hinteren und vorderen) Äquivalenz nach einem bestimmten Normalteiler $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ identisch. $\mathfrak{H}$ ist die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{G}$, die dem Einselement E kongruent sind, d. h. die Restklasse, der E nach der Kongruenzrelation angehört.*

Beweis. a) Die Menge $\mathfrak{H}$ der zu E kongruenten Elemente von $\mathfrak{G}$ ist zunächst eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Denn die Bedingungen von Satz 19 [54] (vgl. die an ihn geknüpfte Bemerkung) sind erfüllt, erstens weil aus $E \equiv A, E \equiv B$ nach (1) in Def. 16 [55] folgt $E \equiv AB$, zweitens weil $E \equiv E$ ist, drittens weil aus $E \equiv A, A^{-1} \equiv A^{-1}$ nach (1) in Def. 16 folgt $A^{-1} \equiv E$.

b) Wenn $A \equiv B$, also nach (1) in Def. 16 $AB^{-1} \equiv E$ und $B^{-1}A \equiv E$ ist, so ist nach Satz 24 [56] $A \overset{(v)}{\equiv} B(\mathfrak{H})$ und $A \overset{(h)}{\equiv} B(\mathfrak{H})$, und umgekehrt folgt aus jeder dieser Relationen nach (1) in Def. 16 $A \equiv B$. Hintere und vordere Äquivalenz nach der Untergruppe $\mathfrak{H}$ stimmen also beide mit unserer Kongruenz, d. h. auch untereinander überein, was die Behauptungen ergibt.

Nach den letzten beiden Sätzen gibt es in einer Gruppe $\mathfrak{G}$ keine anderen Kongruenzrelationen als die Äquivalenzrelationen im Sinne von Def. 18 [56] nach Normalteilern $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$. Insbesondere sind die letztgenannten Äquivalenzrelationen keine Kongruenzrelationen, wenn $\mathfrak{H}$ kein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist.

Wir können jetzt das Resultat von Satz 22 [55] auch so aussprechen:

Satz 36. *Ist $\mathfrak{H}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so bilden die (gleichzeitig hinteren und vorderen) Restklassen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ bei* *elementweiser Multiplikation eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, die Restklassengruppe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$. Man nennt $\overline{\mathfrak{G}}$ auch die* Faktorgruppe *von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ und schreibt $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.*

Das Rechnen mit den Elementen $\mathfrak{H}S, \mathfrak{H}T, \ldots$ der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ hat nach der Regel (1) zu geschehen. Für endliches $\mathfrak{G}$ ist nach Satz 25 [57] $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ von der durch den Index von $\mathfrak{H}$ bestimmten Ordnung. Schließlich gilt ersichtlich:

Satz 37. *Ist $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe und $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ abelsch.*

Beispiele

1. Die unechten Untergruppen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ sind stets Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Für die Faktorgruppen gilt $\mathfrak{G}/\mathfrak{E} \cong \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G} \cong \mathfrak{E}$.

2. Für die in §§ 6, 7, Beispiel 4 behandelte Gruppe $\mathfrak{G}$ sind, wie schon aus dem in § 8, Beispiel 2 über $\mathfrak{G}$ Gesagten hervorgeht, die Untergruppen $\mathfrak{H}_0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ zueinander konjugiert und keine Normalteiler, während die Untergruppe $\mathfrak{N}$ Normalteiler ist. Man erkennt das auch durch Bildung der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$, die sich, wie aus den Formeln von § 6, Beispiel 4 leicht zu entnehmen ist, folgendermaßen zusammensetzen:

$$\text{a) } E; \qquad \text{b) } A, \quad A^2 = B^{-1}AB,$$
$$\text{c) } B, \quad BA = A^{-2}BA^2, \quad BA^2 = A^{-1}BA.$$

Hiernach wird die Klasse der zu $\mathfrak{H}_0$ konjugierten:

$$\mathfrak{H}_0, \quad \mathfrak{H}_1 = A^{-2}\mathfrak{H}_0A^2, \quad \mathfrak{H}_2 = A^{-1}\mathfrak{H}_0A,$$

während $\mathfrak{N}$ die Vereinigungsmenge der Klassen a) und b) ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist abelsch von der Ordnung 2 (vgl. § 6, Beispiel 3).

3. Die abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ der rationalen Zahlen $\neq 0$ bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation besitzt z. B. als Untergruppen die Gruppe $\mathfrak{P}$ der positiven rationalen Zahlen und die Gruppe $\mathfrak{U}$ derjenigen rationalen Zahlen, die sich als Quotienten ungerader ganzer Zahlen darstellen lassen. Es gelten offenbar folgende Zerlegungen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{P} + (-1)\,\mathfrak{P}, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{U} + 2\mathfrak{U} + 2^2\,\mathfrak{U} + \cdots$$
$$+ 2^{-1}\,\mathfrak{U} + 2^{-2}\,\mathfrak{U} + \cdots,$$

so daß also $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ endlich von der Ordnung 2, $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ unendlich ist[1]).

4. Die abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen bezüglich der gewöhnlichen Addition besitzt z. B. die Untergruppe $\mathfrak{H}$ aller geraden Zahlen. Es gilt die Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + 1\mathfrak{H},$$

so daß also $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ wieder endlich von der Ordnung 2 ist[2]). Wir kommen in **2**, § 2 ausführlich auf diese und analog gebildete Untergruppen von $\mathfrak{G}$, sowie deren Faktorgruppen zu sprechen.

III. Determinantenfreie lineare Algebra

§ 10. Linearformen, Vektoren, Matrizen

Es sei K ein beliebiger Körper, der *Grundkörper*, in dem wir *lineare Algebra* im Sinne von § 5, 1) [46] treiben wollen, und den wir für den Rest von **1** fest zugrunde legen.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise verabreden wir, daß in III und IV alle mit a, b, c, α, β, γ und evtl. angehängten Indizes bezeichneten Elemente solche aus K sein sollen, ohne daß dies immer ausdrücklich gesagt wird. Ebenso sollen $x_1, \ldots, x_n$, wenn zum Funktionsbegriff i. S. d. An. übergegangen wird, Elemente aus K sein.

Ehe wir uns der eigentlichen Aufgabe, wie sie in § 5, 1) formuliert ist, zuwenden, sollen in diesem Paragraphen einige Begriffe eingeführt werden, die zwar an sich entbehrlich wären, durch deren Verwendung sich aber die folgenden Entwicklungen in der Schreib- und Redeweise außerordentlich vereinfachen.

a) Linearformen

Zunächst führen wir für ganze rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, wie sie auf den linken Seiten des zu behandelnden

---

[1]) Bezüglich $\mathfrak{U}$ ist hier der auf die Primzahl 2 bezüglicheTeil des Fundamentalsatzes der Arithmetik von der eindeutigen Zerlegbarkeit der rationalen Zahlen in Primzahlpotenzen vorausgesetzt, den wir in **2**, § 1 systematisch behandeln werden.

[2]) Hierbei ist der auf die Primzahl 2 bezügliche Fall des Satzes 13 von **2**, § 1 vorausgesetzt, daß sich nämlich jede ganze Zahl g eindeutig in die Form $g = 2q + r$ setzen läßt, wo q und r ganze Zahlen sind und $0 \leqq r < 2$ ist. $\mathfrak{H}$ besteht dann aus den g mit $r = 0$, $1\mathfrak{H}$ aus den g mit $r = 1$. — Natürlich bedeutet $1\mathfrak{H}$ hier, daß 1 zu den Elementen von $\mathfrak{H}$ zu addieren ist.

Gleichungssystems § 5, (1) auftreten, eine besondere Benennung ein:

Definition 22. *Ein Element von* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *dessen Normaldarstellung* $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ *ist, heißt eine* Linearform *von* $x_1, \ldots, x_n$ *oder auch* linear *und* homogen *in* $x_1, \ldots, x_n$.

Die Bedeutung von *linear* wurde schon in § 5 bei (1) erklärt, *Form* oder *homogen* soll besagen, daß auch der in Satz 11 [31] mit $a_{0, \ldots, 0}$ bezeichnete Koeffizient der Normaldarstellung Null ist. — Unter *Linearform* schlechthin verstehen wir, wo nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, stets eine solche der n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$.

Von großer Wichtigkeit für alles weitere sind nun die beiden folgenden Definitionen:

Definition 23. *Eine Linearform* f *heißt* lineares Kompositum *oder* linear abhängig von *den Linearformen* $f_1, \ldots, f_m$, *wenn* $c_1, \ldots, c_m$ *derart existieren, daß* $f = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ *ist. Anderenfalls heißt* f linear unabhängig von $f_1, \ldots, f_m$.

Die Nullform $0 \equiv \sum_{k=1}^{n} 0 x_k$ ist hiernach sicher lineares Kompositum jedes Systems $f_1, \ldots, f_m$ von Linearformen, indem $c_1, \ldots, c_m = 0$ gewählt werden. Dies berücksichtigend definieren wir weiter:

Definition 24. *Die Linearformen* $f_1, \ldots, f_m$ *heißen* linear abhängig, *wenn* $c_1, \ldots, c_m$, *die nicht sämtlich Null sind, derart existieren, daß* $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i = 0$ *ist. Anderenfalls heißen* $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig.

Hiernach ist speziell ($m = 1$) jede Linearform $f \neq 0$ linear unabhängig, während die Form 0 linear abhängig ist.

Die beiden in Def. 23 und 24 eingeführten, wohl zu unterscheidenden Begriffe *linear (un-)abhängig von* und *linear (un-)abhängig* stehen nun in folgenden Relationen zueinander, deren einfacher Beweis dem Leser überlassen bleiben darf[1]):

Satz 38. a) *Ist f von $f_1, \ldots, f_m$ linear abhängig, so sind $f, f_1, \ldots, f_m$ linear abhängig.*

b) *Ist f von $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig und sind $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig, so sind $f, f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig.*

a′) *Sind $f, f_1, \ldots, f_m$ linear abhängig, und zwar so, daß f in einer Relation $cf + c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m = 0$ einen Koeffizienten $c \neq 0$ hat (was speziell der Fall ist, wenn $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig sind), so ist f von $f_1, \ldots, f_m$ linear abhängig.*

b′) *Sind $f, f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig, so ist f von $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig, und es sind auch $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig.*

Aus b′) ergeben sich durch wiederholte Anwendung die beiden einander bedingenden Tatsachen:

Satz 39. *Mit $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1} \ldots, f_{m+l}$ sind auch $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig. Mit $f_1, \ldots, f_m$ sind auch $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+l}$ linear abhängig.*

In gewisser Analogie dazu gelten die folgenden beiden einander bedingenden Tatsachen:

Satz 40. *Es sei* $f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \; g_i = \sum_{k=1}^{n+l} a_{ik} x_k \quad (i = 1, \ldots, m).$ *Dann sind mit $f_1, \ldots, f_m$ auch $g_1, \ldots, g_m$ linear unabhängig und mit $g_1, \ldots, g_m$ auch $f_1, \ldots, f_m$ linear abhängig.*

Beweis. Es sei $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathsf{K}_n$. Dann sind die g_i solche Elemente (linear, aber keine Formen!) aus $\mathsf{K}_n[x_{n+1}, \ldots, x_{n+l}]$, deren Funktionswerte für das System $(0, \ldots, 0)$ der Unbestimmten $x_{n+1}, \ldots, x_{n+l}$ die Elemente f_i aus K_n sind. Nach dem Einsetzungsprinzip [39] folgt also aus einer Relation $\sum_{i=1}^{m} c_i g_i = 0$ auch die Relation $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i = 0$ für die Funktionswerte.

[1]) Man mache sich vor allem klar, daß dazu die Körpereigenschaft [§ 1, (7)] wesentlich benutzt wird, so daß schon diese für das Folgende grundlegenden Tatsachen in Integritätsbereichen nicht allgemein richtig sind. (Vgl. Punkt 2 in der Anm. 1 [46] zu § 5.)

Wir untersuchen nun im Anschluß an Satz 38, b) die Frage, ob man zu m linear unabhängigen Linearformen $f_1, \ldots, f_m$ stets noch eine weitere von ihnen linear unabhängige Linearform f_{m+1} finden kann, so daß also auch noch $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}$ linear unabhängig sind. Dieses ist nicht unbegrenzt möglich; vielmehr gilt:

Satz 41. *Es gibt höchstens n linear unabhängige Linearformen von n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$; oder also: Mehr als n Linearformen von n Unbestimmten sind stets linear abhängig.*

Beweis. Nach Satz 39 genügt es zu zeigen, daß $n+1$ Linearformen von n Unbestimmten stets linear abhängig sind. Diesen Nachweis führen wir durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Denn ist $f' = a' x$, $f'' = a'' x$, so sind entweder $f' = 0$ und $f'' = 0$, oder es besteht die Beziehung $a'' f' - a' f'' = 0$ mit $a' \neq 0$ oder $a'' \neq 0$; und in beiden Fällen sind f', f'' linear abhängig.

Wir nehmen nunmehr an, daß je n (oder mehr) Linearformen von $n-1$ Unbestimmten stets linear abhängig sind, und zeigen, daß dann auch $n+1$ vorgelegte Linearformen von n Unbestimmten

$$f_i \equiv a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

linear abhängig sind. Dazu bilden wir durch formales Einsetzen des Wertes $x_n = 0$ die $n+1$ Linearformen

$$g_i \equiv a_{i1} x_1 + \cdots + a_{i,\,n-1} x_{n-1} \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

von den $n-1$ Unbestimmten $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Nach der Induktionsannahme sind sie linear abhängig, d. h. es besteht eine Beziehung

$$g' = c_1' g_1 + \cdots + c_{n+1}' g_{n+1} = 0,$$

in der nicht alle $c_i' = 0$ sind und daher ohne Einschränkung $c_{n+1}' \neq 0$ angenommen werden kann. Weiter sind nach der Induktionsannahme aber auch schon die n Linearformen $g_1, \ldots, g_n$ linear abhängig, d. h. es besteht eine weitere Beziehung

$$g'' = c_1'' g_1 + \cdots + c_n'' g_n = 0,$$

in der ebenfalls nicht alle $c_i'' = 0$ sind. Wir bilden nun mit den so bestimmten c_i' bzw. c_i'' die entsprechenden linearen Komposita der f_i, d. h. die beiden Linearformen von n Unbestimmten

$$f' = c_1' f_1 + \cdots + c_n' f_n + c_{n+1}' f_{n+1},$$
$$f'' = c_1'' f_1 + \cdots + c_n'' f_n,$$

so daß also die beiden Linearformen $g' = 0$, $g'' = 0$ durch Einsetzen des Wertes $x_n = 0$ aus f', f'' hervorgehen. Aus diesem Grunde haben diese die besondere Gestalt

$$f' = a' x_n, \quad f'' = a'' x_n.$$

Ist hierin $a'' = 0$, also $f'' = 0$, so sind schon $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig, da ja nicht alle $c_i'' = 0$ sind. Ist aber $a'' \neq 0$, so entnehmen wir aus

$$a'' f' - a' f'' = 0,$$

also

$$(a'' c_1' - a' c_1'') f_1 + \cdots + (a'' c_n' - a' c_n'') f_n + a'' c_{n+1}' f_{n+1} = 0$$

wegen $a'' \neq 0$, $c_{n+1}' \neq 0$, daß $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ linear abhängig sind.

Daß es wirklich n linear unabhängige Linearformen von n Unbestimmten gibt, zeigt das spezielle System der n Linearformen $x_1, \ldots, x_n$; denn wegen der Eindeutigkeit in Satz 11 [31] ist nur dann $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$, wenn $c_1, \ldots, c_n = 0$ sind.

Nach Satz 41 gibt es in jeder (endlichen oder unendlichen) Menge von Linearformen unter den linear unabhängigen Teilsystemen $f_1, \ldots, f_s$ solche von maximaler Anzahl r, und zwar ist dabei $r \leqq n$. Von besonderer Wichtigkeit werden nun Linearformenmengen mit der in folgender Definition geforderten Eigenschaft sein:

Definition 25. *Eine Linearformenmenge* M, *die mit irgendwelchen Linearformen immer auch alle deren lineare Komposita enthält, heißt ein* Linearformenmodul.

Die Maximalanzahl r *linear unabhängiger Linearformen aus* M *heißt der* Rang *von* M.

Ein linear unabhängiges Teilsystem $f_1, \ldots, f_s$ aus M, *von dem* alle *Linearformen aus* M *linear abhängig sind, so daß also* M *aus der Gesamtheit aller linearen Komposita von $f_1, \ldots, f_s$ besteht, heißt eine* Basis *von* M.

Solche Teilsysteme gibt es wirklich immer. Nach Satz 38, a') gilt nämlich:

Satz 42. *Ein linear unabhängiges Teilsystem $f_1, \ldots, f_r$ aus* M *von der maximalen Anzahl r ist auch eine Basis von* M.

Wir werden gleich sehen, daß auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist. Zuvor beweisen wir:

Satz 43. *Die Menge* M *aller linearen Komposita gegebener m Linearformen $f_1, \ldots, f_m$ von n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ bildet einen Linearformenmodul; man sagt kurz, $f_1, \ldots, f_m$* erzeugen *den Modul* M. *Der Rang r von* M *genügt neben der nach Satz* 41 *bestehenden Ungleichung $r \leqq n$ auch noch der Ungleichung $r \leqq m$.*

Beweis. a) Das Erfülltsein der in Def. 25 geforderten Eigenschaft erkennt man folgendermaßen: Aus $g_k = \sum_{i=1}^{m} c_{ki} f_i$ $(k = 1, \ldots, l)$ und $g = \sum_{k=1}^{l} b_k g_k$ folgt

$$g = \sum_{k=1}^{l} \left[b_k \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ki} f_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{k=1}^{l} b_k c_{ki} \right) f_i \right].$$

Die dabei verwendete Regel über die Vertauschung der Summationsfolge, die auf die Additionsgesetze § 1, (1), (3), (5) zurückgeht, werden wir im folgenden häufig anzuwenden haben. Wegen ihrer Gültigkeit dürfen wir ohne Mißverständnis die Klammern bei derartigen Umformungen fortlassen.

b) Zum Nachweis der Ungleichung $r \leqq m$ ordnen wir jedem Linearformensystem

$$g_k = \sum_{i=1}^{m} c_{ki} f_i \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

aus M das Linearformensystem

$$h_k = \sum_{i=1}^{m} c_{ki} y_i \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

von m neuen Unbestimmten $y_1, \ldots, y_m$ zu. Für $l > m$ sind die h_k nach Satz 41 linear abhängig, d. h. es besteht eine Beziehung

$$\sum_{k=1}^{l} b_k h_k = 0,$$

in der nicht alle $b_k = 0$ sind. Nach dem Einsetzungsprinzip, angewandt im Integritätsbereich $\mathsf{K}_n[y_1, \ldots, y_m]$ über $\mathsf{K}_n = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit Ersetzung der y_i durch die f_i, folgt daraus die entsprechende Beziehung

$$\sum_{k=1}^{l} b_k g_k = 0,$$

also die lineare Abhängigkeit der g_k für $l > m$, d. h. die Behauptung $r \leqq m$.

Nunmehr können wir die angekündigte Umkehrung von Satz 42 folgern:

Satz 44. *Jede Basis eines Linearformenmoduls* M *vom Rang* r *besteht aus genau* r *Linearformen* $f_1, \ldots, f_r$, *ist also auch ein linear unabhängiges Teilsystem aus* M *von der maximalen Anzahl* r.

Beweis. Für eine Basis $f_1, \ldots, f_s$ von M ist einerseits nach Def. 25 jedenfalls $s \leqq r$, andererseits nach Satz 43 auch $r \leqq s$, zusammengenommen also $s = r$.

Eine Basis von M ist nach Satz 38, a) ein maximales linear unabhängiges Teilsystem in dem Sinne, daß bei Hinzufügung irgendeiner weiteren Linearform aus M ein linear abhängiges Teilsystem entsteht. Da wir durch Satz 43 festgestellt haben, daß diese schwächere Maximalität die stärkere Maximalität der Anzahl nach zur Folge hat, können wir fortan bei einer Basis von M unmißverständlich auch von einem *Maximalsystem linear unabhängiger Linearformen* aus M reden.

Wir heben weiter im Anschluß an Def. 25 und Satz 44 die folgende wichtige Tatsache hervor:

Satz 45. *Die lineare Komposition der Linearformen eines Linearformenmoduls* M *durch eine Basis von* M *ist jeweils nur auf eine einzige Art möglich.*

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folge aus (und ersichtlich sogar gleichbedeutend mit) der linearen Unabhängigkeit einer Basis $f_1, \ldots, f_r$ von M. Aus $\sum_{i=1}^{r} c_i f_i = \sum_{i=1}^{r} c_i' f_i$, d. h. $\sum_{i=1}^{r} (c_i - c_i') f_i = 0$ folgt nämlich nach Def. 24 gerade $c_i - c_i' = 0$, d. h. $c_i = c_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Wir bemerken schließlich, daß wir im trivialen Falle des nur aus der Nullform bestehenden Linearformenmoduls $\mathsf{M} = 0$ gemäß Def. 25 auch $r = 0$ zu verstehen haben. Eine Basis von M existiert in diesem Falle nicht; zur Vereinheitlichung der Ausdrucksweise wollen wir dann sagen, M besitze eine Basis aus $r = 0$ Linearformen.

b) Vektoren

Nach der bei der Konstruktion von $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ aus K in § 4, c) und d) zugrunde gelegten Auffassung sind speziell Linearformen $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ formal nichts anderes, als Systeme $(a_1, \ldots, a_n)$ von Elementen, die den sich aus § 4, (1a)–(3a) ergebenden Unterscheidungs- und Verknüpfungsregeln unterworfen sind, und wobei für die speziellen Systeme $(e, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, e)$ die abkürzenden Bezeichnungen $x_1, \ldots, x_n$ eingeführt sind. Ohne Einführung dieser Bezeichnungen lauten die Gesetze § 4, (1a)—(3a), soweit sie sich auf die jetzt allein zu betrachtenden Linearformen und auf Elemente des Grundkörpers beziehen, folgendermaßen:

(1) $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1', \ldots, a_n')$ dann und nur dann, wenn $a_k = a_k'$ für $k = 1, \ldots, n$,

(2) $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$,

(3) $a(a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n)$.

Nun hat man es in der linearen Algebra außer mit den Koeffizientensystemen von Linearformen auch mit Systemen von n Elementen des Grundkörpers zu tun, die für die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ in Linearformen einzusetzen sind, und hat dann diese Elementsysteme häufig nach (1) zu unterscheiden, sowie die rechts in (2) und (3) stehenden Bildungen aus ihnen vorzunehmen. Man könnte das zwar nach dem eben Bemerkten so ausdrücken, daß man jene einzusetzenden Elementsysteme als Koeffizientensysteme von Linearformen ansieht, sie demgemäß wie diese Linearformen unterscheidet und die in (2) und (3) rechts stehenden Bildungen für sie durch die links stehenden Verknüpfungen mit diesen Linearformen zur Ausführung bringt. Die hierbei zu verwendende Ausdrucksweise würde aber sehr umständlich werden; sie ist überdies auch insofern unschön, als man bei dem Ausdruck Linearform gewohnheitsmäßig an die Möglichkeit der Ersetzung der Unbestimmten durch Elemente des Grundkörpers denkt, wovon bei den letztgenannten „Hilfslinearformen“ natürlich nicht die Rede ist. Es ist daher zweckmäßiger, für die Anwendung der formalen Regeln (1)—(3) auf andere Art eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen.

Definition 26. *Den Unterscheidungs- und Verknüpfungsregeln* (1)—(3) *unterworfene Systeme von n Elementen heißen* n-gliedrige Vektoren. *Wir bezeichnen sie mit den ihren Gliedern entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben.*

Es wird also z. B. bezeichnet: $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $\mathfrak{a}$, $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ mit $\mathfrak{a}_i$, usw. Unter *Vektoren* schlechthin verstehen wir, wo nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, stets n-gliedrige.

Durch (2) ist natürlich zwangsläufig auch die Substraktion für Vektoren unbeschränkt und eindeutig erklärt, und zwar nach der zu (2) analogen Formel

$$(a_1, \ldots, a_n) - (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n),$$

entweder weil für die Verknüpfung (2) die Gesetze § 1, (1), (3), (6) stimmen, oder einfach vermöge der formalen Identität mit den Linearformen. Der hiernach sich als *Nullvektor* ergebende, der Nullform entsprechende Vektor $(0, \ldots, 0)$ darf wieder mit 0 bezeichnet werden.

Auf Grund der formalen Übereinstimmung von Vektoren und Linearformen sind die in Def. 23—25 eingeführten Begriffe sinngemäß auch für Vektoren als erklärt anzusehen, und es bestehen dann auch die Analoga der Sätze 38—45 in sinngemäßer Formulierung für Vektoren.

Ausführlich geschrieben bedeuten nach Def. 23, 24 die Aussagen „$\mathfrak{a}$ ist von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ linear abhängig“ bzw. „$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ sind linear abhängig“ das Bestehen von Relationen

$$(4) \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} = a_k \quad \text{bzw.} \quad (5) \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} = 0 \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n,$$

wobei in den letzteren mindestens ein $c_i \neq 0$ ist.

Die speziellen n linear unabhängigen Vektoren $(e, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, (0, \ldots, 0, e)$, die den Linearformen $x_1, \ldots, x_n$ entsprechen, nennt man auch die n *Einheitsvektoren* und bezeichnet sie mit $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$. Sie bilden eine Basis des Moduls aller n-gliedrigen Vektoren (der somit den Rang n hat); denn es besteht für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ die Darstellung $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{e}_k$ durch diese Einheitsvektoren. Durch Einführung dieser Darstellungen kommt man natürlich (bis auf den Bezeichnungsunterschied zwischen $\mathfrak{e}_k$ und x_k) auf den Linearformenstandpunkt zurück.

Während die bisherigen Festsetzungen über Vektoren formal mit denen über Linearformen übereinstimmen, treffen wir schließlich eine letzte Festsetzung, die über den Linearformenstandpunkt hinausgeht:

Definition 27. *Unter dem* inneren Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *zweier Vektoren* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *werde das Element* $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ *verstanden.*

Im Gegensatz zu (3) sind also beim inneren Produkt beide Faktoren Vektoren, während das Ergebnis dieser inneren Produktbildung kein Vektor, sondern ein Element des Grundkörpers ist. — Speziell gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{e}_k = a_k$, $\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_{k'} = \begin{Bmatrix} e \text{ für } k = k' \\ 0 \text{ für } k \neq k' \end{Bmatrix}$, $\mathfrak{a}0 = 0$.

Satz 46. *Für die innere Produktbildung von Vektoren gelten die Regeln:*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}, \; c(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (c\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(c\mathfrak{b}), \; (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Beweis. Das folgt nach Def. 26, 27 unmittelbar aus den Gesetzen § 1, (1)—(5).

Natürlich folgt aus der letzten dieser Regeln durch wiederholte Anwendung noch die allgemeinere Formel

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i\right) \mathfrak{c} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i \mathfrak{c},$$

die ausführlich geschrieben in $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}c_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_k$, d.h. in die im Beweis von Satz 43 erwähnte Regel von der Vertauschung der Summationsfolge, übergeht und von der wir hauptsächlich Gebrauch zu machen haben werden (Satz 47).

Da von der Körpereigenschaft [§ 1, (7)] des Grundbereichs K beim inneren Produkt kein Gebrauch gemacht ist, gelten die letzten Entwicklungen auch für Vektoren des Integritätsbereiches $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$[1]). Von solchen Vektoren brauchen wir lediglich den Vektor $\mathfrak{x}$ der Unbestimmten.

Wir bezeichnen unter Verwendung dieses Vektors eine Linearform $f(x_1, \ldots, x_n)$ auch mit $f(\mathfrak{x})$ und treffen bezüglich der Möglichkeit, $\mathfrak{x}$ auch als Vektor des Grundbereichs aufzufassen, sowie der hierauf bezüglichen Zeichen $\equiv$ und $=$ die entsprechenden Festsetzungen wie im Anschluß an Satz 12 [41].

Nach Def. 27 besteht für jede Linearform $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ auch die Darstellung $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ als inneres Produkt. Diese Darstellung führt auf Grund der Formeln des Satzes 46 zu einer außerordentlich einfachen Gestaltung des Rechnens mit den Funktionswerten einer Linearform. Wir heben insbesondere, im Anschluß an die Bemerkung hinter Satz 46, folgende Tatsache hervor:

Satz 47. *Ist $f(\mathfrak{x})$ eine Linearform, so gilt für ein lineares Kompositum $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{x}_i$ von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ die Formel*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i f(\mathfrak{x}_i),$$

d.h. der Funktionswert von f für ein lineares Kompositum von m Vektoren ist das entsprechende lineare Kompositum der m Funktionswerte für jene Vektoren.

Beweis. Ist $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$, so ist nach Satz 46

[1]) Solchen Vektoren würden dann Linearformen $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des Integritätsbereiches $\mathsf{K}_n[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ über $\mathsf{K}_n = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ entsprechen; wir brauchen jedoch für unsere Zwecke diese Auffassung nicht (vgl. die Ausführungen vor Def. 26).

$$\mathfrak{f}(\sum_{i=1}^{m} c_i\mathfrak{x}_i) = \mathfrak{a}(\sum_{i=1}^{m} c_i\mathfrak{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{a}(c_i\mathfrak{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i\mathfrak{f}(\mathfrak{x}_i).$$

An Tatsachen und Rechnungen, wie sie in Satz 47 und seinem Beweise vorkommen, wurde bei den Ausführungen vor Def. 26 vornehmlich gedacht. Im Hinblick auf Satz 47 liegt die Zweckmäßigkeit der Einführung der Vektoren auf der Hand.

Wir heben schließlich, anschließend an die Ausführungen des § 4 noch hervor, daß für Linearformen der formale Funktionsbegriff der Algebra mit dem Funktionsbegriff i. S. d. An. zusammenfällt. Auf Grund des nachstehenden Satzes ist nämlich die fragliche Bedingung § 2, (ε') beim Übergang zu den Linearformen i. S. d. An. erfüllt:

Satz 48. *Für Linearformen $\mathfrak{f}$ und g über* K *ist die Relation*

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv g(\mathfrak{x})$$

mit der Relation

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) \text{ für alle } \mathfrak{x} \text{ aus } \mathsf{K}$$

gleichbedeutend.

Beweis. a) Daß aus der ersten Relation die letztere folgt, ist klar.

b) Ist $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x}$ aus K, so ist speziell $\mathfrak{f}(\mathfrak{e}_k) = g(\mathfrak{e}_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Da nun, wenn $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ ist, gilt $\mathfrak{f}(\mathfrak{e}_k) = \mathfrak{a}\mathfrak{e}_k = a_k$, folgt das Übereinstimmen entsprechender Koeffizienten von $\mathfrak{f}$ und g, d. h. $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \equiv g(\mathfrak{x})$.

c) Matrizen

In den Koeffizientensystemen auf den linken Seiten linearer Gleichungssysteme treten uns Systeme von m n-gliedrigen Vektoren entgegen, die wir zu einem (mn)-gliedrigen Vektor zusammengefaßt denken können. Diesen (mn)-gliedrigen Vektor können wir uns auch aus den n m-gliedrigen Vektoren, die je durch die Koeffizienten einer festen Unbestimmten gebildet werden, durch andersartige Zusammenfassung entstanden denken. Es empfiehlt sich für diese beiden Zusammenfassungsprozesse, sowie umgekehrt für die Zerlegung eines (mn)-gliedrigen Vektors auf eine dieser beiden Weisen eine besondere Ausdrucksweise einzuführen. Wir definieren in diesem Sinne:

Definition 28. *Ein (mn)-gliedriger Vektor, insofern er als durch Zusammenfassung von m n-gliedrigen bzw. n m-gliedrigen Vektoren in ein rechteckiges Schema*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots\dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \textit{kurz } (a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{pmatrix},$$

*entstanden gedacht wird, heißt eine (m,n)-*reihige Matrix. *Die waagerechten bzw. senkrechten zusammensetzenden Vektoren heißen die* Zeilen *bzw.* Spalten *der Matrix. Wir bezeichnen Matrizen auch durch die ihren Gliedern entsprechenden großen Buchstaben.*

Es wird also z. B. bezeichnet: (a_{ik}) mit A, $(\mathfrak{a}_{ik})$ mit $\mathsf{A}, \dots$; die dem (mn)-gliedrigen Nullvektor entsprechende (m, n)-reihige *Nullmatrix* darf wieder mit 0 bezeichnet werden. — Den Zusatz (m, n)-reihig lassen wir auch fort, wo die Zahlen m und n aus dem Zusammenhang hervorgehen.

Der Begriff (m, n)-reihige Matrix ist gemäß Def. 28 enger als der Begriff (mn)-gliedriger Vektor, etwa in demselben Sinne, wie „die in Faktoren zerlegte ganze Zahl $l = mn$" ein engerer Begriff als „die ganze Zahl l" ist. Die Unterscheidungs- und Verknüpfungsregeln für Matrizen, nämlich analog zu (1), (2), (3)

$$\left.\begin{array}{ll} (1') & (a_{ik}) = (a'_{ik}) \text{ dann und nur dann, wenn } a_{ik} = a'_{ik} \\ (2') & (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) \\ (3') & a(a_{ik}) = (a a_{ik}) \end{array}\right\} \begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{pmatrix},$$

lassen das allerdings nicht hervortreten. Die Einengung liegt vielmehr in dem dem (mn)-gliedrigen Vektor übergelegten rechteckigen Schema, durch das eine begriffliche Zusammenfassung je der in einer Zeile bzw. Spalte stehenden Glieder gefordert wird.

Es ist allgemein üblich, den Index i immer für die Numerierung der Zeilen, k für die der Spalten zu verwenden. Demgemäß wäre bei vorgelegtem (m, n)-reihigen (a_{ik}) unter (a_{ki}) die durch Vertauschung der Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-reihige Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zu verstehen; denn in dieser numeriert eben der erste Index die Spalten, der zweite die Zeilen.

Definition 29. *Die aus einer (m, n)-reihigen Matrix (a_{ik}) durch Vertauschung ihrer Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-reihige Matrix (a_{ki}) heißt die* transponierte *zu (a_{ik}). Bei Verwendung der Bezeichnung A für (a_{ik}) wird (a_{ki}) mit A' bezeichnet.*

Außer den Verknüpfungen (2′) und (3′) benutzt man im sog. Matrizenkalkül noch eine weitere, außerordentlich wichtige Verknüpfung zweier Matrizen zu einer neuen Matrix, dem sog. *Matrizenprodukt*, das sich aber erst innerhalb der Menge aller Matrizen (nicht nur der mit festem m und n) erklären läßt. Diese Matrizenproduktbildung enthält zwar die innere Produktbildung für Vektoren als Spezialfall[1]), läuft aber nicht einfach auf das innere Produkt der den Matrizen entsprechenden Vektoren hinaus. Wenn auch der so zustande kommende sog. Matrizenkalkül von größter Bedeutung für die lineare Algebra ist, insbesondere in noch viel weiterem Maße als die Vektorschreibweise zur Übersichtlichkeit der Entwicklungen und Resultate der linearen Algebra beiträgt, müssen wir doch im begrenzten Rahmen unserer Darstellung von einem weiteren Eingehen darauf absehen und auf umfangreichere Werke verweisen[2]).

§ 11. Inhomogene und homogene lineare Gleichungssysteme

Wir beginnen jetzt mit der systematischen Behandlung der in § 5, (1) formulierten Aufgabe. Neben dem eigentlich zu untersuchenden linearen Gleichungssystem

$$\text{(J)} \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \doteq a_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

betrachten wir selbständig das lineare Gleichungssystem

[1]) Vom Standpunkte des Matrizenproduktes sind die beiden Faktoren des inneren Vektorproduktes eine $(1, n)$-reihige und eine $(n, 1)$-reihige Matrix und das Ergebnis eine $(1, 1)$-reihige Matrix, also formal, aber nicht begrifflich ein Element des Grundkörpers.

[2]) Z. B. Lit.-Verz. 2—10, 13, 14, 16, 17, 20, 23. Siehe auch **3**, 1, § 10, Aufg. 3, sowie zahlreiche weitere Aufgaben zu den nachfolgenden Paragraphen von **1** und **2**.

$$\text{(H)} \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \doteq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Man nennt (H) das (J) *zugeordnete homogene Gleichungssystem*, während (J) *inhomogen* heißt.

In dieser gegensätzlichen Benennung von (J) und (H) ist schon zum Ausdruck gebracht, daß wir (H) nicht, wie es zunächst naturgemäß zu sein scheint, als den formal mit (H) identischen Spezialfall von (J), wo alle $a_i = 0$ sind, ansehen wollen. Wir treffen vielmehr mit Rücksicht auf eine glatte Formulierung der herzuleitenden Resultate die (H) von diesem Spezialfall von (J) methodisch unterscheidende Festsetzung, daß der stets eine Lösung von (H) bildende Nullvektor $\mathfrak{x} = 0$ (die sog. *identische Lösung*) nicht als Lösung von (H) gerechnet werden soll. Speziell wird also (H) *unlösbar* genannt, wenn außer dem Nullvektor keine Lösung existiert. Dagegen sehen wir den Nullvektor sehr wohl als Lösung für den genannten Spezialfall von (J) an.

Unter der *Matrix von* (J) *und* (H) verstehen wir die (m, n)-reihige Matrix $A = (a_{ik})$.

Mittels der in § 10 entwickelten Begriffe läßt sich das Bestehen von (J) bzw. (H) für ein System $x_1, \ldots, x_n$ auch so ausdrücken, daß die Spalten von A durch lineare Komposition mit den Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ den durch die rechten Seiten von (J) gebildeten Vektor $\mathfrak{a}$ bzw. den Nullvektor ergeben. Nach obiger Verabredung ist also insbesondere die Lösbarkeit von (H) mit der linearen Abhängigkeit der Spalten von A gleichbedeutend. (Vgl. die Formeln § 10, (4), (5) [75], die sich allerdings in diesem Sinne auf die Gleichungssysteme mit der Matrix A' beziehen.) Die Aufgabe der linearen Algebra § 5, (1) kann demnach auch dahin formuliert werden, daß alle Möglichkeiten, aus einem vorgegebenen Vektorensystem einen vorgegebenen Vektor linear zu komponieren, und speziell alle linearen Abhängigkeiten eines vorgegebenen Vektorensystems gefunden werden sollen. Es empfiehlt sich, diese im folgenden häufig benutzte Auffassungsweise gegenwärtig zu behalten.

Wir werden schließlich neben (J) und (H) auch noch das mit der transponierten Matrix $A' = (a_{ki})$ gebildete *transponierte homogene Gleichungssystem*

$$\text{(H}'\text{)}\quad f_k(x'_1, \ldots, x'_m) \equiv \sum_{i=1}^{m} a_{ik} x'_i \doteq 0 \text{ [1]} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

zu betrachten haben.

Die selbständige Betrachtung von (H) neben dem ursprünglich allein zu untersuchenden Gleichungssystem (J) wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 49. *Ist* (J) *lösbar, so erhält man alle übrigen Lösungen* $\mathfrak{x}_J$ *von* (J), *wenn man zu irgendeiner festen Lösung* $\mathfrak{x}_J^{(0)}$ *von* (J) *alle Lösungen* $\mathfrak{x}_H$ *von* (H) *addiert, also in der Form* $\mathfrak{x}_J = \mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H$.

Beweis. a) Nach Satz 47 [76] folgt aus $f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)}) = a_i$, $f_i(\mathfrak{x}_H) = 0$, daß $f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H) = f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)}) + f_i(\mathfrak{x}_H) = a_i + 0 = a_i$ ist. Also sind alle $\mathfrak{x}_J = \mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H$ Lösungen von (J).

b) Ist $f_i(\mathfrak{x}_J) = a_i$, $f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)}) = a_i$, so folgt ebenso $f_i(\mathfrak{x}_J - \mathfrak{x}_J^{(0)}) = 0$. Also ist, falls $\mathfrak{x}_J \neq \mathfrak{x}_J^{(0)}$ ist, $\mathfrak{x}_J - \mathfrak{x}_J^{(0)} = \mathfrak{x}_H$ Lösung von (H), d. h. es ist wirklich jede von $\mathfrak{x}_J^{(0)}$ verschiedene Lösung $\mathfrak{x}_J$ von (J) von der Form $\mathfrak{x}_J = \mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H$.

Nach Satz 49 reduziert sich die Aufgabe der linearen Algebra auf die folgenden beiden Teilaufgaben:

J) Bestimmung einer Lösung von (J),
H) Bestimmung aller Lösungen von (H).

Was einerseits H) betrifft, so gilt:

Satz 50. *Falls* (H) *lösbar ist, bilden die Lösungen von* (H) *einen Vektormodul, den* Lösungsmodul *von* (H).

Beweis. Gemäß Def. 25 [70] ist zu zeigen, daß mit beliebigen Lösungen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ auch jedes ihrer linearen Komposita eine Lösung von (H) ist. Aus $f_i(\mathfrak{x}_j) = 0$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, s$) folgt aber nach Satz 47

[1] In der Tat steht in der i-ten Zeile und k-ten Spalte dieses ausgeschrieben gedachten Gleichungssystems der Koeffizient a_{ki} und nicht a_{ik}, wie man auf den ersten Blick glauben möchte! — Es sei jedoch für das Folgende empfohlen, sich die Gleichungen von (H′) nebeneinander und jede einzelne Gleichung von oben nach unten geschrieben vorzustellen, so wie es der Entstehung von (H′) aus der Matrix A entspricht.

$$f_i\Big(\sum_{j=1}^{s} c_j \mathfrak{x}_j\Big) = \sum_{j=1}^{s} c_j f_i(\mathfrak{x}_j) = \sum_{j=1}^{s} c_j 0 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Falls (H) lösbar ist, hat nach Satz 41 [69], Def. 25 [70] und Satz 44 [72] der Lösungsmodul von (H) einen Rang s mit $1 \leqq s \leqq n$ und besteht aus der Gesamtheit aller linearen Komposita irgendeiner seiner Basen, die ihrerseits aus genau s linear unabhängigen Vektoren besteht; nach Satz 45 [72] sind überdies die Darstellungen der Lösungen durch eine solche Basis eindeutig.

Falls (H) unlösbar ist, d. h. nur die identische Lösung $\mathfrak{x} = 0$ besitzt, gilt gemäß der Bemerkung und Verabredung nach Satz 45 [73] Entsprechendes mit $s = 0$. Daß dieser Fall eintreten kann, zeigt etwa das nur aus einer Gleichung in nur einer Unbestimmten x bestehende Gleichungssystem $a\,x \doteq 0$ mit $a \neq 0$.

Demnach reduziert sich die Aufgabe H) auf die Bestimmung des Ranges s mit $0 \leqq s \leqq n$, sowie einer Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ des Lösungsmoduls von (H). Für diese Bildungen führen wir die folgenden kurzen Bezeichnungen ein:

Definition 30. *Der Rang des Lösungsmoduls von* (H) *heißt der* Lösungsrang *von* (H). *Jede Basis des Lösungsmoduls heißt ein* Fundamentallösungssystem *von* (H).

Was andererseits J) betrifft, so besteht folgende notwendige Lösbarkeitsbedingung, von der sich dann später (Satz 53 [92]) herausstellen wird, daß sie auch hinreichend ist:

Satz 51. *Damit* (J) *lösbar ist, ist notwendig, daß mit jeder linearen Abhängigkeit* $\sum_{i=1}^{m} x_i' f_i = 0$ *zwischen den Linearformen links auch die entsprechende Relation* $\sum_{i=1}^{m} x_i' a_i = 0$ *für die rechten Seiten besteht.*

Beweis. Ist (J) lösbar, existiert also ein Vektor $\mathfrak{x}$ derart, daß die Funktionswerte $f_i(\mathfrak{x}) = a_i$ werden, so folgt aus $\sum_{i=1}^{m} x_i' f_i = 0$ nach dem Einsetzungsprinzip auch $\sum_{i=1}^{m} x_i' a_i = 0$.

Da eine lineare Abhängigkeit $\sum_{i=1}^{m} x'_i f_i = 0$ der Linearformen f_i nach § 10 gleichbedeutend ist mit der entsprechenden linearen Abhängigkeit $\sum_{i=1}^{m} x'_i \mathfrak{a}_i = 0$ zwischen den zugeordneten Vektoren $\mathfrak{a}_i$, d. h. den Zeilen von A, und da diese wiederum nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache ist, daß $\mathfrak{x}'$ Lösung von (H′) ist, so folgt:

Zusatz 1. *Die Bedingung von Satz* 51 *kann auch dahin ausgesprochen werden, daß für jede Lösung* $\mathfrak{x}'$ *von* (H′) *gelten muß* $\mathfrak{x}'\mathfrak{a} = 0$.

Daraus ergibt sich dann nach Satz 46 [75] noch weiter:

Zusatz 2. *Die Bedingung von Satz* 51 *kann auch dahin ausgesprochen werden, daß für die Lösungen* $\mathfrak{x}'_e$ *eines Fundamentallösungssystems von* (H′) *gelten muß* $\mathfrak{x}'_e\mathfrak{a} = 0$.

Diese Zusätze rechtfertigen die Einführung von (H′) in den Kreis unserer Betrachtungen, da durch sie, neben der Verkettung von (J) mit (H) in Satz 49, (J) auch mit (H′) verkettet ist.

Die zu behandelnden Aufgaben J) und H) können jetzt ausführlicher so formuliert werden:

J*) *Entscheidung über die Lösbarkeit von* (J) *und Bestimmung einer Lösung im Lösbarkeitsfalle,*

H*) *Bestimmung des Lösungsranges und eines Fundamentallösungssystems von* (H).

§ 12. Äquivalente lineare Gleichungssysteme

Wir entwickeln in diesem Paragraphen ein konstruktives Verfahren, das es gestattet, ein beliebig vorgegebenes (inhomogenes oder homogenes) lineares Gleichungssystem in ein anderes von besonderer Gestalt mit derselben Lösungsgesamtheit zu transformieren, aus dem sich dann die Lösungen der am Schluß von § 11 herausgestellten Aufgaben J*) und H*) in einfacher Weise ergeben werden.

Dazu definieren wir:

Definition 31. *Zwei lineare Gleichungssysteme heißen* äquivalent, *wenn sie dieselbe Lösungsgesamtheit haben.*

Das ist natürlich eine Äqualenzrelation im Sinne von § 2, (I). Wir brauchen hier jedoch die ihr entsprechende Klasseneinteilung nicht. Diese wird erst im Matrizenkalkül von Bedeutung, wo sich die Äquivalenz durch rechnerische Beziehungen zwischen den Matrizen der Gleichungssysteme beschreiben läßt (vgl. **3**, 1, § 12, Aufg. 1—3).

Unsere Aufgabe besteht dann darin, zu (J) bzw. (H) ein äquivalentes Gleichungssystem $(\bar{J})$ bzw. $(\bar{H})$ zu konstruieren, dessen Lösungsgesamtheit sich in einfacher Weise bestimmen läßt. Dabei werden wir uns vor allem auf den folgenden Hilfssatz stützen.

Hilfssatz. *Wird in einem linearen Gleichungssystem entweder*

(a) *die Reihenfolge der Gleichungen geändert*

oder

(b) *die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert*

oder

(c) *zu der linken und rechten Seite einer Gleichung das c-fache der entsprechenden Seite einer anderen Gleichung addiert,*

so geht das Gleichungssystem in ein äquivalentes über, und die beiden auf den linken Seiten stehenden Linearformensysteme erzeugen im Sinne von Satz 43 [71] *denselben Linearformenmodul.*

Beweis. Hinsichtlich (a) ist die Behauptung klar. Hinsichtlich (b) und (c) können wir uns dann auf den Fall beschränken, daß die erste Gleichung mit c multipliziert bzw. zur ersten Gleichung das c-fache der zweiten addiert werden soll, und schließen so: Ist

$$g_1 = c f_1 \quad , \quad b_1 = c a_1 \quad \text{mit} \quad c \neq 0$$

bzw.

$$g_1 = f_1 + c f_2 \, , \quad b_1 = a_1 + c a_2$$

sowie

$$g_i = f_i \quad , \quad b_i = a_i \qquad (i = 2, \ldots, m) \, ,$$

so gilt einerseits für jeden Vektor $\mathfrak{x}$, der den Gleichungen $f_i(\mathfrak{x}) \doteq a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ genügt, nach dem Einsetzungsprinzip auch $g_i(\mathfrak{x}) = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ und ist andererseits jedes g_i ein lineares Kompositum der f_i. Umgekehrt gilt dann aber auch

$$f_1 = \frac{1}{c}\, g_1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{c}\, b_1 \quad \text{mit } \frac{1}{c} \neq 0$$

bzw.

$$f_1 = g_1 - c\, g_2\,, \quad a_1 = b_1 - c\, b_2$$

sowie

$$f_i = g_i \qquad , \quad a_i = b_i \qquad\qquad (i = 2, \ldots, m)\,,$$

so daß wie eben einerseits für jede Lösung $\mathfrak{x}$ der Gleichungen $g_i(\mathfrak{x}) \doteq b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ auch $f_i(\mathfrak{x}) = a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ gilt und andererseits jedes f_i ein lineares Kompositum der g_i ist.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nunmehr zum Beweis unseres Hauptsatzes:

Satz 52. *Genügt* (J) *der notwendigen Lösbarkeitsbedingung aus Satz* 51 [82], *so läßt sich* (J) *in ein äquivalentes Gleichungssystem* $(\overline{\mathrm{J}})$ *von der Gestalt*

$$(\overline{\mathrm{J}})\quad \begin{array}{l} g_1(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n \doteq b_1 \\ g_2(\mathfrak{x}) \equiv \qquad\quad x_{k_2} + b_{2,k_2+1}x_{k_2+1} + \cdots\cdots + b_{2n}x_n \doteq b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_r(\mathfrak{x}) \equiv \qquad\qquad\quad x_{k_r} + b_{r,k_r+1}x_{k_r+1} + \cdots + b_{rn}x_n \doteq b_n \end{array}$$

transformieren. Dabei gilt:

(1) r *ist die Maximalanzahl linear unabhängiger unter den linken Seiten* $f_1, \ldots, f_m$ *von* (J),

(2) $g_1, \ldots, g_r$ *sind linear unabhängig und bilden eine Basis des von* $f_1, \ldots, f_m$ *erzeugten Linearformenmoduls,*

(3) $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq n$.

Beweis. Wir führen das vorgelegte Gleichungssystem

$$(\mathrm{J})\quad \begin{array}{l} f_1(\mathfrak{x}) \equiv a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \doteq a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(\mathfrak{x}) \equiv a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \doteq a_m \end{array}$$

durch Operationen der Form (a), (b), (c) aus dem Hilfssatz schrittweise in äquivalente Gleichungssysteme über, bis wir schließlich, nach dem r-ten Schritt, eines von der angegebenen Gestalt erhalten.

Erster Schritt. Sofern nicht alle $f_i = 0$, d. h. nicht alle $a_{ik} = 0$ sind[1]), sei k_1 der kleinste Index k, für den mindestens ein $a_{ik} \neq 0$ ist, etwa $a_{i_1 k_1} \neq 0$; dabei gilt natürlich $1 \leqq k_1 \leqq n$. Dann ändern wir (gemäß (a)) die Reihenfolge der Gleichungen so, daß die i_1-te Gleichung $f_{i_1}(\mathfrak{x}) \doteq a_{i_1}$ an die erste Stelle kommt, und dividieren diese Gleichung (gemäß (b)) durch $a_{i_1 k_1}$. Wir erhalten so an der ersten Stelle eine Gleichung der Gestalt

$$g_1(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_1} + b_{1, k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots + b_{1n} x_n \doteq b_1 .$$

Anschließend subtrahieren wir (gemäß (c)) von den übrigen Gleichungen $f_i(\mathfrak{x}) \doteq a_i$ $(i \neq i_1)$ jeweils das a_{ik_1}-fache dieser neuen ersten Gleichung, so daß in jenen Gleichungen dann auch noch der k_1-te Koeffizient verschwindet (während alle vorherigen Koeffizienten bereits nach der Wahl von k_1 verschwanden). Damit haben wir ein zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_1) von der folgenden Gestalt gewonnen:

$$(\mathrm{J}_1)\quad \begin{array}{llll} g_1(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_1} + b_{1, k_1+1} x_{k_1+1} & + \cdots + b_{1n} x_n & \doteq b_1 \\ f_2^{(1)}(\mathfrak{x}) \equiv \qquad a^{(1)}_{2, k_1+1} x_{k_1+1} & + \cdots + a^{(1)}_{2n} x_n & \doteq a^{(1)}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ f_m^{(1)}(\mathfrak{x}) \equiv \qquad a^{(1)}_{m, k_1+1} x_{k_1+1} & + \cdots + a^{(1)}_{mn} x_n & \doteq a^{(1)}_m \end{array}$$

mit $1 \leqq k_1 \leqq n$.

j-ter Schritt $(j \geqq 2)$. Angenommen, wir haben in $j - 1$ Schritten durch Operationen der Formen (a), (b), (c) bereits ein zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_{j-1}) der folgenden Gestalt gewonnen:

---

[1]) Bezüglich dieses Falles siehe die Bemerkung 4 am Schluß dieses Paragraphen.

$$
\begin{array}{llcl}
 & g_1(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & \doteq & b_1 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & g_{j-1}(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_{j-1}} + b_{j-1,k_{j-1}+1}x_{k_{j-1}+1} + \cdots + b_{j-1,n}x_n & \doteq & b_{j-1} \\
(\mathrm{J}_{j-1}) & f_j^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \equiv \qquad a^{(j-1)}_{j,k_{j-1}+1}x_{k_{j-1}+1} + \cdots + a_{jn}^{(j-1)}x_n & \doteq & a_j^{(j-1)} \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
 & f_m^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \equiv \qquad a^{(j-1)}_{m,k_{j-1}+1}x_{k_{j-1}+1} + \cdots + a_{mn}^{(j-1)}x_n & \doteq & a_m^{(j-1)}
\end{array}
$$

mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_{j-1} \leqq n$.

Dann konstruieren wir ein zu (J_{j-1}) äquivalentes Gleichungssystem (J_j) ganz entsprechend wie im ersten Schritt: Sofern noch Gleichungen mit $f_i^{(j-1)} \neq 0$ hinter der $(j-1)$-ten vorhanden sind, d. h. $j \leqq m$ ist und nicht alle $a_{ik}^{(j-1)} = 0$ sind, sei k_j der kleinste Index k, für den mindestens ein $a_{ik}^{(j-1)} \neq 0$ ist, etwa $a_{i_j k_j}^{(j-1)} \neq 0$; dabei gilt wegen der Gestalt von (J_{j-1}) $k_{j-1} < k_j \leqq n$. Dann ändern wir (gemäß (a)) die Reihenfolge der letzten $m - j + 1$ Gleichungen $f_i^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \doteq a_i^{(j-1)}$ so ab, daß die i_j-te Gleichung $f_{i_j}^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \doteq a_{i_j}^{(j-1)}$ an die j-te Stelle des ganzen Gleichungssystems kommt, und dividieren diese Gleichung (gemäß (b)) durch $a_{i_j k_j}^{(j-1)}$. Wir erhalten so an der j-ten Stelle eine Gleichung der Gestalt

$$g_j(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_j} + b_{j,k_j+1}x_{k_j+1} + \cdots + b_{jn}x_n \doteq b_j.$$

Anschließend subtrahieren wir (gemäß (c)) von den übrigen Gleichungen $f_i^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \doteq a_i^{(j-1)}$ $(i \neq i_j)$ jeweils das $a_{ik_j}^{(j-1)}$-fache der neuen j-ten Gleichung, so daß in diesen Gleichungen dann auch noch der k_j-te Koeffizient verschwindet (während alle vorherigen Koeffizienten bereits nach der Wahl von k_j verschwanden). Damit haben wir ein zu (J_{j-1}) und daher auch zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_j) von der folgenden Gestalt gewonnen:

$$
\begin{array}{lllll}
& g_1(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots\cdots + b_{1n} x_n & \doteq b_1 \\
& \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
& g_j(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_j} + b_{j,k_j+1} \quad x_{k_j+1} + \cdots + b_{jn} x_n & \doteq b_j \\
(\mathrm{J}_j) & f^{(j)}_{j+1}(\mathfrak{x}) & \equiv \quad a^{(j)}_{j+1,k_j+1} \quad x_{k_j+1} + \cdots + a^{(j)}_{j+1,n} x_n & \doteq a^{(j)}_{j+1} \\
& \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
& f^{(j)}_m(\mathfrak{x}) & \equiv \quad a^{(j)}_{m,k_j+1} \quad x_{k_j+1} + \cdots + a^{(j)}_{mn} x_n & \doteq a^{(j)}_m
\end{array}
$$

mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqq n$.

r-ter Schritt. Dieses Verfahren der schrittweisen Umformungen setzen wir fort, solange das möglich ist; das ist der Fall, solange noch nicht erfaßte Gleichungen mit $f_i^{(j)} \neq 0$ übrig sind. Der letzte mögliche Schritt sei der r-te. Diese Zahl r bestimmt sich demnach dadurch, daß nach dem r-ten Schritt entweder alle Gleichungen erfaßt sind, also $r = m$ ist, oder aber in den noch nicht erfaßten Gleichungen (also für $i = r+1, \ldots, m$) $f_i^{(r)} = 0$ ist, d. h. alle $a_{ik}^{(r)} = 0$ sind. Da die in jedem einzelnen Schritt vorgenommene Wahl des Index i_ν und Abänderung der Reihenfolge der Gleichungen mit Willkürlichkeiten behaftet, also das ganze Transformationsverfahren nicht durch das Gleichungssystem (J) allein eindeutig festgelegt ist, hängt auch die Zahl r zunächst nicht allein von (J), sondern auch noch von der Wahl des Verfahrens ab. Es wird sich jedoch zeigen, daß r in Wahrheit allein durch das Gleichungssystem (J) eindeutig bestimmt ist.

Nach dem r-ten Schritt haben wir demnach ein zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_r) der folgenden Gestalt gewonnen:

$$
\begin{array}{llll}
& g_1(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots\cdots + b_{1n} x_n & \doteq b_1 \\
& & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
& g_r(\mathfrak{x}) & \equiv \quad x_{k_r} + b_{r,k_r+1} x_{k_r+1} + \cdots + b_{rn} x_n & \doteq b_r \\
(\mathrm{J}_r) & f^{(r)}_{r+1}(\mathfrak{x}) & \equiv \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \doteq a^{(r)}_{r+1} \\
& & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
& f^{(r)}_m(\mathfrak{x}) & \equiv \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \doteq a^{(r)}_m
\end{array}
$$

mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq n$.

Das Teilsystem

$$(\overline{\mathrm{J}})\qquad \begin{array}{c} g_1(\mathfrak{x}) \doteq b_1 \\ \cdots\cdots \\ g_r(\mathfrak{x}) \doteq b_r \end{array}$$

von (J_r) hat die im Satz angegebene Gestalt und besitzt die Eigenschaft (3). Wir zeigen zunächst, daß es auch die Eigenschaften (2) und (1) besitzt.

Wenn eine Relation

$$x_1' g_1 + \cdots + x_r' g_r = 0$$

besteht, so gilt insbesondere für die Koeffizienten der x_{k_j} $(j = 1, \ldots, r)$:

$$\begin{array}{ll} x_1' & = 0 \\ x_1' b_{1k_2} + x_2' & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1' b_{1k_r} + \cdots + x_{r-1}' b_{r-1,k_r} + x_r' & = 0, \end{array}$$

und daraus folgt der Reihe nach $x_1' = 0, \ldots, x_r' = 0$. Die Linearformen $g_1, \ldots, g_r$ sind somit linear unabhängig. Da sie zusammen mit den Nullformen $f_{r+1}^{(r)}, \ldots, f_m^{(r)}$ aus dem Linearformensystem $f_1, \ldots, f_m$ durch wiederholte Anwendung der Operationen (a), (b), (c) hervorgegangen sind, erzeugen sie nach dem Hilfssatz denselben Linearformenmodul M wie $f_1, \ldots, f_m$ und bilden darin wegen ihrer linearen Unabhängigkeit nach Def. 25 [70] eine Basis. Damit ist die Eigenschaft (2) nachgewiesen und im Hinblick auf Satz 44 [72] zugleich gezeigt, daß die Zahl r der Rang von M ist und somit tatsächlich nur von dem Gleichungssystem (J) und nicht auch noch von den Willkürlichkeiten des Transformationsverfahrens abhängt. Schließlich erzeugt nach Satz 38, a′) [68] und Satz 43 [71] bereits ein Maximalsystem linear unabhängiger unter den Linearformen $f_1, \ldots, f_m$ den Modul M, bildet somit nach Def. 25 eine Basis von M und hat daher nach Satz 44 die Anzahl r; und das bedeutet die die Eigenschaft (1).

Es bleibt noch zu beweisen, daß das durch Weglassen der $m - r$ letzten Gleichungen

$$\text{(N)} \qquad f_i^{(r)}(\mathfrak{x}) \equiv 0 \doteq a_i^{(r)} \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

aus (J_r) entstehende Teilsystem $(\bar{\mathrm{J}})$ mit (J_r) und daher auch mit (J) äquivalent ist. Für $r = m$, wo gar keine Gleichungen wegzulassen sind, also $(\bar{\mathrm{J}})$ mit (J_r) zusammenfällt, ist das trivialerweise richtig. Für $r < m$ zeigen wir: Wenn (J) — wie im Satz vorausgesetzt — die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 [82] erfüllt, dann sind in (N) mit den linken auch die rechten Seiten

$$a_i^{(r)} = 0 \qquad (i = r+1, \ldots, m),$$

also die $m - r$ letzten Gleichungen (N) von (J_r) identisch erfüllt und daher die Lösungen des Teilsystems $(\bar{\mathrm{J}})$ in der Tat auch Lösungen des vollen Systems (J_r).

Bei den Operationen (a), (b), (c) aus dem Hilfssatz geht nämlich ein Gleichungssystem jeweils in ein neues über, dessen linke Seiten linear aus den linken Seiten des Ausgangssystems komponiert sind und dessen rechte Seiten sich in gleicher Weise linear aus den rechten Seiten des Ausgangssystems zusammensetzen. Da das System (J_r) durch wiederholte Anwendung von Operationen (a), (b), (c) aus dem System (J) hervorgegangen ist, sind daher nach Satz 43 [71] die linken Seiten von (J_r) linear aus $f_1, \ldots, f_m$ komponiert und, da die im Beweis von Satz 43 angewendete Regel über die Vertauschung der Summationsfolge ebenso wie für Linearformen f_i auch für Körperelemente a_i gültig ist, sind die rechten Seiten in gleicher Weise linear aus $a_1, \ldots, a_m$ zusammengesetzt. Insbesondere sind also die $a_i^{(r)}$ in gleicher Weise linear aus $a_1, \ldots, a_m$ zusammengesetzt wie die $f_i^{(r)}$ aus $f_1, \ldots, f_m$. Da aber die $f_i^{(r)} = 0$ sind, besagt die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 [82], daß auch die $a_i^{(r)} = 0$ sind, wie behauptet.

Damit ist der Beweis von Satz 52 zum Abschluß gebracht. Wir haben in diesem Beweis das vorgelegte Gleichungssystem (J) in ein äquivalentes von der besonderen Gestalt $(\bar{\mathrm{J}})$ transformiert, von dem wir im folgenden § 13 zeigen werden, daß es stets lösbar ist und wie man seine Lösungsgesamtheit bestimmen kann. Zuvor wollen wir an den Beweis noch einige Bemerkungen anknüpfen:

1. Über die in Satz 52 formulierte Existenzaussage hinaus liefert der Beweis zugleich ein konstruktives Verfahren aus endlich vielen (nämlich $r \leqq \operatorname{Min}(m, n)$) Schritten, durch das man jedes vorgelegte lineare Gleichungssystem (J) in ein äquivalentes von der einfacheren Gestalt $(\bar{\mathrm{J}})$ überführen kann.

2. Die Prüfung, ob ein vorgelegtes lineares Gleichungssystem (J) die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 [82] erfüllt, würde im allgemeinen unendlich viele Schritte erfordern, da ja bei unendlichem Grundkörper unendlich viele Möglichkeiten linearer Abhängigkeit der Linearformen auf den linken Seiten durchzuprobieren wären. Für die Lösung der Aufgaben J*), H*) aus § 11 ist man aber auf diese Prüfung gar nicht angewiesen. Wendet man nämlich das beschriebene Verfahren auf ein vorgelegtes lineares Gleichungssystem (J) an, von dem nicht feststeht, ob die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 erfüllt ist, so gibt es für das nach r Schritten resultierende zu (J) äquivalente System (J_r) mit den $m - r$ letzten Gleichungen (N) nur die folgenden beiden Möglichkeiten:

a) Es sind, wie im vorstehenden Beweis, in (N) alle rechten Seiten $a_i^{(r)} = 0$ — hierunter zählen wir auch den Fall $r = m$, in dem gar keine $a_i^{(r)}$ mehr existieren. Dann ist (J) wie oben zu dem Teilsystem $(\bar{\mathrm{J}})$ von (J_r) äquivalent, und für dieses Teilsystem ist die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 trivialerweise erfüllt, da seine linken Seiten ja linear unabhängig sind.

b) Es ist in (N) mindestens eine rechte Seite $a_i^{(r)} \neq 0$. Dann ist (J_r) und damit auch (J) unlösbar.

3. Das (J) zugeordnete homogene lineare Gleichungssystem (H) ist mit dem $(\bar{\mathrm{J}})$ zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystem $(\bar{\mathrm{H}})$ äquivalent. Denn wendet man das beschriebene Verfahren auf (H) an, so ergibt sich gerade $(\bar{\mathrm{H}})$.

4. Der triviale Fall, daß in (J) alle linken Seiten $f_i = 0$ sind, ordnet sich dem beschriebenen Verfahren folgendermaßen unter: Hier hat (J) von vornherein schon die im allgemeinen Fall nach r Schritten resultierende Endgestalt (J_r). Demnach ist sinngemäß $r = 0$ zu setzen und das Teilsystem $(\bar{\mathrm{J}})$ aus $r = 0$ Gleichungen als identisch erfüllt anzusehen. Die beiden Möglichkeiten aus Bemerkung 2 stellen sich hier wie folgt dar:

a) Es sind alle rechten Seiten $a_i = 0$. Dann ist (J) mit $(\bar{\mathrm{J}})$ äquivalent und identisch erfüllt.

b) Es ist mindestens ein $a_i \neq 0$. Dann ist (J) unlösbar.

§ 13. Lösbarkeit und Lösungen linearer Gleichungssysteme

Wir wenden jetzt den Satz 52 [85] zur Lösung der beiden am Schluß von § 11 formulierten Aufgaben J*) und H*) an.

Die Aufgabe J*) wird durch den Beweis des folgenden Satzes gelöst:

Satz 53. *Das Gleichungssystem* $(\bar{\mathrm{J}})$ *ist stets lösbar; d. h. die notwendige Lösbarkeitsbedingung für* (J) *aus Satz* 51 [82] *ist auch hinreichend.*

Beweis. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems $(\bar{\mathrm{J}})$ folgt aus seiner besonderen Gestalt, wie sie in der Eigenschaft (3) aus Satz 52 zum Ausdruck kommt.

Man wähle nämlich, um eine Lösung zu konstruieren, zunächst die $n - k_r$ Unbestimmten $x_n, \ldots, x_{k_r+1}$ (soweit sie überhaupt vorkommen, d. h. $k_r < n$ ist) ganz beliebig. Dann läßt sich x_{k_r} (eindeutig) so bestimmen, daß die letzte Gleichung $g_r(\mathfrak{x}) \doteq b_r$ erfüllt ist, wie auch die übrigen x_k gewählt werden mögen. Danach wähle man weiter die $k_r - k_{r-1} - 1$ Unbestimmten $x_{k_r-1}, \ldots, x_{k_{r-1}+1}$ (soweit sie überhaupt vorkommen, d. h. $k_{r-1} < k_r - 1$ ist) ganz beliebig. Dann läßt sich $x_{k_{r-1}}$ (eindeutig) so bestimmen, daß auch die zweitletzte Gleichung $g_{r-1}(\mathfrak{x}) \doteq b_{r-1}$ erfüllt ist, wie auch die noch nicht festgelegten x_k gewählt werden mögen. So fahre man fort, bis schließlich auch x_{k_1} bestimmt ist, und wähle dann noch die $k_1 - 1$ Unbestimmten $x_{k_1-1}, \ldots, x_1$ (soweit sie überhaupt vorkommen, d. h. $k_1 > 1$ ist) ganz beliebig. Der damit vollständig festgelegte Vektor $\mathfrak{x}$ ist eine Lösung von ($\bar{\text{J}}$).

Diesem Lösungsverfahren ordnet sich auch der am Schluß von § 12 in der Bemerkung 4 aufgeführte triviale Fall $r = 0$ unter, indem dann alle Unbestimmten x_k ganz beliebig gewählt werden können, d. h. jeder Vektor x Lösung von ($\bar{\text{J}}$) ist.

Nach Satz 53 können wir ergänzend zu der Bemerkung 2 am Schluß von § 12 feststellen:

Zusatz. *Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des inhomogenen linearen Gleichungssystems* (J) — *und daher gleichbedeutend mit der Lösbarkeitsbedingung aus Satz* 51 [82] — *ist, daß bei der im Beweis zu Satz* 52 [85] *beschriebenen Transformation nach dem r-ten Schritt nicht nur die linken, sondern auch die rechten Seiten der letzten $m - r$ Gleichungen zum Verschwinden kommen.*

Im Hinblick auf die Bemerkung 1 am Schluß von § 12 ist damit die Aufgabe J*), bei einem vorgelegten inhomogenen linearen Gleichungssystem (J) über die Lösbarkeit zu entscheiden und gegebenenfalls eine Lösung zu bestimmen, durch ein konstruktives, in endlich vielen Schritten durchführbares Verfahren gelöst.

Dieses Verfahren liefert zudem nicht nur, wie in der Aufgabe J*) verlangt, eine Lösung von (J), sondern sogar alle Lösungen von (J), indem man für die ganz beliebig zu wählenden von den x_{k_j} verschiedenen x_k jeweils nicht nur ein, sondern nacheinander alle Elemente des Grundkörpers einsetzt (vgl. den anschließenden Beweis von Satz 54 für den homogenen Fall). Wir wollen jedoch hierauf nicht genauer eingehen, da sich die Lösungsgesamtheit von (J) auf dem bisher eingeschlagenen, durch Satz 49 [81] bestimmten Wege, nämlich durch getrennte Behandlung der Aufgaben J) und H), in übersichtlicherer Form darstellt.

Die Aufgabe H*) wird durch den Beweis des folgenden Satzes gelöst:

Satz 54. *Der Lösungsrang von* (H) *ist $s = n - r$, wo r der Rang des von $f_1, \ldots, f_m$ erzeugten Linearformenmoduls ist;*

oder also: Jedes Fundamentallösungssystem von (H) *besteht aus* $s = m - r$ *Vektoren, wo* r *die Maximalanzahl linear unabhängiger unter* $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ *ist.*

Beweis. Wir betrachten das $(\bar{\mathrm{J}})$ zugeordnete homogene lineare Gleichungssystem $(\bar{\mathrm{H}})$, das nach der Bemerkung 3 am Schluß von § 12 zu (H) äquivalent ist, und konstruieren alle Lösungen von $(\bar{\mathrm{H}})$ ebenso, wie wir im Beweis des vorigen Satzes eine Lösung von $(\bar{\mathrm{J}})$ konstruierten, indem wir nämlich die von $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ verschiedenen unter den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ ganz beliebig wählen und $x_{k_r}, \ldots, x_{k_1}$ der Reihe nach so bestimmen, daß eine Gleichung von $(\bar{\mathrm{H}})$ nach der anderen erfüllt wird. Der Lösungsrang $s = n - r$ ergibt sich dabei als die Anzahl der von den x_{k_j} verschiedenen, frei wählbaren x_k. Das erkennt man im einzelnen folgendermaßen.

Für jeden Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ von $(\bar{\mathrm{H}})$ ergibt sich x_{k_r} aus der letzten Gleichung von $(\bar{\mathrm{H}})$ als lineares Kompositum der $n - k_r$ Unbestimmten $x_{k_r+1}, \ldots, x_n$ mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten:

$$x_{k_r} = -b_{r, k_r+1}\, x_{k_r+1} - \cdots - b_{rn} x_n$$

(bzw. $x_{k_r} = 0$, falls $k_r = n$ ist). Ebenso ergibt sich $x_{k_{r-1}}$ aus der zweitletzten Gleichung von $(\bar{\mathrm{H}})$ zunächst als lineares Kompositum der $n - k_{r-1}$ Unbestimmten $x_{k_{r-1}+1}, \ldots, x_n$ mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten:

$$x_{k_{r-1}} = -b_{r-1, k_{r-1}+1}\, x_{k_{r-1}+1} - \cdots - b_{r-1,n}\, x_n.$$

Da aber hierin x_{k_r} seinerseits lineares Kompositum von $x_{k_r+1}, \ldots, x_n$ mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten ist, ergibt sich nach Satz 43 [71] durch Einsetzen $x_{k_{r-1}}$ als lineares Kompositum der x_k mit $k > k_{r-1}, k \neq k_r$, mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten (bzw. $x_{k_{r-1}} = 0$, falls keine solchen x_k vorhanden sind, d. h. $k_r = n$, $k_{r-1} = n - 1$ ist). Fährt man so fort, so erhält man schließlich für jeden Lösungsvektor von $(\bar{\mathrm{H}})$ die r Unbestimmten $x_{k_r}, \ldots, x_{k_1}$ der

Reihe nach als lineare Komposita der übrigen $n - r$ Unbestimmten x_k mit durch $(\overline{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten (bzw. $x_{k_r} = 0, \ldots, x_{k_1} = 0$, falls keine weiteren x_k vorhanden sind, d. h. $r = n$ ist).

Um uns einfacher ausdrücken zu können, bezeichnen wir im folgenden die $n - r$ von $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ verschiedenen unter den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ mit $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$. Dann liefert das eben beschriebene Verfahren r durch $(\overline{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegte Linearformen $h_1, \ldots, h_r$ von $n - r$ Unbestimmten $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$ derart, daß für jeden Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ von $(\overline{\mathrm{H}})$ gilt:

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= h_1(x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}) \equiv c_{1,r+1} x_{k_{r+1}} + \cdots + c_{1n} x_{k_n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k_r} &= h_r(x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}) \equiv c_{r,r+1} x_{k_{r+1}} + \cdots + c_{rn} x_{k_n}. \end{aligned}$$

(Dabei ist im Falle $r = n$ sinngemäß $h_1 = 0, \ldots, h_r = 0$ zu verstehen.)

Setzt man umgekehrt für $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$ beliebige und für $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ die sich dann aus den Linearformen $h_1, \ldots, h_r$ ergebenden Werte ein, so erhält man nach dem Einsetzungsprinzip auch stets einen Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ von $(\overline{\mathrm{H}})$. Der Lösungsmodul von $(\overline{\mathrm{H}})$ ist demnach identisch mit der Gesamtheit der Vektoren von der erhaltenen Form. Diese Vektoren $\mathfrak{x}$ sind nach Satz 47 [76] gerade die sämtlichen linearen Komposita der folgenden $s = n - r$ speziellen Vektoren (deren Komponenten wir der Einfachheit halber auf die Reihenfolge $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}$ statt $x_1, \ldots, x_n$ der Unbestimmten bezogen angeben):

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_{r+1} &= (c_{1,r+1}, \ldots, c_{r,r+1}, e, 0, \ldots, 0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{c}_n &= (c_{1n}, \ldots, c_{rn}, 0, \ldots, 0, e), \end{aligned}$$

nämlich

$$\mathfrak{x} = x_{k_{r+1}} \mathfrak{c}_{r+1} + \cdots + x_{k_n} \mathfrak{c}_n.$$

Die $s = n - r$ Vektoren $\mathfrak{c}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ sind nach Satz 40 [68] linear unabhängig, da bereits die aus ihren $n - r$ (in der angegebenen Reihenfolge) letzten Komponenten gebildeten Vektoren ersichtlich linear unabhängig sind. Sie bilden daher eine Basis des Lösungsmoduls von $(\overline{\mathrm{H}})$, d. h. ein Fundamentallösungssystem von $(\overline{\mathrm{H}})$ und damit auch von (H). Somit ist Satz 54 bewiesen.

Wir wollen noch kurz darauf eingehen, wie sich die beiden Grenzfälle $r = 0$ und $r = n$ diesem Lösungsverfahren unterordnen.

Ist $r = 0$, so besteht das Gleichungssystem $(\overline{\mathrm{H}})$ aus $r = 0$ Gleichungen. Dann ist jeder Vektor $\mathfrak{x}$ Lösung von $(\overline{\mathrm{H}})$. — In diesem Falle ist das Teilsystem $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ (und damit auch das Linearformensystem $h_1, \ldots, h_r$) leer und besteht das Teilsystem $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$ aus allen Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$. Dann ist das obige Fundamentallösungssystem $\mathfrak{c}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ gerade das System der $s = n - r = n$ Einheitsvektoren.

Ist dagegen $r = n$, so besteht das Gleichungssystem $(\overline{\mathrm{H}})$ aus $r = n$ Gleichungen, die der Reihe nach eindeutig $x_n = 0, \ldots, x_1 = 0$ bestimmen. Dann ist $\mathfrak{x} = 0$ die einzige Lösung, d. h. $(\overline{\mathrm{H}})$ ist im Sinne der in § 11 getroffenen Festsetzung unlösbar. — In diesem Falle besteht das Teilsystem $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ aus allen Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$, während das Teilsystem $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$ leer ist. Dann sind, wie gesagt, $h_1 = 0, \ldots, h_r = 0$ zu verstehen, und das obige Fundamentallösungssystem ist leer, d. h. besteht aus $s = n - r = 0$ Vektoren.

Damit ist auch die Aufgabe H*), bei einem vorgelegten homogenen linearen Gleichungssystem (H) den Lösungsrang und ein Fundamentallösungssystem zu bestimmen, durch ein konstruktives, in endlich vielen Schritten durchführbares Verfahren gelöst.

Wir wollen nun zum Schluß noch einige zusätzliche Feststellungen über die bei der Lösung von (J) bzw. (H) aufgetretenen Anzahlen r und s treffen und damit gleichzeitig das transponierte homogene Gleichungssystem (H′) wieder in den Kreis der Untersuchungen einbeziehen.

Satz 54 besagt, daß der Lösungsrang des Gleichungssystems (H) um so größer ist, je weniger linear unabhängige Zeilen seine Matrix A hat, je mehr lineare Abhängigkeiten also zwischen diesen Zeilen bestehen, oder, da eine lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen von A mit einer Lösung von (H′) gleichbedeutend ist, je größer die Lösungsgesamtheit von (H′) ist. Es ist daher eine Relation zwischen den Lösungsrängen von (H) und (H′) zu vermuten, die sich nach Satz 54 auch als Relation zwischen den Maximalanzahlen linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten von A aussprechen lassen muß. Wir beweisen nun in der Tat die beiden folgenden Tatsachen:

Satz 55. *Die Maximalanzahl r linear unabhängiger Zeilen einer Matrix A ist gleich der Maximalanzahl r' linear unabhängiger Spalten von A.*

Satz 56. *Zwischen den Lösungsrängen s eines homogenen linearen Gleichungssystems* (H) *von m Gleichungen und s' seines transponierten* (H′) *von m' Gleichungen besteht die Relation*

$$m + s = m' + s'.$$

Dabei haben wir der Symmetrie halber ausnahmsweise m' für die sonst mit n bezeichnete Anzahl der Spalten geschrieben.

Beweise. 1) (Satz 55) Es seien r und r' die im Satz genannten Maximalanzahlen für die (m, m')-reihige Matrix A.

a) Ist $A = 0$, so ist die Aussage des Satzes trivial, da dann $r = 0$ und $r' = 0$ ist (vgl. Bemerkung 4 am Schluß von § 12).

b) Ist $A \neq 0$, so dürfen wir ohne Einschränkung die Zeilen so geordnet annehmen, daß $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ ein Maximalsystem linear unabhängiger Zeilen ist. Ist nun zunächst $r < m$, so sind nach Satz 38, a′) [68] die letzten $m - r$ Zeilen $\mathfrak{a}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{a}_m$ von den ersten r Zeilen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ linear abhängig, d. h. es bestehen $m - r$ Relationen der Form

$$\mathfrak{a}_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij} \mathfrak{a}_i \qquad (j = r + 1, \ldots, m)$$

zwischen den Zeilen. Diese besagen, daß die $m - r$ nach Satz 40 [68] linear unabhängigen Vektoren

$$\begin{array}{l}(-c_{r+1,1}, \ldots, -c_{r+1,r}, e, 0, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-c_{m1}\quad, \ldots, -c_{mr}\quad, 0, \ldots, 0, e)\end{array}$$

Lösungen des A zugeordneten transponierten homogenen Gleichungssystems (H′) sind. Nach Satz 54, angewandt auf (H′), ist somit der Lösungsrang $m - r'$ von (H′) mindestens $m - r$, d. h. $m - r' \geqq m - r$, also $r' \leqq r$. Ist aber $r = m$, so gilt $r' \leqq r$ bereits nach Satz 41 [69], da die Spalten von A ja m-gliedrige Vektoren sind. Durch die entsprechenden Betrachtungen über die transponierte Matrix A' folgt ebenso $r \leqq r'$. Zusammen gilt also $r = r'$.

2) (Satz 56) Nach Satz 54, 55 gilt $s = m' - r$, $s' = m - r$, d. h. $m + s = m' + s'$ $(= m + m' - r)$.

Durch Satz 55 wird die nach Satz 41 [69] richtige Tatsache, daß in einer (m, m')-reihigen Matrix A für die Maximalanzahl r linear unabhängiger Zeilen nicht nur $r \leqq m$, sondern auch $r \leqq m'$ gilt, in helles Licht gestellt. Denn nach Satz 55 geht die „nicht-selbstverständliche“ Ungleichung $0 \leqq r \leqq m'$ zwischen einer Zeilen- und einer Spaltenanzahl in die „selbstverständliche“ Ungleichung $0 \leqq r \leqq m$ zwischen zwei Spaltenanzahlen über.

Durch Satz 56 wird der „Kreis“ unserer Betrachtungen über (J), (H), (H′) geschlossen: Durch Satz 49 [81] ist (J) mit (H), durch Satz 56 (H) mit (H′) und durch Satz 51 [82], 53 (und deren Zusätze) (H′) mit (J) verkettet.

§ 14. Der Fall m = n

Es ist für die Betrachtungen in IV und auch für die Anwendungen von Interesse, die in Satz 49—56 [81—97] gewonnenen Resultate über Lösbarkeit und Lösungen linearer Gleichungssysteme auf den Fall zu spezialisieren, daß die Anzahl m der Gleichungen mit der Anzahl n der Unbekannten übereinstimmt, daß also A eine (n, n)-reihige Matrix ist. Da aber nach den Resultaten des vorigen Paragraphen die Anzahlen m und n allein für die Lösungsgesamtheit von (H) (und damit nach Satz 49 [81] auch für die von (J)) so gut wie nichts besagen, vielmehr diese sich erst durch Hinzunahme der dortigen Anzahl r bestimmt, haben wir ohne eine feste Annahme über r keine besonderen Resultate zu erwarten. Wir wollen daher außer der Spezialisierung $m = n$ noch die weitere einführen, daß nur zwischen dem Grenzfall $r = m = n$ und dem Fall $0 \leqq r < m = n$ (ohne weitere Unterscheidungen im letzteren Falle) unterschieden wird[1]).

Wir treffen demgemäß, vorläufig nur der kürzeren Ausdrucksweise halber, die folgende, erst durch die Entwicklungen in IV in ihrer vollen Bedeutung verständlich werdende Festsetzung:

Definition 32. *Eine (n, n)-reihige Matrix A heiße* regulär *oder* singulär, *je nachdem, ob für sie der Fall $r = n$ oder der Fall $0 \leqq r < n$ vorliegt, wo r die Bedeutung aus §§ 12, 13 hat.*

Der in Satz 54—56 [93—97] enthaltene Tatsachenkomplex über (H) liefert dann hier, zusammengefaßt, unmittelbar folgendes Resultat:

Satz (54, 55, 56) a. *Ist A eine (n, n)-reihige Matrix, so sind entweder sowohl ihre Zeilen als auch ihre Spalten linear unabhängig oder sowohl ihre Zeilen als auch ihre Spalten linear abhängig, d. h. es sind die A zugehörigen Gleichungssysteme* (H) *und* (H') *entweder beide unlösbar oder beide lösbar, und zwar gilt das erstere oder das letztere, je nachdem A regulär oder singulär ist.*

Ferner liefert der in Satz 49 [81], 51 [82], 53 [92] enthaltene Tatsachenkomplex über (J) hier, zusammengefaßt, folgendes Resultat:

Satz (49, 51, 53) a. *Das Gleichungssystem* (J) *mit (n, n)-reihiger Matrix A ist genau dann für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ rechts und genau dann sogar eindeutig lösbar, wenn A regulär ist.*

Beweis. a) Es sei A regulär.

1. Dann ist (J) nach Satz 53 [92] für beliebiges $\mathfrak{a}$ lösbar, weil (H') nach Satz (54, 55, 56) a unlösbar ist, also die einschränkende Bedingung von Satz 51 (Zusätze) [83] für $\mathfrak{a}$ fortfällt.

2. Ferner ist dann (J) nach Satz 49 [81] eindeutig auflösbar, weil (H) nach Satz (54, 55, 56) a unlösbar ist.

b) Es sei A singulär.

1. Dann existiert nach Satz (54, 55, 56) a eine Lösung $\mathfrak{x}' (\neq 0)$ von (H'). Ist darin $x'_i \neq 0$, also $\mathfrak{x}'\mathfrak{e}_i = x'_i \neq 0$, so ist (J) nach Satz 51, Zusatz 1 [83] für den Vektor $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_i$ unlösbar, also nicht für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ lösbar.

2. Ferner ist (J) nach Satz 49 [81], wenn überhaupt, dann nicht eindeutig lösbar, weil (H) nach Satz (54, 55, 56) a lösbar ist.

[1]) Der andere Grenzfall $r = 0$ verlohnt seiner Trivialität halber keiner besonderen Hervorhebung.

Die beiden erhaltenen Sätze ergeben noch durch Elimination der Alternative (d. h. der kontradiktorisch entgegengesetzten Aussagen) „A ist regulär" oder „A ist singulär":

Zusatz. *Es besteht die* Alternative: *Entweder ist* (J) *einschränkungslos und eindeutig lösbar, oder es sind* (H) *und* (H′) *lösbar.*

Für den ersten Fall dieser Alternative, d. h. für reguläres A, können wir schließlich eine über die Resultate von § 13 hinausgehende, elegante Aussage betreffend die Abhängigkeit der dann stets vorhandenen, eindeutig bestimmten Lösung $\mathfrak{x}$ von (J) von dem rechtsstehenden Vektor $\mathfrak{a}$ machen. Wir bezeichnen in diesem Zusammenhang $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{x}^*$ und beweisen:

Satz 57. *Ist $A = (a_{ik})$ eine (n, n)-reihige reguläre Matrix, so existiert eine eindeutig bestimmte (n, n)-reihige Matrix A^* derart, daß die stets vorhandene und eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}$ des Gleichungssystems*

$$\text{(J)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k \doteq x_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A in ihrer Abhängigkeit von den rechtsstehenden x_i^* durch die Formeln

$$(\mathfrak{J}^*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^*\, x_k^* = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A^* gegeben wird. A^* ist ebenfalls regulär, und es gilt $(A^*)^* = A$, d. h. das den Formeln $(\mathfrak{J}^*)$ entsprechende Gleichungssystem

$$\text{(J}^*\text{)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^*\, x_k^* \doteq x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A^* für die Unbekannten x_k^* mit den rechten Seiten x_i wird durch die dem Gleichungssystem (J) *entsprechenden Formeln*

$$(\mathfrak{J}) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = x_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A gelöst.

Beweis[1]. a) Sind die n Vektoren $\mathfrak{a}_{\cdot k}^* = (a_{1k}^*, \ldots, a_{nk}^*)$ die Lösungen von (J) für die speziellen rechten Seiten $\mathfrak{e}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, so

[1]) Der Leser setze in diesem Beweise, wie im Satz geschehen, zum besseren Verständnis des Zusammenhangs vor jedes (J), (J*) das Wort Gleichungssystem, vor jedes $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}^*)$ das Wort Formeln.

folgt nach Satz 47 [76] sofort, daß das lineare Kompositum $\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \mathfrak{a}_{\cdot k}^*$ eine, also die Lösung von (J) für das entsprechende lineare Kompositum $\mathfrak{x}^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \mathfrak{e}_k$ ist. Die Darstellung von $\mathfrak{x}$ durch die $\mathfrak{a}_{\cdot k}^*$ geht aber, ausführlich geschrieben, in ($\mathfrak{J}^*$) über. Es existiert daher eine (n, n)-reihige Matrix A^* mit der im ersten Teil des Satzes genannten Eigenschaft.

b) Ist $\overline{A}^* = (\overline{a}_{ik}^*)$ eine weitere Matrix mit dieser Eigenschaft, so daß also ($\mathfrak{J}^*$) und das mit $\overline{A}^*$ gebildete ($\overline{\mathfrak{J}}^*$) für alle $\mathfrak{x}^*$ jeweils dasselbe $\mathfrak{x}$ rechts liefern, so folgt speziell für $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{e}_k$, daß die k-ten Spalten $\overline{\mathfrak{a}}_{\cdot k}^*$ und $\mathfrak{a}_{\cdot k}^*$ von $\overline{A}^*$ und $\overline{A}^*$ übereinstimmen $(k = 1, \ldots, n)$, und daraus $\overline{A}^* = A^*$, d. h. die eindeutige Bestimmtheit von A^* durch die im ersten Teil des Satzes genannte Eigenschaft.

c) Wird umgekehrt $\mathfrak{x}$ irgendwie gewählt und $\mathfrak{x}^*$ dazu so bestimmt, daß ($\mathfrak{J}$) besteht, so muß nach a) auch ($\mathfrak{J}^*$) bestehen (weil eben dann $\mathfrak{x}$ die Lösung von (J) für das so bestimmte $\mathfrak{x}^*$ ist). Anders ausgedrückt, es liefert ($\mathfrak{J}$) für jedes beliebige $\mathfrak{x}$ eine Lösung von (J*). Dessen Matrix A^* ist also nach Satz (49, 51, 53) a regulär, und ferner $(A^*)^* = A$.

Im Hinblick auf die charakteristische Eigenschaft der Matrix A^* aus Satz 57 definieren wir noch:

Definition 33. *Die nach Satz* 57 *durch eine* (n, n)*-reihige reguläre Matrix* A *eindeutig bestimmte Matrix* A^* *heißt die* lösende Matrix *von* A.

§ 15. Die Tragweite der determinantenfreien linearen Algebra

Durch die Resultate aus §§ 11—13 haben wir die Aufgabe der linearen Algebra § 5, (1) in theoretischer wie praktischer Hinsicht vollständig gelöst.

In theoretischer Hinsicht haben wir für das Gleichungssystem (J) eine notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung (Satz 51 [82], 53 [92]) sowie eine genaue Kenntnis der Struktur der Lösungsgesamtheit (Satz 49 [81] verbunden mit Satz 50 [81], 54 [93]) gewonnen.

In praktischer Hinsicht haben wir aus endlich vielen Schritten bestehende, konstruktive Verfahren zur Entscheidung über die Lösbarkeit (Beweis von Satz 52 [85], Zusatz zu Satz 53 [93]) sowie zur Bestimmung der Lösungsgesamtheit (Beweis von Satz 52 [85], 53 [92], 54 [93]) des Gleichungssystems (J) entwickelt.

Diese Bemerkungen beziehen sich auch auf den in § 14 behandelten Spezialfall. Insbesondere wird über die dortige Alternative dadurch entschieden, ob das Transformationsverfahren aus § 12 erst nach n Schritten oder schon früher zum Abschluß kommt, und die n Spalten der lösenden Matrix werden durch Auflösung der speziellen Gleichungssysteme (J) mit den n Einheitsvektoren als rechten Seiten gewonnen.

Trotz aller dieser Errungenschaften bleibt in theoretischer wie praktischer Hinsicht noch etwas zu wünschen übrig.

In theoretischer Hinsicht ist der Beweis von Satz 55 [97] insofern unbefriedigend, als er keine tiefere Einsicht in den wahren Grund für das Übereinstimmen der Maximalanzahlen linear unabhängiger Zeilen und Spalten einer Matrix liefert. Man würde sich eine neue, in den Zeilen und Spalten symmetrische Definition dieser Anzahl wünschen, aus der sich ihre beiden bisherigen Bedeutungen durch ein und dieselbe Schlußweise folgern lassen.

In praktischer Hinsicht sind die entwickelten Verfahren insofern unbefriedigend, als sie mit Willkürlichkeiten behaftet sind und weder die Lösbarkeitsentscheidung noch die Lösungsgesamtheit in geschlossener Form liefern. Man würde sich dafür Formeln wünschen, die nur aus den Koeffizienten und rechten Seiten des Gleichungssystems in einheitlicher Form aufgebaut sind.

Diese Wünsche werden nun durch die *Determinantenlehre* erfüllt.

Der Grund, weswegen wir hier, von dem bis zur ersten Auflage dieses Bändchens fast immer üblichen Wege abweichend, nicht von vornherein diese Determinantenlehre zur Herleitung aller bisherigen Resultate verwendet haben, ist ein doppelter. Einerseits erscheint bei der eben angedeuteten Behandlungsart der an die Spitze gestellte Determinantenbegriff als etwas Fremdartiges, in gar keiner Beziehung zu dem zu lösenden Problem Stehendes, so daß die mit ihm gewonnenen Resultate überraschend wirken und aus ihrem Sinnzusammenhang gelöst erscheinen, während die von uns eingeschlagene Methode dem Problem durchaus angepaßt ist und die Zusammenhangsfäden zwischen den Sätzen 49—56 in voller Klarheit hervortreten läßt. Andererseits aber hat der entwickelte determinantenfreie Sätzekomplex der linearen Algebra in neuerer Zeit ein besonderes Interesse gewonnen, da er allein es ist, der sich mit allen seinen Beweisen fast wörtlich auf die entsprechenden Probleme für unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten und auf die damit eng zusammenhängende Theorie der linearen Integralgleichungen übertragen läßt, während der Begriff der Determinante sich dort, abgesehen von Spezialfällen, als zu eng erweist. Im übrigen ist die Schönheit und Geschlossenheit der determinantenfreien Theorie, wie sie vorstehend entwickelt wurde, Rechtfertigung genug für ihre gesonderte Behandlung.

IV. Lineare Algebra mit Determinanten

§ 16. Permutationsgruppen

In den Beweisen des vorigen Abschnitts haben wir mehrfach Umordnungen der Zeilen oder Spalten einer Matrix vorgenommen. Der in diesem Abschnitt einzuführende Determinantenbegriff beruht nun in sachlicher Hinsicht auf solchen Umordnungen, oder genauer auf gewissen dabei vorliegenden Verhältnissen. Wir müssen uns daher, ehe wir an die Entwicklung der Determinantenlehre gehen, zuvor mit diesen Verhältnissen vertraut machen.

Der Begriff *Umordnung* oder *Permutation* ist rein mengentheoretisch. Er geht davon aus, daß jede Menge zu sich selbst gleichmächtig ist [§ 2, (II)], also sich zum mindesten auf eine Weise eineindeutig sich selbst zuordnen läßt (indem nämlich jedes Element sich selbst zugeordnet wird), und entsteht durch Betrachtung irgendeiner derartigen Zuordnung:

Definition 34. *Unter einer* Permutation *einer Menge* M *versteht man irgendeine eineindeutige Zuordnung mit bestimmter Zuordnungsrichtung von* M *zu sich selbst, unter* Ausführung *oder* Anwendung *der Permutation das Ersetzen der Elemente von* M *durch die ihnen zugeordneten.*

Wir unterscheiden Permutationen nach Def. 34 sinngemäß vermöge der ihnen zugrunde liegenden Zuordnungen unter Berücksichtigung der Zuordnungsrichtung, nennen also zwei Permutationen dann und nur dann gleich, wenn jedem Element bei beiden dasselbe Element zugeordnet ist. Natürlich können wir zur eindeutigen Beschreibung einer Permutation sowohl die Mitteilung der sämtlichen Zuordnungen als auch die der sämtlichen, bei ihrer

Ausführung zu machenden Ersetzungen (Übergänge) verwenden; das sind eben nur zwei verschiedene Vorstellungsweisen für ein- und dieselbe formale Tatsache. Auf die Reihenfolge, in der diese Mitteilungen gemacht werden, kommt es selbstverständlich nicht an.

Über die Permutationen einer Menge beweisen wir nun:

Satz 58. *Die sämtlichen Permutationen einer Menge bilden eine Gruppe, wenn unter dem Produkt zweier Permutationen die durch Nacheinanderausführung entstehende Permutation verstanden wird. Das Einselement dieser Gruppe ist die Permutation, bei der jedes Element in sich selbst übergeht, die Reziproke zu einer Permutation erhält man durch Umkehrung der Zuordnungsrichtung.*

Beweis. § 6, (a) ist im Sinne des zuvor Bemerkten erfüllt.

§ 6, (b) ist erfüllt. Denn die Nacheinanderausführung zweier Permutationen, d. h. die jeweilige Ersetzung von a durch a'', wenn a bei der ersten in a', a' bei der zweiten in a'' übergeht, liefert für jedes beliebige Permutationspaar wieder eine Permutation.

§ 6, (1) stimmt, weil (logische) Ersetzungen dem assoziativen Gesetz genügen, § 6, (2a) und (2b) sind ersichtlich auf die im Satz angegebene Art erfüllt.

Satz 59. *Sind* M *und* $\overline{\mathsf{M}}$ *gleichmächtige Mengen, so sind die Gruppen der Permutation von* M *und* $\overline{\mathsf{M}}$ *isomorph.*

Beweis. Ordnet man jeder Permutation von M diejenige von $\overline{\mathsf{M}}$ zu, die durch Ausführung eines eineindeutigen Überganges von M zu $\overline{\mathsf{M}}$ aus ihr entsteht, so genügt diese Zuordnung der Bedingung (2) von Satz 23 [55]. Die leichte Einzelausführung bleibe dem Leser überlassen.

Auf Grund von Satz 59 ist nach § 2, (II) und Def. 17 [55] der Typus der Permutationsgruppe von M allein durch die Kardinalzahl von M, speziell für den Fall eines endlichen M allein durch die Anzahl der Elemente von M bestimmt. UnterNichtunterscheidung isomorpher Gruppen definieren wir demgemäß:

Definition 35. *Die Gruppe aller Permutationen einer endlichen Menge von n unterschiedenen Elementen heißt die* symmetrische Gruppe[1]) *von n Elementen. Sie werde mit* $\mathfrak{S}_n$ *bezeichnet.*

Mit dieser Gruppe $\mathfrak{S}_n$ haben wir uns hier ausschließlich zu beschäftigen. Da man jede Menge von n Elementen eineindeutig der speziellen Menge der n Ziffern $1, \ldots, n$ zuordnen kann, genügt es nach Satz 59, diese Ziffernmenge für das Studium von $\mathfrak{S}_n$ zugrundezulegen. Man bezeichnet dann mit

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, \text{ kurz } \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

diejenige Permutation der Ziffern $1, \ldots, n$, bei der die Ziffer i in p_i übergeht $(i = 1, \ldots, n)$. Ist $a_1, \ldots, a_n$ irgendeine Menge von n Elementen, die durch Numerierung ihrer Elemente eineindeutig der Ziffernmenge $1, \ldots, n$ zugeordnet ist, so kann man die obige Permutation auch als eine solche der n Elemente $a_1, \ldots, a_n$ ansehen, nämlich die, bei der a_i in a_{p_i} übergeht $(i = 1, \ldots, n)$.

Die in Def. 35 für Permutationen geforderte Eineindeutigkeit [Bedingungen § 2, (δ), (δ'), (ε), (ε')] ist, auf die obige Schreibweise $\begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, \ldots, n)$ angewandt, die präzise Formulierung der Ausdrucksweise: $p_1, \ldots, p_n$ sind die Ziffern $1, \ldots, n$ abgesehen von der Reihenfolge oder in irgendeiner Reihenfolge, der wir uns im folgenden häufig bedienen werden. Die sämtlichen Reihenfolgen von $1, \ldots, n$ sind so den sämtlichen Permutationen von $1, \ldots, n$ eineindeutig zugeordnet[2]).

---

[1]) Die Bezeichnung symmetrische Gruppe ist so zu verstehen, daß „etwas" symmetrisch im geläufigen Sinne des Wortes in bezug auf n Elemente ist, wenn es bei Anwendung aller Permutationen dieser Elemente erhalten bleibt. In diesem Sinne nannten wir z. B. in § 4 $I[x_1, \ldots, x_n]$ symmetrisch in $x_1, \ldots, x_n$. Vgl. auch **2**, Satz 131 [153] (Satz von den symmetrischen Funktionen).

[2]) In der Schulmathematik pflegt man die Reihenfolgen selbst, nicht den Prozeß ihrer Herstellung, Permutationen von $1, \ldots, n$ zu nennen.

Da nach der Bemerkung zu Def. 34 die Mitteilungsreihenfolge der einzelnen Übergänge einer Permutation gleichgültig ist, kann ebensogut

$$\begin{pmatrix} q_1 \dots q_n \\ p_{q_1} \dots p_{q_n} \end{pmatrix}, \text{ kurz } \begin{pmatrix} q_i \\ p_{q_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n),$$

zur Mitteilung obiger Permutation verwendet werden, wenn $q_1, \dots, q_n$ irgendeine Reihenfolge von $1, \dots, n$ ist. Mittels dieser Bemerkung kann die Multiplikationsregel von Satz 56 für Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ durch die Formel

$$\begin{pmatrix} i \\ q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ p_{q_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n)$$

ausgedrückt werden, und ebenso läßt sich die Reziproke zu $\begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$ als $\begin{pmatrix} p_i \\ i \end{pmatrix}$ angeben.

$\mathfrak{S}_1$ ist natürlich die Einsgruppe $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}_2$ die aus den zwei Elementen $E = \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 1\,2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 2\,1 \end{pmatrix}$ (mit $P^2 = E$) bestehende abelsche Gruppe (vgl. § 6, Beispiel 3), für $n \geqq 3$ ist dagegen $\mathfrak{S}_n$ sicher nicht abelsch; denn es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots \\ 2\,1\,3 \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots \\ 3\,2\,1 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots \\ 2\,3\,1 \dots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots \\ 3\,2\,1 \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots \\ 2\,1\,3 \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots \\ 3\,1\,2 \dots \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{S}_3$ ist übrigens isomorph zu der in §§ 6, 7, Beispiele 4 behandelten Gruppe von 6 Elementen, wie man erkennt, wenn man den dortigen Drehungen die durch sie erzeugten Permutationen der Dreiecksecken zuordnet.

Als aus den Elementen bekannt dürfen wir voraussetzen:

Satz 60. *$\mathfrak{S}_n$ ist endlich und hat die Ordnung $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$.*

Wir brauchen übrigens im folgenden nur die Endlichkeit, nicht die Ordnung von $\mathfrak{S}_n$.

Wenn dieses auch nach dem hier Bemerkten auf dasselbe hinausläuft, so ist es doch einerseits für die Aussprache der Verknüpfungsregel von Satz 58 unbequem und steht andererseits nicht in Einklang mit der wörtlichen Bedeutung von Permutation (Vertauschung) als einer Handlung.

Wir definieren jetzt eine für die Definition der Determinanten grundlegende Unterscheidung der Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ in zwei Arten.

Dazu, und später auch in anderem Zusammenhange, müssen wir Teilmengen der für die Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ zugrundegelegten Ziffernmenge $1, \ldots, n$ betrachten. Solche Teilmengen nennen wir, indem wir uns dem aus den Elementen geläufigen Sprachgebrauch anschließen, *Kombinationen* der Ziffern $1, \ldots, n$, und zwar *von der ν-ten Ordnung*, wenn sie aus ν Ziffern bestehen. Wir bezeichnen die aus den Ziffern $i_1, \ldots, i_\nu$ bestehende Kombination mit $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$. In dieser Bezeichnung liegt dann nach ihrer Erklärung: 1.) $i_1, \ldots, i_\nu$ sind verschiedene Ziffern der Reihe $1, \ldots, n$, 2.) $\{i_1, \ldots, i_\nu\} = \{i'_1, \ldots, i'_\nu\}$ dann und nur dann, wenn die Ziffern $i_1, \ldots, i_\nu$ bis auf die Reihenfolge die Ziffern $i'_1, \ldots, i'_\nu$ sind, also durch eine Permutation aus diesen hergeleitet werden können. Auf die Mitteilungsreihenfolge der Ziffern einer Kombination kommt es also nicht an. Zwei elementfremde Kombinationen von $1, \ldots, n$, deren Vereinigungsmenge die ganze Menge $1, \ldots, n$ ist, heißen *komplementär*. Die komplementäre Kombination zu $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$ bezeichnen wir meist mit $\{i_{\nu+1}, \ldots, i_n\}$. Die Anzahl der verschiedenen Kombinationen ν-ter Ordnung von $1, \ldots, n$ bezeichnen wir wie üblich mit $\binom{n}{\nu}$. Auf ihren Wert, der sich beiläufig im Beweis von Satz 68 [121] ergeben wird, kommt es nicht an.

Es gilt zunächst:

Satz 61. *Es sei $1 \leqq \nu \leqq n$. Wendet man auf die sämtlichen $\binom{n}{\nu}$ Kombinationen ν-ter Ordnung der Ziffern $1, \ldots, n$ eine Permutation $P = \binom{i}{p_i}$ dieser Ziffern an, d. h. ersetzt man jede solche $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ durch $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_\nu}\}$, so entstehen wieder diese sämtlichen $\binom{n}{\nu}$ Kombinationen, m. a. W. es wird durch P eine Permutation der Menge dieser Kombinationen bewirkt.*

Beweis. Offenbar entstehen durch Anwendung von P die sämtlichen $\binom{n}{\nu}$ Kombinationen ν-ter Ordnung der Menge $p_1, \ldots, p_n$, die aber mit der Menge $1, \ldots, n$ identisch ist.

Wir betrachten nun speziell die Kombinationen 2-ter Ordnung von $1, \ldots, n$. Denken wir uns in jeder solchen $\{i, k\}$ die beiden Ziffern i und k in ihrer natürlichen Reihenfolge angeordnet (also $i < k$ vorausgesetzt), so wird diese Anordnungsrelation bei Anwendung einer Permutation nicht notwendig erhalten bleiben, da ja sehr wohl Ziffernpaare i, k mit $i < k$ aber $p_i > p_k$ existieren können. Dieser Umstand gibt den Anlaß zu der schon angekündigten, für die Determinantendefinition wichtigen Unterscheidung der Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ in zwei Arten:

Definition 36. *Es sei* $n > 1$ *und* $P = \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$ *eine Permutation von* $1, \ldots, n$. *Das Auftreten eines Ziffernpaares* i, k *mit* $i < k$ *aber* $p_i > p_k$ *heißt eine* Inversion *von* P. *Man nennt* P gerade *oder* ungerade, *je nachdem die Anzahl* ν *ihrer Inversionen gerade oder ungerade ist, und setzt* $\operatorname{sgn} P = (-1)^\nu$, *also* $= 1$ *oder* $= -1$, *je nachdem* P *gerade oder ungerade*[1]) *ist.*

Für $n = 1$, *wo nur die Permutation* $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *vorhanden ist, werde* $\operatorname{sgn} E = 1$ *gesetzt.*

sgn ist Abkürzung für das lateinische signum (Vorzeichen). Für reelle Zahlen $p \neq 0$ setzt man bekanntlich $\operatorname{sgn} p = 1$ oder -1, je nachdem $p > 0$ oder < 0 ist.

Es ist leicht zu sehen, daß es für $n > 1$ wirklich gerade und ungerade Permutationen gibt. Es ist z. B. $E = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$ gerade, $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \ldots n \\ 2\,1\,3 \ldots n \end{pmatrix}$ ungerade.

Wir beweisen nun die für unsere Anwendung grundlegende Tatsache:

Satz 62. *Für zwei Permutationen* P *und* Q *von* $1, \ldots, n$ *gilt*

$$\operatorname{sgn}(PQ) = \operatorname{sgn} P \operatorname{sgn} Q.$$

[1] Hier gilt dasselbe, wie bei § 9, Beisp. 4 (Anm. 2) [66].

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei $n > 1$. Für die Abzählung der Inversionen einer Permutation $P = \binom{i}{p_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ sind dann nach Def. 36 alle Ziffernpaare i, k mit $i < k$ der Reihe $1, \ldots, n$, d. h. also alle Kombinationen 2-ter Ordnung $\{i, k\}$ mit der Anordnungsvorschrift $i < k$ für ihre Ziffern heranzuziehen. Läßt man diese Anordnungsvorschrift fort, so liefert eine Kombination $\{i, k\}$ genau dann eine Inversion von P, wenn die (von Null verschiedenen) ganzen Zahlen $i - k$ und $p_i - p_k$ verschiedene Vorzeichen haben, d. h. wenn $\frac{i - k}{p_i - p_k} < 0$ ist. Demnach kann man sgn P auch durch die Formel

$$\operatorname{sgn} P = \prod_{\{i,\, k\}} \operatorname{sgn} \frac{i - k}{p_i - p_k}$$

erklären, wo das Produkt rechts über alle verschiedenen Kombinationen 2-ter Ordnung von $1, \ldots, n$ (gleichgültig in welcher Reihenfolge ihre beiden Ziffern genommen werden) zu erstrecken ist. Denn die Anzahl der Faktoren -1 dieses Produkts ist nach dem Bemerkten gerade die Anzahl ν der Inversionen von P. Ist nun $Q = \binom{i}{q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gilt

$$\operatorname{sgn} Q = \prod_{\{i,\, k\}} \operatorname{sgn} \frac{i - k}{q_i - q_k} = \prod_{\{i,\, k\}} \operatorname{sgn} \frac{p_i - p_k}{q_{p_i} - q_{p_k}}$$

letzteres, weil nach Satz 61 $\{p_i, p_k\}$ mit $\{i, k\}$ die sämtlichen verschiedenen Kombinationen 2-ter Ordnung von $1, \ldots, n$ durchläuft und es für das Produkt auf die Reihenfolge der Faktoren nicht ankommt. Da nun bekanntlich für reelle Zahlen $p, q \neq 0$ die Regel des Satzes, d. h. $\operatorname{sgn}(p\,q) = \operatorname{sgn} p \operatorname{sgn} q$ gilt, folgt durch gliedweise Multiplikation der beiden Produkte für sgn P und sgn Q

$$\operatorname{sgn} P \operatorname{sgn} Q = \prod_{\{i,k\}} \left[\operatorname{sgn} \frac{i-k}{p_i - p_k} \operatorname{sgn} \frac{p_i - p_k}{q_{p_i} - q_{p_k}}\right]$$
$$= \prod_{\{i,k\}} \operatorname{sgn} \frac{i-k}{q_{p_i} - q_{p_k}}\,.$$

Das rechtsstehende Produkt ist aber sgn (PQ), weil

$$PQ = \begin{pmatrix} i \\ q_{p_i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ ist.}$$

Als unmittelbare Folge aus Satz 62 nennen wir zwecks späterer Anwendung noch:

Satz 63. *Es gilt* sgn $P =$ sgn P^{-1}.

Beweis. Nach Satz 62 ist sgn P sgn $P^{-1} =$ sgn (PP^{-1}) $=$ sgn $E = 1$, weil $E = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ 1 \ldots n \end{pmatrix}$ offenbar keine Inversionen hat.

Der in Def. 36 erklärte Begriff Inversion und die darauf gegründete Erklärung von sgn P ist nicht allein durch die Permutation P der Menge $1, \ldots, n$ bestimmt, sondern bezieht sich überdies auf eine bestimmte Grundreihenfolge dieser Menge, nämlich die natürliche Reihenfolge $1, \ldots, n$.

Dies Beziehen auf die natürliche Reihenfolge $1, \ldots, n$ als Grundreihenfolge wird besonders deutlich, wenn man die aus Def. 36 zu entnehmende Regel zum Abzählen der Inversionen von $P = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ p_1 \ldots p_n \end{pmatrix}$ in folgende Form setzt: Man schreibe die obere Zeile von P in der natürlichen Reihenfolge und bestimme die Anzahl derjenigen Ziffernpaare der unteren Zeile, die dort in umgekehrter Reihenfolge wie in der oberen Zeile stehen. Würde man dieselbe Regel bei irgendwie anders angeordneter oberer Zeile von P anwenden, so würde man i. a. zu einer anderen Anzahl solcher Ziffernpaare der unteren Zeile gelangen. So stehen z. B. bei der Schreibweise:

$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,3\,2 \end{pmatrix}$ unten die 4 Ziffernpaare $\{41\}$, $\{43\}$, $\{42\}$, $\{32\}$ umgekehrt wie oben,

$\begin{pmatrix} 3\,1\,4\,2 \\ 3\,4\,2\,1 \end{pmatrix}$ unten die 2 Ziffernpaare $\{41\}$, $\{21\}$ umgekehrt wie oben.

Für die Bestimmung von sgn P bedeutet das hier keinen Unterschied, weil beide Anzahlen gerade sind. Der folgende Satz zeigt, daß dies allgemein so ist.

Satz 64. *Das in Def.* 36 *erklärte* sgn P *ist in folgendem Sinne von der bei seiner Erklärung zugrunde gelegten natürlichen Reihenfolge der Ziffern* $1, \ldots, n$ *unabhängig: Ist* $q_1, \ldots, q_n$ *irgendeine Reihenfolge von* $1, \ldots, n$, *und wird*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \ldots & q_n \\ p_{q_1} & \ldots & p_{q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \ldots & q_n \\ q_{r_1} & \ldots & q_{r_n} \end{pmatrix},$$

$$\textit{also } p_{q_i} = q_{r_i} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

gesetzt, so daß die hierdurch eingeführte Permutation $R = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ r_1 & \ldots & r_n \end{pmatrix}$ *angibt, wie sich die Reihenfolge* $q_1, \ldots, q_n$ *infolge von* P *ändert, so gilt*

$$\operatorname{sgn} P = \operatorname{sgn} R.$$

Beweis. Wird $Q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ q_1 & \ldots & q_n \end{pmatrix}$ gesetzt, so folgt aus der Permutationsgleichung des Satzes durch vordere Multiplikation mit Q

$$QP = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ p_{q_1} & \ldots & p_{q_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ q_{r_1} & \ldots & q_{r_n} \end{pmatrix} = RQ$$

und daraus nach Satz 62 sgn Q sgn $P =$ sgn R sgn Q ($=$ sgn Q sgn R), also wegen sgn $Q \neq 0$ die Behauptung.

Die Inversionen der im Satz eingeführten Permutation R bedeuten ersichtlich diejenigen Ziffernpaare, die in der unteren Zeile von P umgekehrt wie in der oberen stehen, wenn die obere in der Reihenfolge $q_1, \ldots, q_n$ geschrieben wird, so daß also durch Satz 64 die in der Bemerkung vorher aufgestellte Behauptung bewiesen ist. — Es sei darauf hingewiesen, daß die Permutation R des Satzes 64 aus P durch Transformation mit Q^{-1} entsteht (vgl. die Bem. zu Satz 28 [60]). — Nach Satz 64 hat es nunmehr einen Sinn, von *geraden und ungeraden Permutationen von n Elementen* ohne Angabe einer Grundreihenfolge zu reden, in bezug auf die „gerade" und „ungerade" gemeint sind.

Wir heben zum Schluß noch die folgende Tatsache hervor, die wir zwar hier nicht brauchen werden, die aber doch eine tiefere Einsicht in unsere Einteilung der Permutationen von n Elementen in gerade und ungerade gewährt:

Satz 65. *Die sämtlichen geraden Permutationen von n Elementen* ($n > 1$) *bilden einen Normalteiler* $\mathfrak{A}_n$ *von* $\mathfrak{S}_n$ *vom Index* 2, *die sog.* alternierende Gruppe *von n Elementen. Die beiden Restklassen, in die* $\mathfrak{S}_n$ *nach* $\mathfrak{A}_n$ *zerfällt, sind die der geraden und der ungeraden Permutationen, deren es somit gleichviel* $\left(\textit{nämlich je } \frac{n!}{2}\right)$ *gibt.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus Satz 35 [64], weil offenbar die Relation $P \equiv Q$, wenn $\operatorname{sgn} P = \operatorname{sgn} Q$, eine Kongruenzrelation in der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ darstellt, der als Klasseneinteilung von $\mathfrak{S}_n$ die Einteilung in die geraden und die ungeraden Permutationen entspricht.

Daß $\mathfrak{A}_n$ Normalteiler ist, folgt übrigens auch aus Satz 64. Denn die Gleichung $QP = RQ$ aus seinem Beweise besagt ja in der Gestalt $QPQ^{-1} = R$, verbunden mit dem Resultat $\operatorname{sgn} P = \operatorname{sgn} R$, daß mit P auch alle seine konjugierten R gerade sind (Satz 32 [62]). Umgekehrt läßt sich übrigens der Satz 64 auch aus dem Resultat von Satz 65, daß $\mathfrak{A}_n$ Normalteiler vom Index 2 ist, erschließen (Satz 32).

§ 17. Determinanten

Wir müssen im Rahmen dieser Darstellung auf eine sich den Methoden von III anschließende genetische Einführung der Determinanten[1]) verzichten, stellen vielmehr unmittelbar die folgende Definition hin:

Definition 37. *Unter der* Determinante *der* (n, n)-*reihigen Matrix* $A = (a_{ik})$ *versteht man den Ausdruck*

$$|A| = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P a_{1p_1} \dots a_{np_n}{}^{2)},$$

[1]) Durch eine solche an den Beweis von Satz 52 anknüpfende Einführung würde der Determinantenbegriff seine Fremdartigkeit gegenüber den Begriffsbildungen und Methoden aus III verlieren und so das Verständnis dafür vertieft werden, daß unser jetziger Weg zu denselben Ergebnissen führt.

[2]) Über die Bedeutung von $\operatorname{sgn} P = \pm 1$ als „Faktor" vor einem Körperelement siehe den Schluß von § 1.

erstreckt über alle Permutationen $P = \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$ *der Spaltenindizes* $1, \ldots, n$.

Ausführlich gesagt wird hiernach die Determinante $|A|$ von A in folgender Weise gebildet: Bei festgehaltenen ersten (Zeilen-)Indizes wende man in dem Produkt $a_{11} \ldots a_{nn}$ der n in der sog. *Hauptdiagonale* von A stehenden Glieder auf die zweiten (Spalten-)Indizes alle Permutationen $P = \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$ an, wodurch also Produkte der Form $a_{1p_1} \ldots a_{np_n}$ (in der Anzahl $n!$) entstehen, und bilde dann die Differenz

$$\sum_{P \text{ in } \mathfrak{A}_n} a_{1p_1} \ldots a_{np_n} - \sum_{P \text{ nicht in } \mathfrak{A}_n} a_{1p_1} \ldots a_{np_n} = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P a_{1p_1} \ldots a_{np_n}$$

der Summe aller den geraden Permutationen entsprechenden und der Summe aller den ungeraden Permutationen entsprechenden solchen Produkte.

Speziell wird so

$$\text{für } n = 1: \; |a_{11}| = a_{11}, \quad \text{für } n = 2: \; \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\text{für } n = 3: \quad \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{21} + a_{13}a_{21}a_3 \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{cases}$$

Für $n = 3$ kann man die Bildung auch nach folgender Regel vollziehen:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ \diagdown & \times & \rangle & \langle & \diagup \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ \diagup & \times & \rangle & \langle & \diagdown \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Man denke sich die beiden ersten Spalten noch einmal rechts an A angefügt, bilde dann die Produkte gemäß den 6 eingezeichneten Parallelen zu den beiden Diagonalen von A und subtrahiere von der Summe der Produkte in der Richtung $\diagdown$ (Hauptdiagonale) die Summe der Produkte in der Richtung $\diagup$ (Nebendiagonale). Für $n = 2$ gilt ersichtlich eine entsprechende Regel, dagegen nicht mehr für $n > 3$.

Als oft gebrauchte, direkt aus Def. 37 zu entnehmende Formel für beliebiges n nennen wir noch:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n, \text{ speziell } \begin{vmatrix} e & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & e \end{vmatrix} = e.$$

Historisch ist man (Leibniz, Cramer u. a.) etwa in folgender Weise auf den Determinantenbegriff gekommen: Für 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\doteq a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\doteq a_2 \end{aligned}$$

ergibt die sog. Multiplikationsmethode die Forderungen

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 &\doteq a_{22}a_1 - a_{12}a_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 &\doteq a_{11}a_2 - a_{21}a_1, \end{aligned}$$

aus denen leicht die eindeutige Auflösbarkeit bei beliebigen a_1, a_2 folgt, falls der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist. Ebenso erhält man durch die Multiplikationsmethode für $n = 3, 4, \ldots$ gerade die Determinante $|a_{ik}|$ als Koeffizienten, wenn man aus den Linearformen links solche mit nur einer Unbestimmten x_k in einem einzigen Schritt linear zu komponieren sucht. Die so für $n = 2, 3, 4$ leicht zu bildenden Ausdrücke erlauben, das allgemeine Bildungsgesetz abzulesen (wenn man will, sogar durch Schluß von n auf $n + 1$ abzuleiten), und führen zu der oben gegebenen Definition. Wir müssen hier auch auf eine derartige induktive Einführung der Determinanten verzichten, werden vielmehr den angedeuteten Zusammenhang mit dem Auflösungsproblem der linearen Algebra im Falle $m = n$ streng deduktiv ableiten (§§ 20, 21), nachdem wir in §§ 17—19 die wichtigsten Eigenschaften der oben definierten Determinanten entwickelt haben.

In der Def. 37 spielen die Zeilen und Spalten von A eine unterschiedliche Rolle. Das ist aber nur scheinbar, denn es gilt:

Satz 66. *Eine (n, n)-reihige Matrix A und ihre transponierte A' haben gleiche Determinanten: $|A| = |A'|$. Die Determinante von A hängt somit von den Zeilen von A in gleicher Weise wie von den Spalten von A ab, und zu ihrer Definition kann neben der Formel von Def. 37 ebensogut die Formel*

$$|A| = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P a_{p_1 1} \ldots a_{p_n n},$$

erstreckt über alle Permutationen $P = \begin{pmatrix} i \\ p_i \end{pmatrix}$ der Zeilenindizes, dienen.

Beweis. Nach Def. 37 ist

$$|A'| = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P a_{p_1 1} \ldots a_{p_n n}.$$

Da die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts beliebig ist, dürfen wir in jedem Summanden auf die n Faktoren jeweils die Permutation P^{-1} anwenden. Ist $P^{-1} = \binom{p_i}{i} = \binom{i}{q_i} = Q$, so erhalten wir so

$$|A'| = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P a_{1 q_1} \ldots a_{n q_n}.$$

Da nun einerseits $\operatorname{sgn} P = \operatorname{sgn} Q$ ist (Satz 63 [110]), andererseits Q mit P die ganze Gruppe $\mathfrak{S}_n$, jedes Element einmal, durchläuft (Satz 17 [51]), so wird auch

$$|A'| = \sum_{Q \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} Q a_{1 q_1} \ldots a_{n q_n} = |A|.$$

Auf die in Satz 66 zum Ausdruck kommende Symmetrie der Determinante $|A|$ bezüglich der Zeilen und Spalten von A gehen vom Standpunkt der Determinantenlehre die vom früheren Standpunkt nicht so recht verständlichen Symmetrien bezüglich Zeilen und Spalten in Satz 55, 56 [97] und Satz (54, 55, 56)a [99] letzten Endes zurück, wie sich im folgenden noch genauer ergeben wird.

Während Satz 66 die Abhängigkeit der Determinante $|A|$ von den Zeilen mit der von den Spalten von A vergleicht, sagt der folgende Satz etwas über die Abhängigkeit der Determinante $|A|$ von der Reihenfolge der Zeilen oder der Spalten von A aus:

Satz 67. *Entsteht A_1 aus der (n, n)-reihigen Matrix A durch eine Permutation R der Zeilen (Spalten), so ist*

$$|A_1| = \operatorname{sgn} R\, |A|,$$

also $|A_1| = |A|$ oder $|A_1| = -|A|$, je nachdem R gerade oder ungerade ist.

Beweis. Nach Satz 66 genügt es, den Beweis für den Fall zu führen, daß A_1 aus A durch eine Permutation $R = \binom{i}{r_i}$ der Zeilen entsteht. Es ist dann nach Def. 37

$$|A_1| = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P a_{r_1 p_1} \ldots a_{r_n p_n},$$

weil ja $a_{r_1 1}, \ldots, a_{r_n n}$ die n in der Hauptdiagonale von A_1 stehenden Glieder sind. Durch Anwendung der Permutation $R^{-1} = \binom{r_i}{i} = \binom{i}{s_i} = S$ auf die n Faktoren jedes Summanden und Anwendung von $\operatorname{sgn} R \operatorname{sgn} S = 1$ (Satz 63 [110]) erhält man

$$| A_1 | = \operatorname{sgn} R \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} S \operatorname{sgn} P \, a_{1 p_{s_1}} \ldots a_{n p_{s_n}},$$

wo also die Spaltenindizes jeweils durch die Permutation $\binom{i}{p_{s_i}} = SP = Q = \binom{i}{q_i}$ aus $1, \ldots, n$ entstehen. Da dann einerseits $\operatorname{sgn} S \operatorname{sgn} P = \operatorname{sgn} Q$ ist (Satz 62 [108]), andererseits Q mit P die ganze Gruppe $\mathfrak{S}_n$, jedes Element einmal, durchläuft (Satz 16 [51]), so wird auch

$$| A_1 | = \operatorname{sgn} R \sum_{Q \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} Q a_{1 q_1} \ldots a_{n q_n} = \operatorname{sgn} R \, | A |.$$

Die beiden Tatsachen aus Satz 66 und Satz 67 haben zur Folge, daß alle allgemeinen Sätze über Determinanten eine symmetrische Form haben, einerseits bezüglich der Worte Zeilen und Spalten, andererseits (bis auf ev. Vorzeichenunterschiede) bezüglich der einzelnen Zeilen sowohl wie der einzelnen Spalten. Wir werden uns das im folgenden, in entsprechender Weise wie schon im Beweis zu Satz 67, für die Beweise zu Nutze machen.

§ 18. Unterdeterminanten und Adjunkten Der Laplacesche Entwicklungssatz

Wir wollen in diesem und den folgenden Paragraphen den beiden Sätzen 66 und 67 des vorigen Paragraphen weitere, tiefer in die Struktur der Determinanten eindringende Sätze zur Seite stellen, die den doppelten Zweck haben, einerseits die Anwendung der Determinanten auf lineare Gleichungssysteme vorzubereiten, andererseits für die Berechnung der Determinanten brauchbarere Methoden zu entwickeln, als deren Definitionsformel es ist. Dazu definieren wir:

Definition 38. *Es seien A eine (n, n)-reihige Matrix, $1 \leqq \nu \leqq n-1$, $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ und $\{k_1, \ldots, k_\nu\}$ je eine Kombi-*

nation ν-ter Ordnung ihrer Zeilen und ihrer Spalten [1] $\{i_{\nu+1}, \ldots, i_n\}$ *und* $\{k_{\nu+1}, \ldots, k_n\}$ *die zugehörigen komplementären Kombinationen. Dann bezeichne, bzw. werde gesetzt und genannt:*

$$A_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}}$$

die durch Streichung der Zeilen $i_{\nu+1}, \ldots, i_n$ *und der Spalten* $k_{\nu+1}, \ldots, k_n$ *aus* A *entstehende* (ν, ν)*-reihige Matrix;*

$$\mathsf{A}_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}} = A_{\{i_{\nu+1}, \ldots, i_n\}, \{k_{\nu+1}, \ldots, k_n\}},$$

d. h. die durch Streichung der Zeilen $i_1, \ldots, i_\nu$ *und der Spalten* $k_1, \ldots, k_\nu$ *aus* A *entstehende* $(n-\nu, n-\nu)$*-reihige Matrix;*

$$a_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}} = | A_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}} |$$

Unterdeterminante *oder* Minor ν-ten Grades *oder* $(n-\nu)$-ter Ordnung *von* A;

$$\begin{aligned}\alpha_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}} &= (-1)^{i_1 + \cdots + i_\nu + k_1 + \cdots + k_\nu} | \mathsf{A}_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}} | \\ &= (-1)^{i_1 + \cdots + i_\nu + k_1 + \cdots + k_\nu} \; a_{\{i_{\nu+1}, \ldots, i_n\}, \{k_{\nu+1}, \ldots, k_n\}}\end{aligned}$$

Adjunkte $(n-\nu)$-ten Grades *oder* ν-ter Ordnung *von* A, algebraisches Komplement *oder* Adjunkte *zu*

$$a_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}, \{k_1, \ldots, k_\nu\}}.$$

Für die Grenzfälle $\nu = 0$ *und* $\nu = n$ *betrachten wir* e *bzw.* $| A |$ *als die einzigen Unterdeterminanten und Adjunkten* 0*-ten bzw.* n*-ten Grades.*

Die großen Buchstaben bezeichnen also Matrizen, die entsprechenden kleinen ihre Determinanten. Die lateinischen Buchstaben deuten das alleinige Beibehalten des Schnittes der in ihren Indizes genannten Zeilen und Spalten an, die griechischen das Streichen dieser Zeilen und Spalten, also das alleinige Beibehalten des Schnittes ihrer komplementären. Der Grad gibt die stehengebliebene Reihenzahl an, die Ordnung die gestrichene Reihenzahl. Für den besonders wichtigen Grenzfall $\nu = 1$ werde einfach $A_{ik}, a_{ik}, \mathsf{A}_{ik}, \alpha_{ik}$ für die $A_{\{i\}, \{k\}}, \ldots$ geschrieben. Bezüglich der a_{ik} ist das statthaft, weil die A_{ik} und

[1]) Wir teilen der Einfachheit halber Zeilen und Spalten durch bloße Angabe ihrer Indizes mit.

somit auch ihre Determinanten wirklich die Elemente a_{ik} von A sind.

Ferner setzen wir fest:

Definition 39. *Es mögen die Voraussetzungen von Def.* 38 *gelten, und es seien die* $\binom{n}{\nu}$ *Kombinationen* ν*-ter Ordnung der Ziffern* $1, \ldots, n$ *irgendwie in eine bestimmte Reihenfolge gesetzt. Unter jedesmaliger Zugrundelegung einer und derselben solchen Reihenfolge werde* $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ *als Zeilen- und* $\{k_1, \ldots, k_\nu\}$ *als Spaltenindex angesehen und demgemäß die* $\binom{n}{\nu}\binom{n}{\nu}$ *Unterdeterminanten* ν*-ten Grades* $a_{\{i_1, \ldots, i_\nu\},\, \{k_1, \ldots, k_\nu\}}$ *von* A *zu einer* $\left(\binom{n}{\nu}, \binom{n}{\nu}\right)$*-reihigen Matrix* $A^{(\nu)}$ *vereinigt, und ebenso die* $\binom{n}{\nu}\binom{n}{\nu}$ *Adjunkten* ν*-ter Ordnung* $\alpha_{\{i_1, \ldots, i_\nu\},\, \{k_1 \ldots, k_\nu\}}$ *von* A *zu einer* $\left(\binom{n}{\nu}, \binom{n}{\nu}\right)$*-reihigen Matrix* $\mathsf{A}^{(\nu)}$. *Man nennt* $A^{(\nu)}$ *die* ν-te abgeleitete Matrix *und* $\mathsf{A}^{(\nu)}$ *die* ν-te adjungierte Matrix von A *oder die* adjungierte Matrix zu $A^{(\nu)}$, *letzteres in Hinsicht darauf, daß die Glieder von* $\mathsf{A}^{(\nu)}$ *die Adjunkten zu den entsprechenden Gliedern von* $A^{(\nu)}$ *genannt waren.*

Im Falle $\nu = 1$, wo die $\binom{n}{1}$ Kombinationen 1-ter Ordnung einfach die n Ziffern $1, \ldots, n$ sind, sei deren natürliche Reihenfolge für die Bildung von $A^{(1)}$ und $\mathsf{A}^{(1)}$ zugrunde gelegt. Dann wird $A^{(1)}$ die Matrix A selbst. Wir schreiben entsprechend für $\mathsf{A}^{(1)}$ einfach A. Die Bildung dieser 1-ten adjungierten Matrix von A oder adjungierten Matrix zu A geschieht demnach nach folgender Regel:

Man ersetze jedes Element a_{ik} von A durch die Determinante derjenigen $(n-1, n-1)$-reihigen Matrix A_{ik}, die durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte aus A entsteht, und setze den Vorzeichenfaktor $(-1)^{i+k}$ dazu. Die Verteilung dieser Vorzeichenfaktoren 1 und -1 kann man sich dadurch veranschaulichen, daß man das quadratische Schema von A mit 1 und -1 ebenso überdeckt, wie ein Schachbrett mit schwarzen und weißen Feldern, und dabei mit 1 in der linken oberen Ecke (an der Stelle von a_{11}) beginnt.

Für die Grenzfälle $\nu = 0$ und $\nu = n$ ist gemäß der in Def. 38 getroffenen Festsetzung $A^{(0)} = \mathsf{A}^{(n)} = (e)$, $A^{(n)} = \mathsf{A}^{(0)} = (|A|)$ zu setzen. Insbesondere ist hiernach $\mathsf{A} = (e)$ die adjungierte Matrix zu einer (1,1)-reihigen Matrix $A = (a_{11})$.

Die Einführung dieser zunächst sehr kompliziert anmutenden Begriffsbildungen geschieht, um das folgende, unter dem Namen **Laplacescher Entwicklungssatz** bekannte Theorem möglichst einfach aussprechen zu können:

Satz 68. *Unter den Voraussetzungen von Def.* 38, 39 *gelten die Formeln*

$$\sum_{\{k_1,\ldots,k_\nu\}} a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}\, \alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}} = |A|\,,$$

$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_\nu\}} a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}\, \alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}} = |A|\,,$$

in denen die Summation über alle $\binom{n}{\nu}$ *Kombinationen* $\{k_1,\ldots,k_\nu\}$ *bzw.* $\{i_1,\ldots,i_\nu\}$ *zu erstrecken ist, während* $\{i_1,\ldots,i_\nu\}$ *bzw.* $\{k_1,\ldots,k_\nu\}$ *eine feste Kombination bedeuten. In Worten: Das innere Produkt aus einer Zeile (Spalte) der* ν*-ten abgeleiteten Matrix* $A^{(\nu)}$ *und der entsprechenden Zeile (Spalte) der* ν*-ten adjungierten Matrix* $\mathsf{A}^{(\nu)}$ *von* A *ist die Determinante* $|A|$.

Eben wegen der hierin liegenden Verkoppelung der $\alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ mit den $a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ heißen erstere die Adjunkten zu letzteren und $\mathsf{A}^{(\nu)}$ die adjungierte Matrix zu $A^{(\nu)}$.

Beweis. Für die Grenzfälle $\nu = 0$ und $\nu = n$ ist der Satz nach den getroffenen Festsetzungen trivial. Sei also $1 \leqq \nu \leqq n-1$, d. h. insbesondere $n > 1$. Es genügt dann, die erste Formel des Satzes zu beweisen. Denn die zweite geht durch Anwendung von Satz 66 [114] auf die Determinanten links und rechts aus der für die Matrix A' gebildeten ersten Formel hervor.

Der Beweis der ersten Formel besteht nun in einer bestimmten Gruppierung der Summanden in der Definitionsformel für die Determinante:

$$|A| = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} P\, a_{1p_1} \ldots a_{np_n}.$$

Wir zerlegen nämlich dazu die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ nach einer durch die Kombination $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ bestimmten Untergruppe $\mathfrak{C}_{\{i_1,\ldots,i_\nu\}}$ vom Index $\binom{n}{\nu}$ in vordere Restklassen $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_{\binom{n}{\nu}}$ und führen dann die geforderte Summation $\sum\limits_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n}$ in der Gruppierung

$$\sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{R}_1} + \cdots + \sum_{P \text{ in } \mathfrak{R}_{\binom{n}{\nu}}}$$

aus. Jede solche, über eine Restklasse erstreckte Summe ist dann gerade einer der ja ebenfalls in der Anzahl $\binom{n}{\nu}$ vorhandenen Summanden auf der linken Seite der zu beweisenden Formel.

Die zu benutzende Untergruppe $\mathfrak{C}_{\{i_1,\ldots,i_\nu\}}$ von $\mathfrak{S}_n$ vom Index $\binom{n}{\nu}$ ist die Gesamtheit aller derjenigen Permutationen von $1, \ldots, n$, bei denen die Ziffern $i_1, \ldots, i_\nu$ (und daher auch die übrigen Ziffern $i_{\nu+1}, \ldots, i_n$) nur unter sich permutiert werden. Nach Satz 20 [54] ist das sicher eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$. Ihre Permutationen lassen sich in der Form

$$C_{R,S} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} i_1 & \ldots & i_\nu & i_{\nu+1} & \ldots & i_n \\ i_{r_1} & \ldots & i_{r_\nu} & i_{s_{\nu+1}} & \ldots & i_{s_n} \end{array}\right) \text{ [1]}$$

schreiben, wo

$$R = \binom{\iota}{r_\iota} \ (\iota = 1, \ldots, \nu) \text{ und } S = \binom{\iota}{s_\iota} \ (\iota = \nu + 1, \ldots, n)$$

unabhängig voneinander alle Permutationen der Ziffern $1, \ldots, \nu$ bzw. $\nu + 1, \ldots, n$, also die Gruppen $\mathfrak{S}_\nu$ bzw. $\mathfrak{S}_{n-\nu}$ (erstere für die Elemente $1, \ldots, \nu$, letztere für die Elemente $\nu + 1, \ldots, n$) durchlaufen.

Die vorderen Restklassen nach $\mathfrak{C}_{\{i_1,\ldots,i_\nu\}}$ und dadurch der Index von $\mathfrak{C}_{\{i_1,\ldots,i_\nu\}}$ bestimmen sich folgendermaßen: Es sei P_0 irgendeine Permutation aus $\mathfrak{S}_n$. Wir können sie in der Form

[1] Der senkrechte Strich soll andeuten, daß der vordere und der hintere Teil für sich Permutationen sind.

$$P_0 = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_\nu \; i_{\nu+1} \dots i_n \\ k_1 \dots k_\nu \; k_{\nu+1} \dots k_n \end{pmatrix}$$

geschrieben denken. Dann besteht die durch P_0 erzeugte vordere Restklasse $\mathfrak{C}_{\{i_1,\dots,i_\nu\}} P_0$ aus der Gesamtheit der Permutationen

$$P = C_{R,S} P_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} i_1 & \dots & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_n \\ i_{r_1} & \dots & i_{r_\nu} & i_{s_{\nu+1}} & \dots & i_{s_n} \end{array}\right) \begin{pmatrix} i_1 \dots i_\nu \; i_{\nu+1} \dots i_n \\ k_1 \dots k_\nu k_{\nu+1} \dots k_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_n \\ k_{r_1} & \dots & k_{r_\nu} & k_{s_{\nu+1}} & \dots & k_{s_n} \end{pmatrix},$$

d. h. aus genau denjenigen Permutationen, bei denen die Ziffern von $\{i_1, \dots, i_\nu\}$ in die von $\{k_1, \dots, k_\nu\}$ (und somit die von $\{i_{\nu+1}, \dots, i_n\}$ in die von $\{k_{\nu+1}, \dots, k_n\}$) in irgendeiner Reihenfolge übergehen. Hiernach entspricht jeder Kombination $\{k_1, \dots, k_\nu\}$ eineindeutig eine vordere Restklasse $\mathfrak{R}_{\{k_1,\dots,k_\nu\}}$ nach $\mathfrak{C}_{\{i_1,\dots,i_\nu\}}$, insbesondere ist also der Index von $\mathfrak{C}_{\{i_1,\dots,i_\nu\}}$ gleich der Anzahl $\binom{n}{\nu}$ der Kombinationen ν-ter Ordnung von $1, \dots, n$.

Diese Zerlegung von $\mathfrak{S}_n$ nach $\mathfrak{C}_{\{i_1,\dots,i_\nu\}}$ ist nichts anderes als die gruppentheoretische Einkleidung der aus den Elementen geläufigen Schlußweise zur Bestimmung der Anzahl $\binom{n}{\nu}$. In der Tat ist die Ordnung von $\mathfrak{C}_{\{i_1,\dots,i_\nu\}}$ nach obigem $\nu!\,(n-\nu)!$, so daß nach Satz 25 [57] die bekannte Formel $\binom{n}{\nu} = \frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}$ folgt.

Wir betrachten nunmehr denjenigen Teil der $|A|$ darstellenden Summe $\sum\limits_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n}$, der einer solchen vorderen Restklasse $\mathfrak{R}_{\{k_1,\dots,k_\nu\}}$ entspricht. Dieser läßt sich nach obigem in der Form

$$\sum_{P \text{ in } \mathfrak{R}_{\{k_1,\dots,k_\nu\}}}$$
$$= \sum_{C_{R,S} \text{ in } \mathfrak{C}_{\{i_1,\dots,i_\nu\}}} \operatorname{sgn}(C_{R,S} P_0)\, a_{i_1 k_{r_1}} \dots a_{i_\nu k_{r_\nu}} a_{i_{\nu+1} k_{s_{\nu+1}}} \dots a_{i_n k_{s_n}}$$

schreiben, oder nach Satz 62 [108], und da P_0 in dieser Summe fest ist,

$$\sum_{P \text{ in } \mathfrak{K}_{\{k_1, \ldots, k_\nu\}}}$$

$$= \operatorname{sgn} P_0 \sum_{\substack{R \text{ in } \mathfrak{S}_\nu \\ S \text{ in } \mathfrak{S}_{n-\nu}}} \operatorname{sgn} C_{R,S}\, a_{i_1 k_{r_1}} \ldots a_{i_\nu k_{r_\nu}} a_{i_{\nu+1} k_{s_{\nu+1}}} \ldots a_{i_n k_{s_n}},$$

wobei entsprechend der oben auseinandergesetzten Struktur von $\mathfrak{C}_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}}$ die Summation über alle $C_{R,S}$ als Summation über alle R und S der oben angegebenen Art geschrieben ist. Es kommt nun alles auf die Berechnung von sgn P_0 und eine geeignete Aufspaltung von sgn $C_{R,S}$ in zwei den beiden Teilen von $C_{R,S}$ entsprechende Faktoren an. Wir dürfen dabei und im weiteren ohne Beschränkung annehmen, daß die Ziffern der vier Kombinationen $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$, $\{i_{\nu+1}, \ldots, i_n\}$, $\{k_1, \ldots, k_\nu\}$, $\{k_{\nu+1}, \ldots, k_n\}$ in der natürlichen Reihenfolge stehen.

Einerseits geht nämlich die Reihenfolge der Ziffern dieser Kombinationen in die zu beweisende Formel gar nicht ein; denn nach Def. 38 macht sie sich in dem Entstehungsprozeß der Unterdeterminanten und Adjunkten nur als Reihenfolge des Streiches von Zeilen und Spalten bemerkbar, während die Zeilen und Spalten der ihnen zugrundeliegenden Matrizen stets in der natürlichen Reihenfolge stehen bleiben. Andererseits ist sowohl $\mathfrak{C}_{\{i_1, \ldots, i_\nu\}}$ unabhängig von der Reihenfolge der Ziffern $i_1, \ldots, i_\nu$ und $i_{\nu+1}, \ldots, i_n$, als auch die Klassen $\mathfrak{K}_{\{k_1, \ldots, k_\nu\}}$ von der Reihenfolge dieser Ziffern und der Ziffern $k_1, \ldots, k_\nu$ und $k_{\nu+1}, \ldots, k_n$, und es kann in jeder solchen Klasse der Repräsentant P_0 so gewählt werden, daß $k_1, \ldots, k_\nu$ und $k_{\nu+1}, \ldots, k_n$ in natürlicher Reihenfolge stehen.

1) *Berechnung von* sgn P_0

Wir zerlegen:

$$P_0 = \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_\nu\ i_{\nu+1} \ldots i_n \\ k_1 \ldots k_\nu\ k_{\nu+1} \ldots k_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_\nu\ i_{\nu+1} \ldots i_n \\ 1 \ldots \nu\ \nu+1 \ldots n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ldots \nu\ \nu+1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_\nu\ k_{\nu+1} \ldots k_n \end{pmatrix} = I^{-1} K$$

und haben dann nach Satz 62, 63 [108, 110]

$$\operatorname{sgn} P_0 = \operatorname{sgn} I^{-1} \operatorname{sgn} K = \operatorname{sgn} I \operatorname{sgn} K.$$

Da $i_1, \ldots, i_\nu$ und $i_{\nu+1}, \ldots, i_n$ in natürlicher Reihenfolge stehen, können Inversionen von $I = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \nu & \nu+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}$ nur durch je eine Ziffer von $\{i_1, \dots, i_\nu\}$ und eine von $\{i_{\nu+1}, \dots, i_n\}$ zustande kommen. Diese Inversionen lassen sich abzählen, indem man für jede der ν Ziffern $i_1, \dots, i_\nu$ zählt, mit wie vielen der Ziffern $i_{\nu+1}, \dots, i_n$ sie Inversionen verursacht. Offenbar führt nun i_1 mit den $i_1 - 1$ der zweiten Reihe angehörigen Ziffern $1, \dots, i_1 - 1$ [1]) und nur mit diesen zu Inversionen, ebenso i_2 mit den $i_2 - 2$ der zweiten Reihe angehörigen Ziffern $1, \dots, i_2 - 1$ [1]) außer i_1 und nur mit diesen, ..., schließlich i_ν mit den $i_\nu - \nu$ der zweiten Reihe angehörigen Ziffern $1, \dots, i_\nu - 1$ [1]) außer $i_1, \dots, i_{\nu-1}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} I &= (-1)^{i_1 - 1 + i_2 - 2 + \cdots + i_\nu - \nu} \\ &= (-1)^{i_1 + \cdots + i_\nu - (1 + \cdots + \nu)}. \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\operatorname{sgn} K = (-1)^{k_1 + \cdots + k_\nu - (1 + \cdots + \nu)}.$$

Damit ist gefunden:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} P_0 &= \operatorname{sgn} I \operatorname{sgn} K \\ &= (-1)^{i_1 + \cdots + i_\nu + k_1 + \cdots + k_\nu} = (-1)^{(i,k)}, \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung (i, k) für $i_1 + \cdots + i_\nu + k_1 + \cdots + k_\nu$ gesetzt ist.

2) *Aufspaltung von* $\operatorname{sgn} C_{R,S}$,

Da die beiden Teile von $C_{R,S}$ für sich Permutationen sind, gestattet $C_{R,S}$ die folgende Aufspaltung:

$$C_{R,S} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} i_1 & \dots & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_n \\ i_{r_1} & \dots & i_{r_\nu} & i_{s_{\nu+1}} & \dots & i_{s_n} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} i_1 & \dots & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_n \\ i_{r_1} & \dots & i_{r_\nu} & i_{\nu+1} & \dots & i_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} i_1 & \dots & i_\nu & i_{\nu+1} & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_\nu & i_{s_{\nu+1}} & \dots & i_{s_n} \end{array}\right) = C_R C_S.$$

[1]) Sofern solche Ziffern überhaupt vorkommen; d. h., sofern nicht $i_1 = 1$, $i_2 = 2 \dots, i_\nu = \nu$ ist.

Nach Satz 62 [108] ist dann

$$\operatorname{sgn} C_{R,S} = \operatorname{sgn} C_R \operatorname{sgn} C_S,$$

ferner nach Satz 64 [111]

$$\operatorname{sgn} C_R = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \nu & \nu+1 & \dots & n \\ r_1 & \dots & r_\nu & \nu+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{sgn} C_S = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \nu & \nu+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & \nu & s_{\nu+1} & \dots & s_n \end{pmatrix}.$$

Da nun offenbar Inversionen der rechtsstehenden Permutationen nur durch Ziffernpaare aus der Reihe $r_1, \dots, r_\nu$ bzw. solche aus der Reihe $s_{\nu+1}, \dots, s_n$ zustande kommen, gilt weiter

$$\operatorname{sgn} C_R = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \nu \\ r_1 & \dots & r_\nu \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} R,$$

$$\operatorname{sgn} C_S = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} \nu+1 & \dots & n \\ s_{\nu+1} & \dots & s_n \end{pmatrix} = \operatorname{sgn} S,$$

also $$\operatorname{sgn} C_{R,S} = \operatorname{sgn} R \operatorname{sgn} S.$$

Mit den Ergebnissen von 1) und 2) wird nunmehr

$$\sum_{P \text{ in } \mathfrak{K}_{\{k_1, \dots, k_\nu\}}}$$

$$= (-1)^{(i,k)} \sum_{\substack{R \text{ in } \mathfrak{S}_\nu \\ S \text{ in } \mathfrak{S}_{n-\nu}}} \operatorname{sgn} R\, a_{i_1 k_{r_1}} \dots a_{i_\nu k_{r_\nu}} \cdot \operatorname{sgn} S\, a_{i_{\nu+1} k_{s_{\nu+1}}} \dots a_{i_n k_{s_n}}$$

$$= \sum_{R \text{ in } \mathfrak{S}_\nu} \operatorname{sgn} R\, a_{i_1 k_{r_1}} \dots a_{i_\nu k_{r_\nu}} \; (-1)^{(i,k)} \sum_{S \text{ in } \mathfrak{S}_{n-\nu}} \operatorname{sgn} S\, a_{i_{\nu+1} k_{s_{\nu+1}}} \dots a_{i_n k_{s_n}};$$

denn die gliedweise Ausmultiplikation der beiden Summen $\sum\limits_{R \text{ in } \mathfrak{S}_\nu}, \sum\limits_{S \text{ in } \mathfrak{S}_{n-\nu}}$ ergibt wegen der Unabhängigkeit der Summationen über R und S die zuerst geschriebene Doppelsumme $\sum\limits_{\substack{R \text{ in } \mathfrak{S}_\nu \\ S \text{ in } \mathfrak{S}_{n-\nu}}}$. Die beiden in der letzen Formel auftretenden Faktoren $\sum\limits_{R \text{ in } \mathfrak{S}_\nu}$ und $(-1)^{(i,k)} \sum\limits_{S \text{ in } \mathfrak{S}_{n-\nu}}$ sind nun die in der zu beweisenden Formel stehenden Determinanten $a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ und $\alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$.

Denn wegen der Annahme über die Reihenfolge der Ziffern unserer Kombination sind $a_{i_1 k_1} \ldots a_{i_\nu k_\nu}$ und $a_{i_{\nu+1} k_{\nu+1}} \ldots a_{i_n k_n}$ die Produkte der Hauptdiagonalglieder der Matrizen $A_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ und $\mathsf{A}_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$, ferner erstrecken sich die Summationen über alle Permutationen R und S der Spaltenindizes $k_1, \ldots, k_\nu$ und $k_{\nu+1}, \ldots, k_n$ in diesen Produkten, wobei jedesmal die richtigen Vorzeichenfaktoren sgn R und sgn S angefügt sind, und schließlich steht vor der zweiten Summe der richtige Vorzeichenfaktor $(-1)^{(i,k)} = (-1)^{i_1 + \cdots + i_\nu + k_1 + \cdots + k_\nu}$.

Somit ist schließlich

$$\sum_{P \text{ in } \mathfrak{K}_{\{k_1,\ldots,k_\nu\}}} = a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}\, \alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}},$$

und daraus folgt die zu beweisende Formel, weil nach dem oben über die Restklassen Bemerkten

$$|A| = \sum_{P \text{ in } \mathfrak{S}_n} = \sum_{\{k_1,\ldots,k_\nu\}} \; \sum_{P \text{ in } \mathfrak{K}_{\{k_1,\ldots,k_\nu\}}}$$

ist.

Die erste der Formeln von Satz 68 läßt sich auch so aussprechen: Man wähle eine feste Zeilenkombination $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ der Matrix A. Aus diesen ν Zeilen lassen sich dann, den $\binom{n}{\nu}$ Kombinationen $\{k_1, \ldots, k_\nu\}$ der Spalten entsprechend, $\binom{n}{\nu}$ (ν, ν)-reihige Matrizen $A_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ mit den Determinanten $a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ ausschneiden. Jeder solchen Matrix entspricht eine komplementäre $\mathsf{A}_{\{i_1,\ldots i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ die aus der komplementären Zeilenkombination unter Benutzung der komplementären Spaltenkombination ausgeschnitten ist, oder auch durch Streichung der in $A_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ vorkommenden Zeilen und Spalten aus A gewonnen werden kann, und deren Determinante, mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^{i_1 + \cdots + i_\nu + k_1 + \cdots + k_\nu}$ versehen, das algebraische Komplement $\alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ zu $a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\,\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ ist. Indem man nun mit $a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ das Zeilensystem $\{i_1,\ldots,i_\nu\}$ durchgleitet und alle Produkte der Unterdeterminanten $a_{\ldots,\ldots}$ mit ihren algebraischen Komplementen $\alpha_{\ldots,\ldots}$ addiert, erhält man die Determinante $|A|$. Entsprechend liefert die Vertauschung der Rolle von Zeilen und Spalten in dieser Regel die zweite Formel von Satz 68. Man nennt diese Formeln in diesem Sinne auch die *Entwicklungen der Determinante* $|A|$ *nach den Unterdeterminanten des Zeilensystems* $\{i_1,\ldots,i_\nu\}$, *bzw. des Spaltensystems* $\{k_1,\ldots,k_\nu\}$.

In dem besonders wichtigen Falle $\nu = 1$ werden die Formeln von Satz 68 zu

$$(1) \qquad |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik} \qquad (i = 1,\ldots,n),$$

$$(2) \qquad |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik} \qquad (k = 1,\ldots,n)$$

(Entwicklungen von $|A|$ nach den Elementen einer Zeile bzw. Spalte). Durch (1) oder (2) wird die Berechnung einer Determinante n-ten Grades $|A|$ zurückgeführt auf die Berechnung von n Determinanten $(n-1)$-ten Grades (etwa $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n}$). Das hierin liegende rekursive Verfahren zur Berechnung von Determinanten ist für die Anwendungen mitunter brauchbar.

§ 19. Weitere Determinantensätze

Wir ziehen zunächst einige Folgerungen aus dem Spezialfall $\nu = 1$ des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Dieser ergibt nämlich unmittelbar die folgende Tatsache, die man übrigens auch unmittelbar aus der Definitionsformel für die Determinante (Def. 37 [112]) ablesen kann:

Satz 69. *Die Determinante* $|A|$ *einer* (n, n)*-reihigen Matrix* A *ist linear und homogen in den Elementen jeder Zeile (Spalte) von* A, *d. h. genauer eine Linearform der Elemente irgendeiner Zeile (Spalte), deren Koeffizienten allein durch die in den übrigen Zeilen (Spalten) stehenden Elemente bestimmt sind.*

Hieraus ergibt sich unter Anwendung des Satzes 47 [76] ohne weiteres die oft gebrauchte Regel:

Satz 70. *Stimmen die (n, n)-reihigen Matrizen $A, A_1, \ldots, A_m$ in $n-1$ entsprechenden Zeilen (Spalten) überein, während die übrige Zeile (Spalte) $\mathfrak{a}$ von A das lineare Kompositum*

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{a}_i$$

der entsprechenden Zeilen (Spalten) $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ von $A_1, \ldots, A_m$ ist, so ist die Determinante $|A|$ das gleiche lineare Kompositum

$$|A| = \sum_{i=1}^{m} c_i |A_i|$$

der Determinanten $|A_1|, \ldots, |A_m|$.

Besonders häufig braucht man den Spezialfall $m = 1$ dieses Satzes, wonach sich $|A|$ mit c multipliziert, wenn die Elemente einer Zeile (Spalte) von A mit c multipliziert werden. Hiernach ist ferner [vgl. § 10, c), (3')]

$$|cA| = c^n |A|, \text{ d. h. } |ca_{ik}| = c^n |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Schließlich heben wir noch den entweder direkt aus Satz 69 oder aus Satz 70 für $m = 1$, $c_1 = 0$ folgenden Satz hervor:

Satz 71. *Sind alle Elemente einer Zeile (Spalte) von A Null, so ist $|A| = 0$.*

Auch alles dies läßt sich wieder unmittelbar aus der Determinantendefinitionsformel (Def. 37 [112]) ablesen.

Weiter ziehen wir jetzt aus dem Spezialfall $\nu = 2$ des Laplaceschen Entwicklungssatzes die nachstehende, wichtige Folgerung:

Satz 72. *Stimmen zwei Zeilen (Spalten) einer (n, n)-reihigen Matrix A $(n > 1)$ überein, so ist $|A| = 0$.*

Beweis. Da die Determinante $|A|$ nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz auch linear und homogen in den Unterdeterminanten eines Zeilen- oder Spaltenpaares ist, genügt es zu zeigen, daß alle Determinanten zweiten Grades, die aus einem übereinstimmenden Zeilen- oder Spaltenpaar gebildet sind, Null sind. Das folgt aber unmittelbar aus der Definitionsformel der Determinanten, nach der jene Determinanten der Form $\begin{vmatrix} a\,b \\ a\,b \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} a\,a \\ b\,b \end{vmatrix}$ sich zu $ab - ab = 0$ berechnen.

Meist wird für Satz 72 der folgende, auf Satz 67 [115] gegründete Beweis gegeben: Da eine nur zwei Ziffern vertauschende Permatation von $1, \ldots, n$, die also in der Form $\begin{pmatrix} i_1\, i_2\, i_3 \ldots i_n \\ i_2\, i_1\, i_3 \ldots i_n \end{pmatrix}$ geschrieben werden kann, nach Satz 64 [111] ungerade ist, folgt durch Vertauschung der beiden übereinstimmenden Zeilen (Spalten) nach Satz 67 [115] $|A| = -|A|$, d. h. $|A| + |A| = 2|A| = 0$. Daraus darf aber i. a. nicht auf $|A| = 0$ geschlossen werden, weil ja z. B. in dem Körper von § 1, Beispiel 4 (und auch in jedem seiner Erweiterungskörper) $e + e = 2e = 0$, aber doch $e \neq 0$ ist. Man kommt nur deshalb meist mit diesem einfacheren Beweis aus, weil man sich auf Grundkörper aus Zahlen beschränkt, in denen jener Schluß zulässig ist. Theoretisch richtiger, weil ganz allgemein gültig, ist jedoch auch dann der oben gegebene Beweis mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes. (Siehe jedoch auch **3**, 2, § 4 Aufg. 11.)

Mittels der Sätze 70 und 72 beweisen wir jetzt den folgenden Satz, der für die Anwendungen der Determinanten auf lineare Gleichungssysteme grundlegend ist:

Satz 73. *Sind die Zeilen oder die Spalten einer (n, n)-reihigen Matrix A linear abhängig, so ist $|A| = 0$.*

Beweis. Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Für $n > 1$ ist nach Satz 38, a′) [68] dann mindestens eine Zeile (Spalte) ein lineares Kompositum der übrigen Zeilen (Spalten), nach Satz 70 also die Determinante $|A|$ ein lineares Kompositum derjenigen $n - 1$ Determinanten, die entstehen, wenn man die fragliche Zeile (Spalte) von A jeweils durch eine der übrigen $n - 1$ Zeilen (Spalten) ersetzt. Diese $n - 1$ Determinanten sind aber nach Satz 72 Null, also auch ihr lineares Kompositum $|A|$.

Für die praktischen Anwendungen (Berechnung von Determinanten) ist es zweckmäßig, den Satz 73 auch in folgender Form auszusprechen:

Zusatz. *Entsteht die Matrix B aus der (n, n)-reihigen Matrix A $(n > 1)$ dadurch, daß zu einer Zeile (Spalte) von A ein lineares Kompositum der übrigen Zeilen (Spalten) addiert wird, so ist* $|B| = |A|$.

Beweis. $|B|$ ist dann das lineare Kompositum $|A| + c_1 |A_1| + \cdots + c_{n-1} |A_{n-1}|$, wo $|A_1|, \ldots, |A_{n-1}|$ die im Beweis von Satz 73 vorkommenden Determinanten bezeichnen, die hier sämtlich Null sind.

Wir wenden schließlich Satz 72 an, um die folgende **Erweiterung des Laplaceschen Entwicklungssatzes** zu beweisen:

Satz 74. *Unter den Voraussetzungen von Def.* 38, 39 [116, 118] *gelten die Formeln*

$$\sum_{\{k_1,\ldots,k_\nu\}} a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\{k_1,\ldots,k_\nu\}}\, \alpha_{\{i'_1,\ldots,i'_\nu\},\{k_1,\ldots,k_\nu\}} = \begin{cases} |A|, & \text{wenn } \{i_1,\ldots,i_\nu\} = \{i'_1,\ldots,i'_\nu\} \\ 0, & \text{wenn } \{i_1,\ldots,i_\nu\} \neq \{i'_1,\ldots,i'_\nu\} \end{cases},$$

$$\sum_{\{i_1,\ldots,i_\nu\}} a_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\{k_1,\ldots,k_\nu\}}\, \alpha_{\{i_1,\ldots,i_\nu\},\{k'_1,\ldots,k'_\nu\}} = \begin{cases} |A|, & \text{wenn } \{k_1,\ldots,k_\nu\} = \{k'_1,\ldots,k'_\nu\} \\ 0, & \text{wenn } \{k_1,\ldots,k_\nu\} \neq \{k'_1,\ldots,k'_\nu\} \end{cases};$$

in Worten: Das innere Produkt einer Zeile (Spalte) der ν-ten abgeleiteten Matrix $A^{(\nu)}$ und einer Zeile (Spalte) der ν-ten adjungierten Matrix $\mathsf{A}^{(\nu)}$ von A ist $|A|$ oder 0, je nachdem beide Zeilen (Spalten) die entsprechenden oder verschiedene Stellen in den Matrizen $A^{(\nu)}$ und $\mathsf{A}^{(\nu)}$ einnehmen.

Beweis. Wir haben nur noch die nicht schon in Satz 68 [119] enthaltenen zweiten Hälften beider Formeln zu beweisen und können uns nach Satz 66 [114] auf die erste Formel beschränken. Nach dem schon bewiesenen Laplaceschen Entwicklungssatz (Satz 68) läßt sich die in der ersten Formel von Satz 74 links stehende Summe auffassen als die Entwicklung nach der Zeilenkombination $\{i_1, \ldots, i_\nu\}$ derjenigen Matrix A_1, die aus A entsteht, wenn man an Stelle der $n - \nu$ komplementären Zeilen $i_{\nu+1}, \ldots, i_n$ diejenigen $n - \nu$ Zeilen von A setzt, aus denen die Adjunkten

$\alpha_{\{i'_1,\ldots,i'_\nu\},\{k_1,\ldots,k_\nu\}}$ gebildet sind, also die Zeilenkombination $\{i'_{\nu+1},\ldots,i'_n\}$. Da aber aus $\{i_1,\ldots,i_\nu\} \neq \{i'_1,\ldots,i'_\nu\}$ folgt, daß mindestens eins der $i_1,\ldots,i_\nu$ von allen $i'_1,\ldots,i'_\nu$ verschieden, also einem der $i'_{\nu+1},\ldots,i'_n$ gleich ist, enthält A_1 mindestens zwei übereinstimmende Zeilen. Also ist $|A_1| = 0$ nach Satz 72, woraus sich die erste Formel ergibt.

Entsprechend den auf den Spezialfall $\nu = 1$ bezüglichen Formeln § 18, (1) und (2) vermerken wir hier als deren Erweiterungen

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{i'k} = \begin{Bmatrix} |A|, & \text{wenn } i = i' \\ 0, & \text{wenn } i \neq i' \end{Bmatrix},$$

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik'} = \begin{Bmatrix} |A|, & \text{wenn } k = k' \\ 0, & \text{wenn } k \neq k' \end{Bmatrix}.$$

§ 20. Anwendung der Determinantentheorie auf lineare Gleichungssysteme im Falle m = n

Wir wollen nunmehr die im vorstehenden entwickelten Sätze anwenden, um auf dieser Basis erneut den Sätzekomplex von III über lineare Gleichungssysteme herzuleiten und darüber hinaus die in § 15 hervorgehobenen, bei der determinantenfreien Behandlung verbliebenen Desiderata zu erfüllen. Dabei soll aus methodischen Gründen von den früheren, mittels des Transformationsverfahrens aus § 12 gewonnenen Sätzen der §§ 13, 14 kein Gebrauch gemacht werden, während die diesem Verfahren vorangestellten Entwicklungen der §§ 10, 11 als elementar zu beweisende Tatsachen angesehen und auch für die jetzigen Darlegungen zugrunde gelegt werden sollen.

Wir beginnen, wie es der Methode der Determinantentheorie naturgemäß entspricht, mit der Behandlung der linearen Gleichungssysteme (J) und (H) mit (n, n)-reihiger Matrix A. Die hierauf bezüglichen Resultate dieses Paragraphen sind zur Herleitung der Resultate für den allgemeinen Fall in den folgenden beiden Paragraphen unentbehrlich, umgekehrt wie in III, wo der Fall $m = n$ anschließend an den allgemeinen Fall durch Spezialisierung behandelt werden konnte.

Zunächst besagt das in Satz 73 [128] erhaltene Ergebnis ohne weiteres:

Satz 75. (Satz (54, 55, 56) a [99]). *Das Gleichungssystem* (H) *mit* (n, n)*-reihiger Matrix* A *und sein transponiertes* (H′) *sind unlösbar, wenn die Determinante* $|A| \neq 0$ *ist.*

Satz 73 [128] oder 75 sagen über den in § 14 eingeführten Begriff regulär folgendes aus:

Zusatz. (Def. 32 [99]). *Ist* $|A| \neq 0$, *so ist* A *regulär.*

Es ist eines der Hauptergebnisse der Determinantenlehre, daß auch umgekehrt für ein reguläres A gilt $|A| \neq 0$, so daß also die Alternative von § 14, die damals nur in der Form A regulär oder A singulär ausgesprochen werden konnte, mittels der genau dasselbe besagenden Disjunktion $|A| \neq 0$ oder $|A| = 0$ praktisch entschieden werden kann. Daß jene Umkehrung richtig ist, werden wir aber erst mittels der allgemeinen Theorie im folgenden Paragraphen beweisen.

Ferner können wir mittels des Spezialfalles $\nu = 1$ des erweiterten Laplaceschen Entwicklungssatzes (Satz 74 [129]) bezüglich (J) folgendes beweisen:

Satz 76. (Satz) 49, 51, 53) a, Satz 57 und Def. 33 [99, 100]). *Das Gleichungssystem* (J) *mit* (n, n)*-reihiger Matrix* A *ist für jeden Vektor* $\mathfrak{x}^*$ *rechts eindeutig auflösbar, wenn* $|A| \neq 0$ *ist. Es hat dann eine eindeutig bestimmte lösende Matrix* A^*, *nämlich*

$$A^* = |A|^{-1} \mathsf{A}' = \left(\frac{\alpha_{ki}}{|A|}\right) \quad (i, k = 1, \ldots, n),$$

wo A *die adjungierte Matrix zu* A *ist.*

Beweis. Für $n = 1$ ist der Satz trivial (vgl. die Bemerkung bei Def. 39 [118]). Sei also $n > 1$.

a) Die im Satz genannte, wegen $|A| \neq 0$ wirklich bildbare Matrix A^* ist lösende Matrix von A. Bildet man nämlich mit ihr aus den x_i^* die Elemente

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{|A|} x_i^* \quad (k = 1, \ldots, n), ^{1})$$

[1]) Vgl. die Anm. 1 [80] zu (H′) in § 11. Die hier gewählte Bezeichnung der Indizes ist für die folgende Einsetzung bequemer als die in § 14 verwendete (x_i, x_k^* und demgemäß α_{ki}), durch die sofort hervortritt, daß die transponierte Matrix $\mathsf{A}' = (\alpha_{ki})$ und nicht $\mathsf{A} = (\alpha_{ik})$ vorliegt.

so folgt durch Einsetzen dieser x_k in die linken Seiten von (J) unter Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i'k} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i'k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}}{|A|} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{i'k}\alpha_{ik}}{|A|}$$
$$(i' = 1, \ldots, n).$$

Nach § 19, (1) [130] ist aber die Summe $\sum_{k=1}^{n}$ rechts $= |A|$ oder $= 0$, je nachdem $i' = i$ oder $i' \neq i$ ist. Daher folgt

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i'k} x_k = x_{i'}^* \quad (i' = 1, \ldots, n),$$

also das Erfülltsein von (J) für die obigen x_k.

b) Die unter a) angegebene Lösung von (J) ist die e i n z i g e. Ist nämlich $\mathfrak{x}$ Lösung von (J), also

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = x_i^* \quad (i = 1, \ldots, n),$$

so folgt durch Multiplikation der i-ten Gleichung mit der Adjunkte 1-ter Ordnung $\alpha_{ik'}$ und Summation über i

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik'} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik'} x_i^* \quad (k' = 1, \ldots, n),$$

also durch Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik'} x_i^* \quad (k' = 1, \ldots, n).$$

Nach § 19, (2) [130] ist aber die Summe $\sum_{i=1}^{n}$ links $= |A|$ oder $= 0$, je nachdem $k = k'$ oder $k \neq k'$ ist. Daher besagt dieses Gleichungssystem einfach

$$|A| x_{k'} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik'} x_i^* \qquad (k' = 1, \ldots, n)$$

oder, weil $|A| \neq 0$ ist,

$$x_{k'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik'}}{|A|} x_i^* \qquad (k' = 1, \ldots, n),$$

also die Identität von $\mathfrak{x}$ mit der Lösung unter a).

c) Daß A^* eindeutig bestimmt ist, folgt wie im Beweis zu Satz 57 [100].

Wir hätten den Punkt b) des Beweises ebenfalls wie im Beweis zu Satz (49, 51, 53)a [99], also dadurch erledigen können, daß das zugeordnete (H) nach Satz 75 für $|A| \neq 0$ unlösbar und somit (J) nach Satz 49 [81] eindeutig lösbar ist. Der hier gewählte Weg ist aber für die tatsächliche Konstruktion der Lösung $\mathfrak{x}$ von Bedeutung. Er läuft auf die schon in § 17 [114] erwähnte Multiplikationsmethode hinaus. In der Tat sind nach b) die Adjunkten α_{ik} $(i = 1, \ldots, n)$ zu den Elementen der k-ten Spalte von A gerade solche Multiplikatoren für die n linksstehenden Linearformen f_i, daß das lineare Kompositum $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} f_i \equiv |A| x_k$ nur noch die eine Unbestimmte x_k enthält. Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß das Ausrechnen der Lösung $\mathfrak{x}$ gemäß der Multiplikationsmethode b) theoretisch noch nicht besagt, daß $\mathfrak{x}$ wirklich Lösung ist, sondern nur, daß, falls eine Lösung existiert, dies $\mathfrak{x}$ die einzige Lösung ist. Der Punkt a) des Beweises ist also theoretisch unentbehrlich[1]).

Auf Grund von Satz 76 können wir überdies für die im Falle $|A| \neq 0$ stets vorhandene und eindeutig bestimmte Lösung von (J) ein allgemeines Formelsystem aufstellen, das unter dem Namen **Cramersche Regel** bekannt ist:

Satz 77. *Die für beliebiges rechtsstehendes $\mathfrak{x}^*$ vorhandene und eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}$ des Gleichungssystems* (J) *mit (n, n)-reihiger Matrix A und $|A| \neq 0$ wird durch die Determinantenquotienten*

[1]) Diese Tatsache wird ganz allgemein beim Gleichungsauflösen im Schulunterricht leider oft übersehen oder nicht genügend betont.

$$x_k = \frac{|A^{(k)}|}{|A|} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

gegeben, wo die Matrix $A^{(k)}$ aus A entsteht, indem die k-te Spalte von A durch den Vektor $\mathfrak{x}^*$ ersetzt wird.

Beweis. Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Sei also $n > 1$. Dann ist nach Satz 76 die Lösung

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i^*}{|A|} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Die darin auftretende Summe $\sum_i$ ist aber nach Satz 68 [119] (§ 18, (2)) einfach die Entwicklung der Determinante $|A^{(k)}|$ der im Satz genannten Matrix $A^{(k)}$ nach den Elementen ihrer k-ten Spalte.

Durch die Sätze 75—77 sind die Resultate von § 14 nur zur einen Hälfte wiedergewonnen. Es fehlen noch die umgekehrten Behauptungen, daß für $|A| = 0$ einerseits (H) und (H') lösbar und andererseits (J) nicht einschränkungslos und nicht eindeutig lösbar ist, sowie die weiteren Aussagen des Satzes 57 [100] über die lösende Matrix A^*. Alles dies wird, durch wörtliche Übertragung der betr. Beweise des § 14 auch vom jetzigen Standpunkt aus festgestellt sein, wenn nur die Umkehrung des obigen Zusatzes, d. h. die Gleichwertigkeit der Aussagen „A ist regulär" und „$|A| \neq 0$" bewiesen sein wird. Man könnte zunächst meinen, daß diese Umkehrung ebenfalls, wie alles Bisherige[1]), aus dem Spezialfall $\nu = 1$ des erweiterten Laplaceschen Entwicklungssatzes erschlossen werden kann, in der Weise, daß für $|A| = 0$ die Formeln § 19, (1), (2) [130] lineare Abhängigkeiten zwischen den Zeilen und Spalten von A darstellen, also A singulär sein muß. Das ist aber deshalb nicht möglich, weil ja, wie leicht durch Beispiele zu belegen, die Koeffizienten α_{ik} in jenen Formeln sämtlich Null sein können, so daß durch sie keine linearen Abhängigkeiten geliefert werden. Die Entwicklungen der folgenden Paragraphen lehren, daß die fragliche Umkehrung tiefer liegt, daß man nämlich zu ihrem Nachweis den allgemeinen Fall des erweiterten Laplaceschen Entwicklungssatzes heranzuziehen hat.

[1]) bis auf die Anwendung des Falles $\nu = 2$ im Beweis zu Satz 72 [127]

§ 21. Der Rang einer Matrix

Die Entwicklungen (und Ankündigungen) des § 20 zeigen, daß nicht die Determinante $|A|$ selbst, sondern nur die Alternative $|A| \neq 0$ oder $|A| = 0$ für die Lösbarkeit der linearen Gleichungssysteme mit der (n, n)-reihigen Matrix A von Bedeutung ist. Es erscheint daher nicht angebracht, für die Anwendungen auf allgemeine lineare Gleichungssysteme nach einer sinngemäßen Übertragung der Determinantendefinition (Def. 37 [112]) auf (m, n)-reihige Matrizen A zu suchen. Vielmehr kommt es darauf an, die richtige Verallgemeinerung jener Alternative zu finden. Die mit ihr de facto gleichwertige Alternative in § 14 entspringt nun aus der dort gemachten Disjunktion $0 \leqq r < n$ oder $0 < r = n$, also aus einer „$(n+1)$-ative", in der n Möglichkeiten in eins zusammengefaßt sind. Wir werden somit hier versuchen müssen, die Alternative $|A| \neq 0$ oder $|A| = 0$ in eine für beliebige Matrizen A aussprechbare $(n+1)$-ative aufzuspalten. Das erreichen wir, indem wir die damalige Anzahl r determinantentheoretisch definieren.

Der bequemeren Ausdrucksweise halber setzen wir zunächst in Verallgemeinerung von Def. 38 [116] fest:

Definition 40. *Unter einer* Unterdeterminante *ν-ten* Grades *einer (m, n)-reihigen Matrix A, wo $0 < \nu \leqq m$ und $0 < \nu \leqq n$ ist, verstehen wir die Determinante einer durch Streichung von $m - \nu$ Zeilen und $n - \nu$ Spalten aus A entstehenden (ν, ν)-reihigen Matrix.*

Mit Hilfe dieses Begriffes definieren wir nun für eine beliebige Matrix A eine charakteristische Zahl ϱ, die — wie wir dann zeigen werden — mit der Zahl r aus Satz 55 [97] übereinstimmt:

Definition 41. *Unter dem* Rang *ϱ einer Matrix A versteht man die Zahl 0, falls $A = 0$ ist, und die größte unter den Gradzahlen der von Null verschiedenen Unterdeterminanten von A, falls $A \neq 0$ ist.*

Um zu beweisen, daß der so definierte Rang ϱ von A mit der in III vorkommenden Zahl r übereinstimmt, stellen wir drei Hilfssätze über ϱ voran, durch die eine Reihe von selbstverständlichen Eigenschaften der de facto einander gleichen Maximalanzahlen r und r' linear unabhängiger Zeilen und Spalten von A auch für ϱ festgestellt werden.

Ohne weiteres klar ist nach Def. 40, 41:

Hilfssatz 1. *Für den Rang ϱ einer (m, n)-reihigen Matrix A gelten die Relationen*

$$0 \leqq \varrho \leqq m, \quad 0 \leqq \varrho \leqq n,$$
$$\varrho = 0 \text{ ist gleichbedeutend mit } A = 0.$$

Ferner ergibt sich unmittelbar durch Anwendung von Satz 66, 67 [114, 115] auf alle Unterdeterminanten von A:

Hilfssatz 2. *Hat die Matrix A den Rang ϱ, so haben auch die transponierte A', sowie alle aus A durch Zeilen- und Spaltenpermutationen herleitbaren Matrizen den Rang ϱ.*

Schließlich gilt:

Hilfssatz 3. *Entsteht die (m, n)-reihige Matrix A aus der $(m+1, n)$-reihigen $[(m, n+1)$-reihigen$]$ Matrix A_1 durch Streichung einer von den übrigen linear abhängigen Zeile (Spalte), so haben A und A_1 denselben Rang.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2 genügt es, den Satz für die Zeilen zu beweisen. Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ die Zeilen von A und $\mathfrak{a}$ die überschüssige Zeile von A_1, durch deren Streichung A entsteht, und die nach Voraussetzung lineares Kompositum von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ist. Ferner sei ϱ der Rang von A, ϱ_1 der von A_1. Ist $\varrho = 0$, so folgt nach Hilfssatz 1 auch $\varrho_1 = 0$, weil ja dann alle $\mathfrak{a}_i = 0$ sind, und somit $\mathfrak{a} = 0$ ist. Ist $\varrho > 0$, so hat A eine von Null verschiedene Unterdeterminante ϱ-ten Grades. Da diese auch Unterdeterminante von A_1 ist, ist jedenfalls $\varrho_1 \geqq \varrho$. Wäre nun $\varrho_1 > \varrho$, so existierte eine durch Zeilen- und Spaltenstreichungen aus A_1 entstehende (ϱ_1, ϱ_1)-reihige Matrix $\bar{A}_1$ mit $|\bar{A}_1| \neq 0$. Wir zeigen, daß dies unmöglich ist.

Entweder ist nämlich $\varrho = n$, so daß das Ausschneiden einer (ϱ_1, ϱ_1)-reihigen Matrix $\bar{A}_1$ aus der $(m+1, n)$-reihigen Matrix A_1 mit der Voraussetzung $\varrho_1 > \varrho\ (= n)$ unverträglich ist (Hilfssatz 1).

Oder es ist $\varrho < n$, so daß jedenfalls (ϱ_1, ϱ_1)-reihige Matrizen $\bar{A}_1$ mit $\varrho_1 > \varrho$ aus A_1 ausschneidbar sind. Dann sind nur die folgenden beiden Fälle denkbar:

a) In $\bar{A}_1$ kommt kein Teil der Zeile $\mathfrak{a}$ vor. Dann ist $\bar{A}_1$ schon aus A ausschneidbar, also $|\bar{A}_1| = 0$ als Unterdeterminante eines Grades $\varrho_1 > \varrho$ von A.

b) In $\bar{A}_1$ kommt ein Teil der Zeile $\mathfrak{a}$ vor. Dieser ist dann nach Satz 40 [68] lineares Kompositum der entsprechenden Teile von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Dann läßt sich nach Satz 70 [127] $|\bar{A}_1|$ aus den Determinanten von solchen (ϱ_1, ϱ_1)-reihigen Matrizen linear komponieren, die aus entsprechenden Zeilenteilen von A bestehen. Diese Determinanten und somit $|\bar{A}_1|$ sind aber Null, weil ihre Matrizen entweder zwei übereinstimmende Zeilen haben, oder, wenn dies nicht der Fall ist, Unterdeterminanten eines Grades $\varrho_1 > \varrho$ von A vorliegen.

Damit ist die Unmöglichkeit der Existenz einer (ϱ_1, ϱ_1)-reihigen Matrix $\bar{A}_1$ mit $\varrho_1 > \varrho$ und $|\bar{A}_1| \neq 0$ gezeigt. Es kann also nicht $\varrho_1 > \varrho$ sein, d. h. es ist $\varrho_1 = \varrho$.

Wir beweisen, nunmehr die Identität von ϱ mit r und r':

Satz 78. (Satz 55 [97]). *Der Rang ϱ einer Matrix A ist gleich der Maximalanzahl r linear unabhängiger Zeilen und gleich der Maixималanzahl r' linear unabhängiger Spalten von A. Insbesondere ist also $r = r'$.*

Beweis. Wir reduzieren zunächst mittels unserer Hilfssätze 1—3 die zu beweisende Behauptung auf ihren eigentlichen Kern, indem wir folgende vier Feststellungen machen:

1. Es genügt, den Satz für die Zeilen zu beweisen (Hilfssatz 2).

2. Es genügt, $A \neq 0$, also $r > 0$, $\varrho > 0$ anzunehmen (Hilfssatz 1).

3. Es genügt anzunehmen, daß die wegen 2. vorhandene von Null verschiedene Unterdeterminante ϱ-ten Grades von A die aus den ersten ϱ Zeilen und Spalten von A gebildete Unterdeterminante ist (Hilfssatz 2).

4. Es genügt, die Zeilen von A als linear unabhängig anzunehmen (Hilfssatz 3).

Denn ist A_0 die aus einem Maximalsystem r linear unabhängiger Zeilen von A bestehende Matrix, die wegen 2. existiert, so sind nach Satz 38, a') [68] alle übrigen Zeilen von A von den Zeilen von A_0 linear abhängig. Bei sukzessiver Streichung dieser übrigen Zeilen von A bleibt aber nach Hilfssatz 3 der Rang ungeändert, so daß die Behauptung auf den Nachweis $\varrho = r$ für A_0 zurückkommt.

Sei demgemäß $A = (a_{ik})$ eine (r, n)-reihige Matrix mit linear unabhängigen Zeilen vom Range ϱ, für die die aus den ersten ϱ Zeilen und Spalten gebildete Unterdeterminante $\alpha = |a_{ik}| (i, k = 1, \ldots, \varrho)$ von Null verschieden ist. Dann ergänzen wir die ersten ϱ Zeilen von A durch Hinzufügung von $n - \varrho \geqq 0$ (Hilfssatz 1) Zeilen zu einer (n, n)-reihigen Matrix wie folgt:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1\varrho} & a_{1,\varrho+1} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{\varrho 1} \cdots a_{\varrho\varrho} & a_{\varrho,\varrho+1} \cdots a_{\varrho n} \\ 0 \cdots 0 & e \cdots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots e \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante von $\bar{A}$ gilt dann $|\bar{A}| = \alpha \neq 0$. Für $\varrho = n$, also $\bar{A} = A$, ist dies ohne weiteres ersichtlich. Ist aber $\varrho < n$, so ergibt es sich durch Entwicklung von $\bar{A}$ nach den Unterdeterminanten der letzten $n - \varrho$ Zeilen, von denen nach Satz 71 [127] nur die den letzten $n - \varrho$ Spalten entsprechende (mit der Adjunkte α) von Null verschieden, nämlich gerade e, ist.

Es ist nun nach 2., Hilfssatz 1 und Satz 41 [69] jedenfalls $0 < \varrho \leqq r \leqq n$. Wäre $\varrho < r$ und dann erst recht auch $\varrho < n$, so wären $r - \varrho$ in $\bar{A}$ nicht vorkommende Zeilen $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(i = \varrho + 1, \ldots, r)$ von A vorhanden, und man könnte nach Satz 76 [131] und Satz 66 [114] jedes der $r - \varrho$ linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} a_{11} \quad x_1 + \cdots + a_{\varrho 1} \quad x_\varrho + 0\, x_{\varrho+1} + \cdots + 0\, x_n \doteq a_{i1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1\varrho} \quad x_1 + \cdots + a_{\varrho\varrho} \quad x_\varrho + 0\, x_{\varrho+1} + \cdots + 0\, x_n \doteq a_{i\varrho} \\ a_{1,\varrho+1} x_1 + \cdots + a_{\varrho,\varrho+1} x_\varrho + \quad x_{\varrho+1} + \cdots + 0\, x_n \doteq a_{i,\varrho+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} \quad x_1 + \cdots + a_{\varrho n} \quad x_\varrho + 0\, x_{\varrho+1} + \cdots + \quad x_n \doteq a_{in} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = \varrho + 1, \ldots, r) \end{array}$$

mit der Matrix $\bar{A}'$ auflösen, d. h. jede dieser $r - \varrho$ Zeilen aus den n Zeilen von $\bar{A}$ linear komponieren. Wir zeigen, daß dann in den Lösungen $(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ $(i = \varrho + 1, \ldots, r)$ dieser Gleichungssysteme die letzten $n - \varrho$ Unbekannten $x_{i,\,\varrho+1}, \ldots, x_{in}$ gleich Null, also die letzten $r - \varrho$ Zeilen von A lineare Komposita der ersten ϱ wären, was der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit der Zeilen von A widerspricht.

Dazu denken wir uns die nach Satz 76 [131] eindeutig bestimmten Lösungen $(x_{i1}, \ldots, x_{in})$ $(i = \varrho + 1, \ldots, r)$ nach der Cramerschen Regel (Satz 77 [133]) in der Form

$$x_{ij} = \frac{|\bar{A}_i^{(j)}|}{|\bar{A}'|} = \frac{|\bar{A}_i^{(j)}|}{|\bar{A}|} \quad \begin{pmatrix} i = \varrho + 1, \ldots, r \\ j = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Matrizen $\bar{A}_i^{(j)}$ entstehen dabei aus $\bar{A}$, indem in $\bar{A}$ die j-te Zeile durch $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ ersetzt wird. Ist nun j einer der uns interessierenden Indizes $\varrho + 1, \ldots, n$, so enthält $\bar{A}_i^{(j)}$ demgemäß $\varrho + 1$ verschiedene Zeilen von A. Entwickelt man dann $\bar{A}_i^{(j)}$ nach diesen $\varrho + 1$ Zeilen und bedenkt, daß alle deren Unterdeterminanten als Unterdeterminanten $(\varrho + 1)$-ten Grades von A Null sind, so ergibt sich $|\bar{A}_i^{(j)}| = 0$, also $x_{ij} = 0$ $(i = \varrho + 1, \ldots, r;\; j = \varrho + 1, \ldots, n)$. Damit ist nach dem schon Gesagten die Unmöglichkeit von $\varrho < r$ dargetan. Es gilt somit $\varrho = r$, wie behauptet.

Der damit bewiesene Satz 78 rechtfertigt die Verwendung desselben Wortes *Rang* für die beiden scheinbar verschiedenartigen Begriffe in den Definitionen 25 [70] und 41 [135]: Der Rang ϱ einer Matrix ist gleich dem Rang r des von ihren Zeilen (oder Spalten) erzeugten Vektormoduls. Ferner liefert Satz 78 ohne weiteres den am Schluß des vorigen Paragraphen genannten, noch fehlenden Teil der Ergebnisse des § 14 für die speziellen Gleichungssysteme mit $m = n$. Wir können nämlich jetzt leicht die folgende Umkehrung von Satz 73 [128] beweisen:

Satz 79. *Ist A eine (n, n)-reihige Matrix mit $|A| = 0$, so sind sowohl die Zeilen als auch die Spalten von A linear abhängig.*

Beweis. Ist $|A| = 0$, so ist der Rang $\varrho < n$, weil $|A|$ die einzige Unterdeterminante n-ten Grades von A ist. Nach Satz 78 sind also die n Zeilen und die n Spalten von A linear abhängig.

Satz 79 besagt auch in Umkehrung zu Satz 75 [131]:

Satz 80. (Satz 54, 55, 56) a [99]). *Das Gleichungssystem* (H) *mit* (n, n)*-reihiger Matrix* A *und sein transponiertes* (H′) *sind lösbar, wenn* $|A| = 0$ *ist.*

Satz 79 oder 80 geben schließlich die in § 20 angekündigte Umkehrung des Zusatzes zu Satz 75 [131]:

Zusatz. (Def. 32 [99]). *Ist* A *regulär, so ist* $|A| \neq 0$.

Somit haben wir:

Satz 81. (Def. 32 [99]). *Die Alternativen „A regulär oder A singulär" und „$|A| \neq 0$ oder $|A| = 0$" sind gleichbedeutend.*

Wie schon am Schluß von § 20 festgestellt, ist durch diese, sämtlich dasselbe besagenden Sätze nunmehr auch die folgende Umkehrung zu Satz 76 [131] sowie die anschließende weitere Aussage als vom jetzigen Standpunkt bewiesen anzusehen:

Satz 82. (Satz 49, 51, 53) a [99]). *Die Bedingung* $|A| \neq 0$ *ist für die einschränkungslose und für die eindeutige Auflösbarkeit des Gleichungssystems* (J) *mit* (n, n)*-reihiger Matrix* A *auch notwendig.*

Satz 83. (Satz 57 [100]). *Ist* $|A| \neq 0$, *so ist auch die Determinante* $|A^*|$ *der lösenden Matrix* $A^* = |A|^{-1}\mathsf{A}'$, *d. h. auch die Determinante* $|\mathsf{A}| = |A|\,|A^*|$[1] *der adjungierten Matrix zu* A *von Null verschieden und* $(A^*)^* = A$.

Man kann hieraus leicht folgern, daß die adjungierte Matrix $\hat{\mathsf{A}}$ zur adjungierten A von A sich von A nur um einen Faktor unterscheidet, daß nämlich $\hat{A} = \dfrac{|\mathsf{A}|}{|A|}A$ ist. Die Bestimmung dieses Faktors, d. h. die Berechnung von $|\mathsf{A}|$ läßt sich aber erst mittels des Matrizenkalküls naturgemäß ausführen. Dort zeigt sich nämlich, daß A^* einfach *die Reziproke* A^{-1} von A, und demgemäß $|A^*| = |A|^{-1}$ ist, woraus dann für $\mathsf{A}' = |A|\,A^{-1}$ folgt $|\mathsf{A}| = |A|^n\,|A|^{-1} = |A|^{n-1}$. Übrigens sind auch die Deter-

[1] Vgl. das bei **Satz 70** [127] Bemerkte.

minanten aller abgeleiteten und adjungierten Matrizen $A^{(\nu)}$, $\mathsf{A}^{(\nu)}$ Potenzen von $|A|$. (Vgl. dazu **3**, 1, § 14, Aufg. 4; § 19, Aufg. 13; 2, § 2, Aufg. 30—32.)

Damit sind die sämtlichen Ergebnisse des § 14 für den Spezialfall $m = n$ determinantentheoretisch begründet. Überdies kann gemäß Satz 81 über die dortige Alternative, d. h. über die Lösbarkeit von (H) oder die einschränkungslose und eindeutige Lösbarkeit von (J) durch Bestimmung von $|A|$ entschieden werden, und ist in Satz 76, 77 [131, 133] ein weiteres Verfahren zur Lösungsbestimmung von (J) im „regulären“ Falle ($|A| \neq 0$) gefunden, das es gestattet, die Lösung in geschlossener Form anzugeben.

Für den allgemeinen Fall besagt unser Satz 78, daß die nach §§ 11, 13 zur Entscheidung über die Lösbarkeit von (H) und Übersicht über die Lösungsgesamtheit von (H) und (J) allein zu bestimmende Anzahl r als Rang ϱ von A auch mittels Determinanten in endlich vielen Schritten, nämlich durch die Berechnung aller Unterdeterminanten von A gefunden werden kann. Darüber hinaus kann so auch ein Maximalsystem linear unabhängiger Zeilen (Spalten) von A in endlich vielen Schritten bestimmt werden. Wir können nämlich aus Satz 78 ohne weiteres die nachstehende, im folgenden Paragraphen anzuwendende Tatsache entnehmen:

Hilfssatz 4. *Ist A eine Matrix vom Range $\varrho > 0$, so liefert jedes Kombinationspaar von ϱ Zeilen und ϱ Spalten von A, dem eine von Null verschiedene Unterdeterminante ϱ-ten Grades entspricht, ein Maximalsystem linear unabhängiger Zeilen und Spalten von A.*

Beweis. Nach Satz 73 [128] sind die in jene Unterdeterminante ϱ-ten Grades eingehenden Teile der betr. ϱ Zeilen (Spalten) von A linear unabhängig, nach Satz 40 [78] also auch die ganzen ϱ Zeilen (Spalten), und nach Satz 78 sind sie dann ein Maximalsystem, linear unabhängiger Zeilen (Spalten).

Zur vollständigen Wiedergewinnung der früheren Resultate bleibt nur noch übrig, die in § 13 mittels des Transformationsverfahrens aus § 12 erschlossenen Sätze 53 [92] und 54 [93] über (J) und (H) determinantentheoretisch zu beweisen, was im folgenden, letzten Paragraphen geschehen soll. Daraus ergibt sich dann natürlich auch der einzige noch nicht genannte Satz 56 [97] des § 13 über (H) und (H') ohne weiteres auf Grund von Satz 78.

§ 22. Anwendung der Determinantentheorie auf lineare Gleichungssysteme im allgemeinen Falle

Der angekündigte Nachweis der Sätze 53 [92] und 54 [93] mittels Determinanten liefert über die darin ausgesprochenen Behauptungen hinaus eine explizite Bestimmung der Lösungsgesamtheit von (J) und (H), also die vollständige Lösung der beiden am Schluß von § 11 genannten Aufgaben J) und H) auf determinantentheoretische Weise. Es empfiehlt sich aus methodischen Gründen, hier die Behandlung von (H) der von (J) voranzustellen.

1. *Lösung von* H)

Die vollständige Lösung von H) ist ersichtlich in dem folgenden Satz enthalten:

Satz 84. (Satz 54 [93]). *Das Gleichungssystem* (H) *mit* (m, n)*-reihiger Matrix* A *vom Range* ϱ *besitzt ein Fundamentallösungssystem von* $n - \varrho$ *Lösungen. Ist* $0 < \varrho < n$ *und, wie ohne Beschränkung angenommen werden darf, die Reihenfolge der Gleichungen und der Unbekannten so gewählt, daß die aus den ersten* ϱ *Zeilen und Spalten von* A *gebildete Unterdeterminante von Null verschieden ist, so wird ein solches durch die* $n - \varrho$ *letzten Zeilen der adjungierten Matrix* $\bar{\mathsf{A}}$ *zu der* (n, n)*-reihigen Matrix* $\bar{A}$ *aus dem Beweise von Satz* 78 [137], *also durch die* $n - \varrho$ *Vektoren*

$$(\bar{\alpha}_{i1}, \ldots, \bar{\alpha}_{in}) \quad (i = \varrho + 1, \ldots, n)$$

aus den Adjunkten 1. Ordnung jener Matrix $\bar{A}$ *gebildet.*

Beweis. Für $\varrho = 0$, also $A = 0$, ist der Satz trivial (vgl. Bew. zu Satz 54 [93]). Sei also $\varrho > 0$, mithin $A \neq 0$. Bei der im Satz gemachten Annahme bilden dann die ersten ϱ Zeilen ein Maximalsystem linear unabhängiger Zeilen von A (§ 21, Hilfssatz 4 [141]). Nach Satz 38, a') [68] sind demnach $f_1, \ldots, f_m$ sämtlich lineare Komposita von $f_1, \ldots, f_\varrho$, so daß nach dem Einsetzungsprinzip jede Lösung $\mathfrak{x}$ von $f_1(\mathfrak{x}) \doteq 0, \ldots, f_\varrho(\mathfrak{x}) \doteq 0$ auch Lösung sämtlicher Gleichungen $f_1(\mathfrak{x}) \doteq 0, \ldots, f_m(\mathfrak{x}) \doteq 0$ ist. Da das Umgekehrte trivialerweise gilt, ist also das aus den ersten ϱ Gleichungen von (H) gebildete Gleichungssystem (H_0) mit der (ϱ, n)-reihigen Matrix A_0 zu (H) äquivalent, so daß es zum Beweis genügt, (H_0) an Stelle von (H) zugrunde zu legen.

Ist nun einerseits $\varrho = n$, also A_0 eine (ϱ, ϱ)-reihige Matrix, für die nach Voraussetzung $|A_0| \neq 0$ ist, so ist (H_0) nach Satz 73 [128] unlösbar, besitzt also ein Fundamentallösungssystem von $0 = \varrho - \varrho = n - \varrho$ Lösungen, wie behauptet.

Ist andererseits $0 < \varrho < n$, so zeigen wir:

a) Die genannten $n - \varrho$ Vektoren sind Lösungen von (H_0). Denn nach dem erweiterten Laplaceschen Entwicklungssatz [§ 19, (1)], angewandt auf die Matrix $\bar{A}$, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{\alpha}_{i'k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, \varrho;\ i' = \varrho + 1, \ldots, n).$$

b) Diese $n - \varrho$ Lösungen von (H_0) sind linear unabhängig. Denn nach Satz 83 [140] ist wegen $|\bar{A}| \neq 0$ auch $|\bar{\mathsf{A}}| \neq 0$. Es sind also nach Satz 73 [128] die n Zeilen von $\bar{\mathsf{A}}$, also nach Satz 39 [68] auch die $n - \varrho$ letzten linear unabhängig.

c) Aus diesen $n - \varrho$ Lösungen von (H_0) läßt sich jede Lösung $\mathfrak{x}$ von (H_0) linear komponieren. Denn das Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{\alpha}_{ik}}{|\bar{A}|} x_i^* \doteq x_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

dessen Matrix die lösende Matrix $\bar{A}^*$ von A ist, hat wegen $|\bar{A}| \neq 0$ nach Satz 76 [131], 83 [140] die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_i^* = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, \ldots, \varrho)$$

$$x_i^* = \quad x_i \qquad (i = \varrho + 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix $(\bar{A}^*)^* = \bar{A}$. Da aber $\mathfrak{x}$ Lösung von (H_0) sein sollte, sind $x_1^* = 0, \ldots, x_\varrho^* = 0$, d. h. es bestehen die Formeln

$$\sum_{i=\varrho+1}^{n} \frac{x_i^*}{|\bar{A}|} \bar{\alpha}_{ik} \left(= \sum_{i=\varrho+1}^{n} \frac{x_i}{|\bar{A}|} \bar{\alpha}_{ik} \right) = x_k \quad (k = 1, \ldots, n),$$

nach denen $\mathfrak{x}$ ein lineares Kompositum unserer $n - \varrho$ Lösungen aus a), b) ist.

Aus a)—c) folgt, daß die im Satz genannten $n - \varrho$ Vektoren ein Fundamentallösungssystem von (H_0), also auch von (H) bilden.

2. *Lösung von* J)

Die vollständige Lösung von J) ist ersichtlich in dem folgenden Satz enthalten:

Satz 85. (Satz 53 [92]). *Ist für das Gleichungssystem* (J) *mit* (m, n)*-reihiger Matrix* A *vom Range* ϱ *die notwendige Lösbarkeitsbedingung von Satz* 51 [82] *erfüllt, so ist* (J) *lösbar. Ist* $\varrho > 0$ *und wird über die Reihenfolge der Gleichungen und der Unbekannten wieder die Annahme von Satz* 84 *gemacht, so findet man eine Lösung von* (J), *indem man in dem aus den ersten* ϱ *Gleichungen von* (J) *gebildeten Gleichungssystem* (J_0) *die Unbekannten* $x_{\varrho+1}, \ldots, x_n = 0$ *setzt* (*falls* $\varrho > n$ *ist*) *und dann* $x_1, \ldots, x_\varrho$ *durch Auflösung des so resultierenden Gleichungssystems mit* (ϱ, ϱ)*-reihiger Matrix von Null verschiedener Determinante gemäß Satz* 76, 77 [131, 133] *bestimmt.*

Beweis. Falls $\varrho = 0$ ist, ist der Satz trivial, weil dann in (J) alle linken Seiten $f_i = 0$ und folglich nach der Voraussetzung auch alle rechten Seiten $a_i = 0$ sind. Sei also $\varrho > 0$. Bei der im Satz gemachten Annahme ist dann wieder nach § 21, Hilfssatz 4 [141] und dem Einsetzungsprinzip wie im Beweis von Satz 84 das System (J_0) zu (J) äquivalent. Daß das im Satz beschriebene Verfahren eine Lösung von (J_0) und somit von (J) liefert, ist ohne weiteres klar.

Durch Satz 84 und 85 ist nach dem im § 11 Bemerkten die Aufgabe § 5, (1) der linearen Algebra vollständig gelöst.

Wir leiten zum Schluß in Ergänzung zu Satz 85 noch zwei für die praktischen Anwendungen nützliche Regeln her, die es erlauben, einerseits die Bestimmung der Lösungsgesamtheit von (J) direkt, und nicht erst gemäß Satz 49 [81] durch Berechnung eines Fundamentallösungssystems von (H) nach Satz 84, und andererseits die Entscheidung über die Lösbarkeit von (J) direkt, und nicht erst gemäß Satz 51, Zusatz 2 [83] durch Berechnung eines Fundamentallösungssystems von (H′) nach Satz 84 auszuführen:

Ohne nähere Begründung klar ist[1]):

Zusatz 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 85 *findet man die Lösungsgesamtheit von* (J) *im Falle* $\varrho > 0$ *folgendermaßen: Man setze in dem dortigen Gleichungssystem* (J_0) *für die Unbekannten* $x_{\varrho+1}, \ldots, x_n$ *irgendwelche Elemente* $\xi_{\varrho+1}, \ldots, \xi_n$ *(falls* $\varrho < n$ *ist) und bestimme dann* $x_1, \ldots, x_\varrho$ *durch Auflösung des so resultierenden Gleichungssystems*

$$\sum_{k=1}^{\varrho} a_{ik}x_k = a_i + \sum_{k=\varrho+1}^{n} (-a_{ik})\,\xi_k\ ^{2}) \qquad (i = 1, \ldots, \varrho)$$

mit (ϱ, ϱ)*-reihiger Matrix von Null verschiedener Determinante gemäß Satz* 76, 77 [131, 133]. *Jedem beliebigen System* $\xi_{\varrho+1}, \ldots, \xi_n$ *entspringt so eine und nur eine Lösung von* (J).

Bezeichnen übrigens α_{ik} die Adjunkten zu den Elementen a_{ik} in jener (ϱ, ϱ)-reihigen Matrix (a_{ik}) $(i, k = 1, \ldots, \varrho)$ und $a = |a_{ik}|$ deren Determinante, so wird nach Satz 76 [131] unter Vertauschung der Summationsfolge

$$x_k = \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\alpha_{ik}}{a} a_i + \sum_{l=\varrho+1}^{n} \xi_l \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\alpha_{ik}}{a}(-a_{il}) = a_k^* + \sum_{l=\varrho+1}^{n} a_{kl}^*\xi_l$$
$$(k = 1, \ldots, \varrho)$$

[1]) Vgl. auch die entsprechende Bemerkung im Anschluß an Satz 53, Zusatz [93] über die Möglichkeit, alle Lösungen von (J) ohne Betrachtung von (H) mit Hilfe des Lösungsverfahrens aus §§ 12, 13 zu gewinnen.

[2]) Im Grenzfall $\varrho = n$ ist die rechtsstehende Summe leer und sinngemäß gleich Null zu setzen.

die Auflösung des fraglichen Gleichungssystems, die verbunden mit

$$x_k = 0 + \xi_k \quad (k = \varrho + 1, \ldots, n)$$

die allgemeine Lösung $\mathfrak{x}_J$ von (J) liefert. Hierbei erscheint die Lösung $\mathfrak{x}_J$ von selbst in zwei Summanden $\mathfrak{x}_J^{(0)}$ und $\mathfrak{x}_H$ gemäß Satz 49 [81] zerlegt, deren erster $\mathfrak{x}_J^{(0)} = (a_1^*, \ldots, a_\varrho^*, 0, \ldots, 0)$ offenbar die in Satz 85 genannte, $\xi_{\varrho+1}, \ldots, \xi_n = 0$ entsprechende, spezielle Lösung von (J) ist, während der zweite $\mathfrak{x}_H$ demnach die allgemeine Lösung des zugeordneten (H) darstellen muß, die hier in ähnlicher Weise aus $n - \varrho$ Fundamentallösungen komponiert erscheint, wie im Beweis zu Satz 54 [93].

Ferner beweisen wir:

Zusatz 2. *Das Gleichungssystem* (J) *ist dann und nur dann lösbar, wenn seine* (m, n)*-reihige Matrix* A *denselben Rang hat, wie die aus ihr durch Anfügung der aus den rechten Seiten* $(a_1, \ldots, a_m)$ *von* (J) *gebildeten Spalte entstehende* $(m, n + 1)$*-reihige Matrix* A_1.

Beweis. a) Ist (J) lösbar, so ist die Spalte $(a_1, \ldots, a_m)$ von den Spalten von A linear abhängig. Dann hat aber A_1 nach § 21, Hilfssatz 3 [136] denselben Rang wie A.

b) Ist (J) unlösbar, so ist die Spalte $(a_1, \ldots, a_m)$ von den Spalten von A linear unabhängig. Ist $A = 0$, so ist also jene Spalte von Null verschieden, d. h. der Rang von A_1 gleich 1, während der von A gleich 0 ist. Ist aber $A \neq 0$, so bildet jene Spalte mit einem Maximalsystem ϱ linear unabhängiger Spalten zusammen nach Satz 38, b) [68] ein System von $\varrho + 1$ linear unabhängigen Spalten. Nach Satz 78 [137] ist also der Rang von A_1 größer als der Rang ϱ von A. Wenn somit A und A_1 denselben Rang haben, muß (J) lösbar sein.

Schluß

Abhängigkeit vom Grundkörper

Zum Abschluß unserer Entwicklungen gehen wir noch auf die Frage ein, ob sich die Resultate von III und IV ändern, wenn von den Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ des vorgelegten linearen Gleichungssystems (J) nicht mehr, wie bisher durchweg, verlangt wird, daß sie dem Körper K angehören, sondern für sie irgendein Erweiterungskörper $\overline{\mathsf{K}}$ von K zugrunde gelegt wird. Da das Gleichungssystem (J) dann auch als eines mit Koeffizienten aus $\overline{\mathsf{K}}$ angesehen werden kann, ist unsere ganze Theorie auch für $\overline{\mathsf{K}}$ als Grundkörper durchführbar. Wenn sich nun hierbei auch die Lösungsgesamtheit von (J) gegenüber K im allgemeinen vergrößert, weil die in die allgemeine Lösung von (J) eingehenden, frei verfügbaren Elemente aus K jetzt aus dem umfangreicheren Körper $\overline{\mathsf{K}}$ frei wählbar werden, so gilt doch:

Satz 86. *Die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit, die eindeutige Lösbarkeit sowie die Anzahl $n - r$ der in der allgemeinen Lösung frei verfügbaren Elemente für ein lineares Gleichungssystem* (J) *in* K *sind invariant beim Übergang von* K *zu irgendeinem Erweiterungskörper* $\overline{\mathsf{K}}$ *von* K *als Grundkörper.*

Beweis. Ist A die Matrix von (J), A_1 die in Satz 85, Zusatz 2 [146] genannte Matrix, und sind r und r_1 die Rangzahlen von A und A_1, so ist die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit von (J) nach Satz 85, Zusatz 2 mit der Relation

$$r = r_1 \text{ bzw. } r < r_1,$$

die eindeutige Lösbarkeit von (J) nach Satz 85, Zusatz 1 [145], mit der Relation

$$r = r_1 = n$$

gleichbedeutend. Nun ist aber das Nullsein bzw. von Null verschieden sein einer Determinante unabhängig davon, ob ihre Glieder als Elemente von K oder $\overline{\mathsf{K}}$ angesehen werden. Daher ist gemäß Def. 41 [135] der Rang einer Matrix beim Übergang von K zu $\overline{\mathsf{K}}$ invariant, also wegen der selbstverständlichen Invarianz von n auch die obigen Relationen, d. h. die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit und die eindeutige Lösbarkeit von (J), sowie die im Satz genannte Anzahl $n - r$.

Namen- und Sachverzeichnis

SAMMLUNG GÖSCHEN

GESAMTVERZEICHNIS

Jeder Band DM 3,60 · Doppelband DM 5,80

Februar 1964

WALTER DE GRUYTER & CO., BERLIN 30

Inhaltsübersicht

Geisteswissenschaften

Philosophie

Einführung in die Philosophie von *H. Leisegang †*. 5. Auflage. 146 Seiten. 1963. (281)

Hauptprobleme der Philosophie von *G. Simmel †*. 7., unveränderte Auflage. 177 Seiten. 1950. (500)

Geschichte der Philosophie

I: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 1. Teil. Von Thales bis Leukippos. 2., erweiterte Auflage. 135 Seiten. 1953. (857)

II: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 2. Teil. Von der Sophistik bis zum Tode Platons. 2., stark erweiterte Auflage. 144 Seiten. 1953. (858)

III: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 3. Teil. Vom Tode Platons bis zur Alten Stoa. 2., stark erweiterte Auflage. 132 Seiten. 1954. (859)

IV: Die griechische Philosophie von *W. Capelle*. 4. Teil. Von der Alten Stoa bis zum Eklektizismus im 1. Jh. v. Chr. 2., stark erweiterte Auflage. 132 Seiten. 1954. (863)

V: Die Philosophie des Mittelalters von *J. Koch*. In Vorbereitung. (826)

VI: Von der Renaissance bis Kant von *K. Schilling*. 234 Seiten. 1954. (394/394a)

VII: Immanuel Kant von *G. Lehmann*. In Vorbereitung. (536)

VIII: Die Philosophie des 19. Jahrhunderts von *G. Lehmann*. 1. Teil. 151 Seiten. 1953. (571)

IX: Die Philosophie des 19. Jahrhunderts von *G. Lehmann*. 2. Teil. 168 Seiten. 1953. (709)

X: Die Philosophie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts 1. Teil von *G. Lehmann*. 128 Seiten. 1957. (845)

XI: Die Philosophie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts 2. Teil von *G. Lehmann*. 114 Seiten. 1960. (850)

Die geistige Situation der Zeit (1931) von *K. Jaspers*. 5., unveränderter Abdruck der im Sommer 1932 bearbeiteten 5. Auflage. 211 Seiten. 1960. (1000)

Erkenntnistheorie von *G. Kropp*.
1. Teil: Allgemeine Grundlegung. 143 Seiten. 1950. (807)

Formale Logik von *P. Lorenzen*. 2., verbesserte Auflage. 165 Seiten. 1962. (1176/1176a)

Philosophisches Wörterbuch von *M. Apel †*. 5., völlig neubearbeitete Auflage von *P. Ludz*. 315 Seiten. 1958. (1031/1031a)

Philosophische Anthropologie. Menschliche Selbstdeutung in Geschichte und Gegenwart von *M. Landmann*. 2. Auflage. 214 Seiten. 1964. (156/156a)

Pädagogik, Psychologie, Soziologie

Geschichte der Pädagogik von *Herm. Weimer*. 15., neubearbeitete und vermehrte Auflage von *Heinz Weimer*. 184 Seiten. 1962. (145)
Therapeutische Psychologie. Ihr Weg durch die Psychoanalyse von *W. M. Kranefeldt*. Mit einer Einführung von *C. G. Jung*. 3. Auflage. 152 Seiten. 1956. (1034)
Allgemeine Psychologie von *Th. Erismann †*. 4 Bände. 2., neubearbeitete Auflage.
I: Grundprobleme. 146 Seiten. 1958. (831)
II: Grundarten des psychischen Geschehens. 248 Seiten. 1959. (832/832a)
III: Experimentelle Psychologie und ihre Grundlagen. 1. Teil. 112 Seiten, 7 Abbildungen. 1962. (833)
IV: Experimentelle Psychologie und ihre Grundlagen. 2. Teil. 199 Seiten, 20 Abbildungen. 1962. (834/834a)
Soziologie. Geschichte und Hauptprobleme von *L. von Wiese*. 6. Auflage. 175 Seiten. 1960. (101)
Ideengeschichte der sozialen Bewegung des 19. und 20. Jh. von *W. Hofmann*. 243 Seiten. 1962. (1205/1205a)
Sozialpsychologie von *P. R. Hofstätter*. 2. Auflage. 181 Seiten, 15 Abbildungen, 22 Tabellen. 1964. In Vorbereitung. (104/104a)
Psychologie des Berufs- und Wirtschaftslebens von *W. Moede †*. 190 Seiten, 48 Abbildungen. 1958. (851/851a)
Industrie- und Betriebssoziologie von *R. Dahrendorf*. 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. 142 Seiten, 3 Figuren. 1962. (103)
Wirtschaftssoziologie von *F. Fürstenberg*. 122 Seiten. 1961. (1193)
Einführung in die Sozialethik von *H.-D. Wendland*. 144 Seiten. 1963. (1203)

Religion

Jesus von *M. Dibelius †*. 3. Auflage, mit einem Nachtrag von *W. G. Kümmel*. 140 Seiten. 1960. (1130)
Paulus von *M. Dibelius †*. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben und zu Ende geführt von *W. G. Kümmel*. 3., durchgesehene Auflage. 155 Seiten. 1964. (1160)
Luther von *F. Lau*. 151 Seiten. 1959. (1187)
Melanchthon von *R. Stupperich*. 139 Seiten. 1960. (1190)
Einführung in die Konfessionskunde der orthodoxen Kirchen von *K. Onasch*. 291 Seiten. 1962. (1197/1197a)
Geschichte des christlichen Gottesdienstes von *W. Nagel*. 215 Seiten. 1962. (1202/1202a)
Geschichte Israels. Von den Anfängen bis zur Zerstörung des Tempels (70 n. Chr.) von *E. L. Ehrlich*. 158 Seiten, 1 Tafel. 1958. (231/231a)
Römische Religionsgeschichte von *F. Altheim*. 2 Bände. 2., umgearbeitete Auflage.
I: Grundlagen und Grundbegriffe. 116 Seiten. 1956. (1035)
II: Der geschichtliche Ablauf. 164 Seiten. 1956. (1052)

Die Religion des Buddhismus von *D. Schlingloff*. 2 Bände.
I: Der Heilsweg des Mönchtums. 122 Seiten, 11 Abbildungen, 1 Karte. 1962. (174)
II: Der Heilsweg für die Welt. 129 Seiten, 9 Abbildungen, 1 Karte. 1963. (770)

Musik

Musikästhetik von *H. J. Moser*. 180 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1953. (344)
Systematische Modulation von *R. Hernried*. 2. Auflage. 136 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1950. (1094)
Der polyphone Satz von *E. Pepping*. 2 Bände.
I: Der cantus-firmus-Satz. 2. Auflage. 223 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1950. (1148)
II: Übungen im doppelten Kontrapunkt und im Kanon. 137 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1957. (1164/1164a)
Allgemeine Musiklehre von *H. J. Moser*. 2., durchgesehene Auflage. 155 Seiten. Mit zahlreichen Notenbeispielen. 1955. (220/220a)
Harmonielehre von *H. J. Moser*. 2 Bände.
I: 109 Seiten. Mit 120 Notenbeispielen. 1954. (809)
II: In Vorbereitung. (810)
Die Musik des 19. Jahrhunderts von *W. Oehlmann*. 180 Seiten. 1953. (170)
Die Musik des 20. Jahrhunderts von *W. Oehlmann*. 312 Seiten. 1961. (171/171a)
Technik der deutschen Gesangskunst von *H. J. Moser*. 3., durchgesehene und verbesserte Auflage. 144 Seiten, 5 Figuren sowie Tabellen und Notenbeispiele. 1954. (576/576a)
Die Kunst des Dirigierens von *H. W. von Waltershausen †*. 2., vermehrte Auflage. 138 Seiten. Mit 19 Notenbeispielen. 1954. (1147)
Die Technik des Klavierspiels aus dem Geiste des musikalischen Kunstwerkes von *K. Schubert †*. 3. Auflage. 110 Seiten. Mit Notenbeispielen. 1954. (1045)

Kunst

Stilkunde von *H. Weigert*. 2 Bände. 3., durchgesehene und ergänzte Auflage.
I: Vorzeit, Antike, Mittelalter. 136 Seiten, 94 Abbildungen. 1958. (80)
II: Spätmittelalter und Neuzeit. 150 Seiten, 88 Abbildungen. 1958. (781)
Archäologie von *A. Rumpf*. 3 Bände.
I: Einleitung, historischer Überblick. 143 Seiten, 6 Abbildungen, 12 Tafeln. 1953. (538)
II: Die Archäologensprache. Die antiken Reproduktionen. 136 Seiten, 7 Abbildungen, 12 Tafeln. 1956. (539)
III: In Vorbereitung. (540)

Geschichte

Einführung in die Geschichtswissenschaft von *P. Kirn*. 4., durchgesehene Auflage. 127 Seiten. 1963. (270)

Einführung in die Zeitgeschichte von *B. Scheurig.* 101 Seiten. 1962. (1204)

Zeitrechnung der römischen Kaiserzeit, des Mittelalters und der Neuzeit für die Jahre 1—2000 n. Chr. von *H. Lietzmann †.* 3. Auflage, durchgesehen von *K. Aland.* 130 Seiten. 1956. (1085)

Kultur der Urzeit von *F. Behn.* 3 Bände. 4. Auflage der Kultur der Urzeit Bd. 1—3 von *M. Hoernes.*

I: Die vormetallischen Kulturen. (Die Steinzeiten Europas. Gleichartige Kulturen in anderen Erdteilen.) 172 Seiten, 48 Abbildungen. 1950. (564)

II: Die älteren Metallkulturen. (Der Beginn der Metallbenutzung, Kupfer- und Bronzezeit in Europa, im Orient und in Amerika.) 160 Seiten, 67 Abbildungen. 1950. (565)

III: Die jüngeren Metallkulturen. (Das Eisen als Kulturmetall, Hallstatt-Latène-Kultur in Europa. Das erste Auftreten des Eisens in den anderen Weltteilen.) 149 Seiten, 60 Abbildungen. 1950. (566)

Vorgeschichte Europas von *F. Behn.* Völlig neue Bearbeitung der 7. Auflage der „Urgeschichte der Menschheit" von *M. Hoernes.* 125 Seiten, 47 Abbildungen. 1949. (42)

Der Eintritt der Germanen in die Geschichte von *J. Haller †.* 3. Auflage, durchgesehen von *H. Dannenbauer.* 120 Seiten, 6 Kartenskizzen. 1957. (1117)

Von den Karolingern zu den Staufern. Die altdeutsche Kaiserzeit (900—1250) von *J. Haller †.* 4., durchgesehene Auflage von *H. Dannenbauer.* 142 Seiten, 4 Karten. 1958. (1065)

Von den Staufern zu den Habsburgern. Auflösung des Reichs und Emporkommen der Landesstaaten (1250—1519) von *J. Haller †.* 2., durchgesehene Auflage von *H. Dannenbauer.* 118 Seiten, 6 Kartenskizzen. 1960. (1077)

Deutsche Geschichte im Zeitalter der Reformation, der Gegenreformation und des dreißigjährigen Krieges von *F. Hartung.* 2., durchgesehene Auflage. 128 Seiten. 1963. (1105)

Deutsche Geschichte von 1648—1740. Politischer und geistiger Wiederaufbau von *W. Treue.* 120 Seiten. 1956. (35)

Deutsche Geschichte von 1713—1806. Von der Schaffung des europäischen Gleichgewichts bis zu Napoleons Herrschaft von *W. Treue.* 168 Seiten. 1957. (39)

Deutsche Geschichte von 1806—1890. Vom Ende des alten bis zur Höhe des neuen Reiches von *W. Treue.* 128 Seiten. 1961. (893)

Deutsche Geschichte von 1890 bis zur Gegenwart von *W. Treue.* In Vorbereitung. (894)

Quellenkunde der Deutschen Geschichte im Mittelalter (bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts) von *K. Jacob †.* 3 Bände.

I: Einleitung. Allgemeiner Teil. Die Zeit der Karolinger. 6. Auflage, bearbeitet von *H. Hohenleutner.* 127 Seiten. 1959. (279)

II: Die Kaiserzeit (911—1250). 5. Auflage, neubearbeitet von *H. Hohenleutner.* 141 Seiten. 1961. (280)

III: Das Spätmittelalter (vom Interregnum bis 1500). Herausgegeben von *F. Weden.* 152 Seiten. 1952. (284)

Geschichte Englands von *H. Preller.* 2 Bände.
I: bis 1815. 3., stark umgearbeitete Auflage. 135 Seiten, 7 Stammtafeln, 2 Karten. 1952. (375)
II: Von 1815 bis 1910. 2., völlig umgearbeitete Auflage. 118 Seiten, 1 Stammtafel, 7 Karten. 1954. (1088)

Römische Geschichte von *F. Altheim.* 4 Bände. 2., verbesserte Auflage.
I: Bis zur Schlacht bei Pydna (168 v.Chr.). 124 Seiten. 1956. (19)
II: Bis zur Schlacht bei Actium (31 v.Chr.). 129 Seiten. 1956. (677)
III: Bis zur Schlacht an der Milvischen Brücke (312 n.Chr.). 148 Seiten. 1958. (679)
IV: Bis zur Schlacht am Yarmuk (636 n.Chr.). In Vorbereitung. (684)

Geschichte der Vereinigten Staaten von Amerika von *O. Graf zu Stolberg-Wernigerode.* 192 Seiten, 10 Karten. 1956. (1051/1051a)

Deutsche Sprache und Literatur

Geschichte der Deutschen Sprache von *H. Sperber.* 4. Auflage, besorgt von *W. Fleischhauer.* 128 Seiten. 1963. (915)

Deutsches Rechtschreibungswörterbuch von *M. Gottschald †.* 2., verbesserte Auflage. 219 Seiten. 1953. (200/200a)

Deutsche Wortkunde. Kulturgeschichte des deutschen Wortschatzes von *A. Schirmer.* 4. Auflage von *W. Mitzka.* 123 Seiten. 1960. (929)

Deutsche Sprachlehre von *W. Hofstaetter.* 10. Auflage. Völlige Umarbeitung der 8. Auflage. 150 Seiten. 1960. (20)

Stimmkunde für Beruf, Kunst und Heilzwecke von *H. Biehle.* 111 Seiten. 1955. (60)

Redetechnik. Einführung in die Rhetorik von *H. Biehle.* 2., erweiterte Auflage. 151 Seiten. 1961. (61)

Sprechen und Sprachpflege (Die Kunst des Sprechens) von *H. Feist.* 2., verbesserte Auflage. 99 Seiten, 25 Abbildungen. 1952. (1122)

Deutsches Dichten und Denken von der germanischen bis zur staufischen Zeit von *H. Naumann †.* (Deutsche Literaturgeschichte vom 5.—13. Jahrhundert.) 2., verbesserte Auflage. 166 Seiten. 1952. (1121)

Deutsches Dichten und Denken vom Mittelalter zur Neuzeit von *G. Müller* (1270 bis 1700). 3., durchgesehene Auflage. 159 Seiten. In Vorbereitung. (1086)

Deutsches Dichten und Denken von der Aufklärung bis zum Realismus (Deutsche Literaturgeschichte von 1700—1890) von *K. Viëtor †.* 3., durchgesehene Auflage. 159 Seiten. 1958. (1096)

Deutsche Heldensage von *H. Schneider.* 2. Auflage, bearbeitet von *R. Wisniewski.* 148 Seiten. 1964. (32)

Der Nibelunge Nôt in Auswahl mit kurzem Wörterbuch von *K. Langosch.* 10., durchgesehene Auflage. 164 Seiten. 1956. (1)

Kudrun und Dietrich-Epen in Auswahl mit Wörterbuch von *O. L. Jiriczek.* 6. Auflage, bearbeitet von *R. Wisniewski.* 173 Seiten. 1957. (10)

Wolfram von Eschenbach. Parzival. Eine Auswahl mit Anmerkungen und Wörterbuch von *H. Jantzen.* 2. Auflage, bearbeitet von *H. Kolb.* 128 Seiten. 1957. (921)

Hartmann von Aue. Der arme Heinrich nebst einer Auswahl aus der „Klage", dem „Gregorius" und den Liedern (mit einem Wörterverzeichnis) herausgegeben von *F. Maurer.* 96 Seiten. 1958. (18)
Gottfried von Strassburg in Auswahl herausgegeben von *F. Maurer.* 142 Seiten. 1959. (22)
Die deutschen Personennamen von *M. Gottschald †.* 2., verbesserte Auflage. 151 Seiten. 1955. (422)
Althochdeutsches Elementarbuch. Grammatik und Texte von *H. Naumann †* und *W. Betz.* 3., verbesserte und vermehrte Auflage. 183 Seiten. 1962. (1111/1111a)
Mittelhochdeutsche Grammatik von *H. de Boor* und *R. Wisniewski.* 3., verbesserte und ergänzte Auflage. 150 Seiten. 1963. (1108)

Indogermanisch, Germanisch

Indogermanische Sprachwissenschaft von *H. Krahe.* 2 Bände. 4., überarbeitete Auflage.
I: Einleitung und Lautlehre. 110 Seiten. 1962. (59)
II: Formenlehre. 100 Seiten. 1963. (64)
Gotisches Elementarbuch. Grammatik, Texte mit Übersetzung und Erläuterungen von *H. Hempel.* 3., umgearbeitete Auflage. 166 Seiten. 1962. (79/79a)
Germanische Sprachwissenschaft von *H. Krahe.* 2 Bände.
I: Einleitung und Lautlehre. 5., überarbeitete Auflage. 149 Seiten. 1963. (238)
II: Formenlehre. 4., überarbeitete Auflage. 149 Seiten. 1961. (780)
Altnordisches Elementarbuch. Schrift, Sprache, Texte mit Übersetzung und Wörterbuch von *F. Ranke.* 2., durchgesehene Auflage. 146 Seiten. 1949. (1115)

Englisch, Romanisch

Altenglisches Elementarbuch. Einführung, Grammatik, Texte mit Übersetzung und Wörterbuch von *M. Lehnert.* 5., verbesserte Auflage. 178 Seiten. 1962. (1125)
Historische neuenglische Laut- und Formenlehre von *E. Ekwall.* 3., durchgesehene Auflage. 150 Seiten. 1956. (735)
Englische Phonetik von *H. Mutschmann †.* 2. Auflage, bearbeitet von *G. Scherer.* 127 Seiten. 1963. (601)
Englische Literaturgeschichte von *F. Schubel.* 4 Bände.
I: Die alt- und mittelenglische Periode. 163 Seiten. 1954. (1114)
II: Von der Renaissance bis zur Aufklärung. 160 Seiten. 1956. (1116)
III: Romantik und Viktorianismus. 160 Seiten. 1960. (1124)
Beowulf von *M. Lehnert.* Eine Auswahl mit Einführung, teilweiser Übersetzung, Anmerkungen und etymologischem Wörterbuch. 3., verbesserte Auflage. 135 Seiten. 1959. (1135)
Shakespeare von *P. Meißner †.* 2. Auflage, neubearbeitet von *M. Lehnert.* 136 Seiten. 1954. (1142)

Romanische Sprachwissenschaft von *H. Lausberg*. 4 Bände.
I: Einleitung und Vokalismus. 2., durchgesehene Auflage. 211 Seiten. 1963. (128/128a)
II: Konsonantismus. 95 Seiten. 1956. (250)
III: Formenlehre. 1. Teil. 99 Seiten. 1962. (1199)
III: Formenlehre. 2. Teil. S. 99—260. 1962. (1200/1200a)
IV: Wortlehre. In Vorbereitung. (1208)

Griechisch, Lateinisch

Griechische Sprachwissenschaft von *W. Brandenstein*. 3 Bände.
I: Einleitung, Lautsystem, Etymologie. 160 Seiten. 1954. (117)
II: Wortbildung und Formenlehre. 192 Seiten. 1959. (118/118a)
III: Syntax. In Vorbereitung. (1218)

Geschichte der griechischen Sprache. 2 Bände.
I: Bis zum Ausgang der klassischen Zeit von *O. Hoffmann †*. 3. Auflage, bearbeitet von *A. Debrunner †*. 156 Seiten. 1953. (111)
II: Grundfragen und Grundzüge des nachklassischen Griechisch von *A. Debrunner †*. 144 Seiten. 1954. (114)

Geschichte der griechischen Literatur von *W. Nestle*. 2 Bände. 3. Auflage, bearbeitet von *W. Liebich*.
I: 144 Seiten. 1961. (70)
II: 149 Seiten. 1963. (557)

Grammatik der neugriechischen Volkssprache von *J. Kalitsunakis*. 3., wesentlich erweiterte und verbesserte Auflage. 196 Seiten. 1963. (756/756a)

Neugriechisch-deutsches Gesprächsbuch von *J. Kalitsunakis*. 2. Auflage, bearbeitet von *A. Steinmetz*. 99 Seiten. 1960. (587)

Geschichte der lateinischen Sprache von *F. Stolz*. 4. Auflage von *A. Debrunner †*. In Vorbereitung. (492)

Geschichte der römischen Literatur von *L. Bieler*. 2 Bände.
I: Die Literatur der Republik. 160 Seiten. 1961. (52)
II: Die Literatur der Kaiserzeit. 133 Seiten. 1961. (866)

Hebräisch, Sanskrit, Russisch

Hebräische Grammatik von *G. Beer †*. 2 Bände. Völlig neubearbeitet von *R. Meyer*.
I: Schrift-, Laut- und Formenlehre I. 3. Auflage. Etwa 224 Seiten. In Vorbereitung. (763/763a)
II: Formenlehre II. Syntax und Flexionstabellen. 2. Auflage. 195 Seiten. 1955. (764/764a)

Hebräisches Textbuch zu *G. Beer-R. Meyer*, Hebräische Grammatik von *R. Meyer*. 170 Seiten. 1960. (769/769a)

Sanskrit-Grammatik von *M. Mayrhofer*. 89 Seiten. 1953. (1158)

Russische Grammatik von *E. Berneker †*. 6., verbesserte Auflage von *M. Vasmer †*. 155 Seiten. 1961. (66)

Slavische Sprachwissenschaft von *H. Bräuer*. 2 Bände.
I: Einleitung, Lautlehre. 221 Seiten. 1961. (1191/1191a)

Erd- und Länderkunde, Kartographie

Afrika von *F. Jaeger*. Ein geographischer Überblick. 2 Bände. 3. Auflage.
- I: Der Lebensraum. 179 Seiten, 18 Abbildungen. In Vorbereitung. (910)
- II: Mensch und Kultur. 155 Seiten, 6 Abbildungen. In Vorbereitung. (911)

Australien und Ozeanien von *H. J. Krug*. 176 Seiten, 46 Skizzen. 1953. (319)

Kartographie von *V. Heissler*. 213 Seiten, 125 Abb., 8 Anlagen. 1962. (30/30a)

Volkswirtschaft, Statistik, Publizistik

Allgemeine Betriebswirtschaftslehre von *K. Mellerowicz*. 4 Bände. 11., durchgesehene Auflage.
- I: 224 Seiten. 1961. (1008/1008a)
- II: 188 Seiten. 1962. (1153/1153a)
- III: 260 Seiten. 1963. (1154/1154a)
- IV: 209 Seiten. 1963. (1186/1186a)

Buchhaltung und Bilanz von *E. Kosiol*. Etwa 114 Seiten, 29 Tafeln. 1964. (1213)

Geschichte der Volkswirtschaftslehre von *S. Wendt*. 182 Seiten. 1961. (1194)

Allgemeine Volkswirtschaftslehre von *A. Paulsen*. 4 Bände.
- I: Grundlegung, Wirtschaftskreislauf. 5., neubearbeitete Auflage. 154 Seiten. 1964. (1169)
- II: Haushalte, Unternehmungen, Marktformen. 5., neubearbeitete Auflage. 168 Seiten, 35 Abbildungen. 1964. (1170)
- III: Produktionsfaktoren. 3., neubearbeitete und ergänzte Auflage. 198 Seiten. 1963. (1171)
- IV: Gesamtbeschäftigung, Konjunkturen, Wachstum. 3. Auflage. 174 Seiten. 1964. (1172)

Allgemeine Volkswirtschaftspolitik von *H. Ohm*. 2 Bände.
- I: Systematisch-Theoretische Grundlegung. 137 Seiten, 6 Abbildungen. 1962. (1195)
- II: Der volkswirtschaftliche Gesamtorganismus als Objekt der Wirtschaftspolitik. In Vorbereitung. (1196)

Finanzwissenschaft von *H. Kolms*. 4 Bände.
- I: Grundlegung, Öffentliche Ausgaben. 2., verbesserte Auflage. 162 Seiten. 1963. (148)
- II: Erwerbseinkünfte, Gebühren und Beiträge, Allgemeine Steuerlehre. 2., verbesserte Auflage. 150 Seiten. 1964. (391)
- III: Besondere Steuerlehre. 178 Seiten. 1962. (776)
- IV: Öffentlicher Kredit. Haushaltswesen. Finanzausgleich. 1964. In Vorbereitung. (782)

Finanzmathematik von *M. Nicolas.* 192 Seiten, 11 Tafeln, 8 Tabellen und 72 Beispiele. 1959. (1183/1183a)

Industrie- und Betriebssoziologie von *R. Dahrendorf.* 2., umgearbeitete und erweiterte Auflage. 142 Seiten, 3 Figuren. 1962. (103)

Wirtschaftssoziologie von *F. Fürstenberg.* 122 Seiten. 1961. (1193)

Psychologie des Berufs- und Wirtschaftslebens von *W. Moede †.* 190 Seiten, 48 Abbildungen. 1958. (851/851a)

Einführung in die Arbeitswissenschaft von *H. H. Hilf.* 164 Seiten, 57 Abbildungen. 1964. (1212/1212a)

Allgemeine Methodenlehre der Statistik von *J. Pfanzagl.* 2 Bände.
I: Elementare Methoden unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. 2. Auflage. 251 Seiten, 42 Abbildungen. 1964. (746/746a)
II: Höhere Methoden unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen in Naturwissenschaft, Medizin und Technik. 295 Seiten, 39 Abbildungen. 1962. (747/747a)

Zeitungslehre von *E. Dovifat.* 2 Bände. 4., neubearbeitete Auflage.
I: Theoretische und rechtliche Grundlagen — Nachricht und Meinung — Sprache und Form. 149 Seiten. 1962. (1039)
II: Redaktion — Die Sparten: Verlag und Vertrieb, Wirtschaft und Technik — Sicherung der öffentlichen Aufgabe. 168 Seiten. 1962. (1040)

Naturwissenschaften

Mathematik

Geschichte der Mathematik von *J. E. Hofmann.* 4 Bände.
I: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 251 Seiten. 1963. (226/226a)
II: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden. 109 Seiten. 1957. (875)
III: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur französischen Revolution. 107 Seiten. 1957. (882)
IV: Geschichte der Mathematik der neuesten Zeit von *N. Stuloff.* In Vorbereitung. (883)

Mathematische Formelsammlung von *F. O. Ringleb.* 7., erweiterte Auflage. 320 Seiten, 40 Figuren. 1960. (51/51a)

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von *H. Schubert* und *R. Haussner.* 3., neubearbeitete Auflage von *J. Erlebach.* 158 Seiten. 1960. (81)

Fünfstellige Logarithmen mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlenwerten von *A. Adler.* 4. Auflage, überarbeitet von *J. Erlebach.* 127 Seiten, 1 Tafel. 1962. (423)

Arithmetik von *P. B. Fischer †.* 3. Auflage von *H. Rohrbach.* 152 Seiten, 19 Abbildungen. 1958. (47)

Höhere Algebra von *H. Hasse.* 2 Bände.
I: Lineare Gleichungen. 5., neubearbeitete Auflage. 150 Seiten. 1963. (931)
II: Gleichungen höheren Grades. 4., durchgesehene Auflage. 158 Seiten, 5 Figuren. 1958. (932)

Aufgabensammlung zur höheren Algebra von *H. Hasse* und *W. Klobe.* 3., verbesserte Auflage. 183 Seiten. 1961. (1082)

Elementare und klassische Algebra vom modernen Standpunkt von *W. Krull.* 2 Bände.
I: 3., erweiterte Auflage. 148 Seiten. 1963. (930)
II: 132 Seiten. 1959. (933)

Lineare Programmierung von *H. Langen.* Etwa 200 Seiten. 1964. (1206/1206a)

Algebraische Kurven und Flächen von *W. Burau.* 2 Bände.
I: Algebraische Kurven der Ebene. 153 Seiten, 28 Abbildungen. 1962. (435)
II: Algebraische Flächen 3. Grades und Raumkurven 3. und 4. Grades. 162 Seiten, 17 Abbildungen. 1962. (436/436a)

Einführung in die Zahlentheorie von *A. Scholz †.* Überarbeitet und herausgegeben von *B. Schoeneberg.* 3. Auflage. 128 Seiten. 1961. (1131)

Formale Logik von *P. Lorenzen.* 2., verbesserte Auflage. 165 Seiten. 1962. (1176/1176a)

Topologie von *W. Franz.* 2 Bände.
I: Allgemeine Topologie. 144 Seiten, 9 Figuren. 1960. (1181)
II: Algebraische Topologie. 130 Seiten. 1964. (1182)

Elemente der Funktionentheorie von *K. Knopp †.* 6. Auflage. 144 Seiten, 23 Figuren. 1963. (1109)

Funktionentheorie von *K. Knopp †.* 2 Bände. 10. Auflage.
I: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. 144 Seiten, 8 Figuren. 1961. (668)
II: Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. 130 Seiten, 7 Figuren. 1962. (703)

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie von *K. Knopp †.* 2 Bände.
I: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 6. Auflage. 135 Seiten. 1962. (877)
II: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 5. Auflage. 151 Seiten. 1959. (878)

Differential- und Integralrechnung von *M. Barner.* (Früher *Witting*). 4 Bände.
I: Grenzwertbegriff, Differentialrechnung. 2., durchgesehene Auflage. 176 Seiten, 39 Figuren. 1963. (86)

Gewöhnliche Differentialgleichungen von *G. Hoheisel.* 6., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 128 Seiten. 1960. (920)

Partielle Differentialgleichungen von *G. Hoheisel.* 4., durchgesehene Auflage. 128 Seiten. 1960. (1003)

Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen von *G. Hoheisel.* 5., durchgesehene und verbesserte Auflage. 124 Seiten. 1964. (1059/1059a)

Integralgleichungen von *G. Hoheisel.* 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 112 Seiten. 1963. (1099)

Mengenlehre von *E. Kamke.* 4., verbesserte Auflage. 194 Seiten, 6 Figuren. 1962. (999/999a)

Gruppentheorie von *L. Baumgartner.* 4., neubearbeitete Auflage. 110 Seiten, 3 Tafeln. 1964. In Vorbereitung. (837)

Ebene und sphärische Trigonometrie von *G. Hessenberg †.* 5. Auflage, durchgesehen von *H. Kneser.* 172 Seiten, 60 Figuren. 1957. (99)

Darstellende Geometrie von *W. Haack.* 3 Bände.
I: Die wichtigsten Darstellungsmethoden. Grund- und Aufriß ebenflächiger Körper. 4., durchgesehene und ergänzte Auflage. 113 Seiten, 120 Abbildungen. 1963. (142)
II: Körper mit krummen Begrenzungsflächen. Kotierte Projektionen. 3., durchgesehene Auflage. 129 Seiten, 86 Abbildungen. 1962. (143)
III: Axonometrie und Perspektive. 2., durchgesehene und ergänzte Auflage. 129 Seiten, 100 Abbildungen. 1962. (144)

Analytische Geometrie von *K. P. Grotemeyer.* 2., erweiterte Auflage. 218 Seiten, 73 Abbildungen. 1962. (65/65a)

Nichteuklidische Geometrie. Hyperbolische Geometrie der Ebene von *R. Baldus †.* Durchgesehen und herausgegeben von *F. Löbell.* 4., verbesserte Auflage. 140 Seiten, 70 Figuren. 1964. (970)

Differentialgeometrie von *K. Strubecker* (früher *Rothe*). 3 Bände.
I: Kurventheorie der Ebene und des Raumes. 2. Auflage. 200 Seiten, 18 Figuren. 1964. In Vorbereitung. (1113/1113a)

II: Theorie der Flächenmetrik. 195 Seiten, 14 Figuren. 1958. (1179/1179a)
III: Theorie der Flächenkrümmung. 254 Seiten, 38 Figuren. 1959. (1180/1180a)

Variationsrechnung von *L. Koschmieder*. 2 Bände. 2., neubearbeitete Auflage.
I: Das freie und gebundene Extrem einfacher Grundintegrale. 128 Seiten, 23 Figuren. 1962. (1074)
II: Anwendung klassischer Verfahren auf allgemeine Fragen des Extrems. — Neuere unmittelbare Verfahren. In Vorbereitung. (1075)

Einführung in die konforme Abbildung von *L. Bieberbach*. 5., erweiterte Auflage. 180 Seiten, 42 Figuren. 1956. (768/768a)

Vektoren und Matrizen von *S. Valentiner*. 3. Auflage. (10., erweiterte Auflage der „Vektoranalysis"). Mit Anhang: Aufgaben zur Vektorrechnung von *H. König*. 206 Seiten, 35 Figuren. 1963. (354/354a)

Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie von *H. Bauer*. 2 Bände.
I: 1964. Im Druck. (1216)
II: In Vorbereitung. (1217)

Versicherungsmathematik von *F. Böhm*. 2 Bände.
I: Elemente der Versicherungsrechnung. 3., vermehrte und verbesserte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 151 Seiten. 1953. (180)
II: Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 205 Seiten. 1953. (917/917a)

Finanzmathematik von *M. Nicolas* 192 Seiten, 11 Tafeln, 8 Tabellen und 72 Beispiele. 1959. (1183/1183a)

Kinematik von *H. R. Müller*. 171 Seiten, 75 Figuren. 1963. (584/584a)

Physik

Einführung in die theoretische Physik von *W. Döring*. 5 Bände.
I: Mechanik. 2., verbesserte Auflage. 123 Seiten, 25 Abbildungen. 1960. (76)
II: Das elektromagnetische Feld. 2., verbesserte Auflage. 132 Seiten, 15 Abbildungen. 1962. (77)
III: Optik. 2., verbesserte Auflage. 117 Seiten, 32 Abbildungen. 1963. (78)
IV: Thermodynamik. 2., verbesserte Auflage. 107 Seiten, 9 Abbildungen. 1964. (374)
V: Statistische Mechanik. 114 Seiten, 12 Abbildungen. 1957. (1017)

Mechanik deformierbarer Körper von *M. Päsler*. 199 Seiten, 48 Abbildungen. 1960. (1189/1189a)

Atomphysik von *K. Bechert*, *Ch. Gerthsen †* und *A. Flammersfeld*. 7 Bände. 4., durchgesehene Auflage.
I: Allgemeine Grundlagen. 1. Teil von *A. Flammersfeld*. 124 Seiten, 35 Abbildungen. 1959. (1009)
II: Allgemeine Grundlagen. 2. Teil von *A. Flammersfeld*. 112 Seiten, 47 Abbildungen. 1963. (1033)

III: Theorie des Atombaus. 1. Teil von *K. Bechert*. 148 Seiten, 16 Abbildungen. 1963. (1123/1123a)
IV: Theorie des Atombaus. 2. Teil von *K. Bechert*. 170 Seiten, 14 Abbildungen. 1963. (1165/1165a)

Differentialgleichungen der Physik von *F. Sauter*. 3., durchgesehene und ergänzte Auflage. 148 Seiten, 16 Figuren. 1958. (1070)

Physikalische Formelsammlung von *G. Mahler†*. Fortgeführt von *K. Mahler*. Neubearbeitet von *H. Graewe*. 11. Auflage. 167 Seiten, 69 Figuren. 1963. (136)

Physikalische Aufgabensammlung von *G. Mahler †*. Neubearbeitet von *H. Graewe*. Mit den Ergebnissen. 12. Auflage. 127 Seiten. 1964. (243)

Chemie

Geschichte der Chemie in kurzgefaßter Darstellung von *G. Lockemann*. 2 Bände.
I: Vom Altertum bis zur Entdeckung des Sauerstoffs. 2. Auflage. 142 Seiten, 8 Bildnisse. In Vorbereitung. (264)
II: Von der Entdeckung des Sauerstoffs bis zur Gegenwart. 151 Seiten, 16 Bildnisse. 1955. (265/265a)

Anorganische Chemie von *W. Klemm*. 13., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 255 Seiten, 35 Abbildungen. 1964. (37/37a)

Organische Chemie von *W. Schlenk*. 9., erweiterte Auflage. 273 Seiten, 16 Abbildungen. 1963. (38/38a)

Physikalische Methoden in der Organischen Chemie von *G. Kresze*. 2 Bände.
I: 119 Seiten, 65 Abbildungen. 1962. (44)
II: 164 Seiten. 1962. (45/45a)

Allgemeine und physikalische Chemie von *W. Schulze*. 2 Bände.
I: 5., durchgesehene Auflage. 139 Seiten, 10 Figuren. 1960. (71)
II: 5., verbesserte Auflage. 178 Seiten, 37 Figuren. 1961. (698/698a)

Einfache Versuche zur allgemeinen und physikalischen Chemie von *E. Dehn*. 371 Versuche mit 40 Abbildungen. 272 Seiten. 1962. (1201/1201a)

Molekülbau. Theoretische Grundlagen und Methoden der Strukturermittlung von *W. Schulze*. 123 Seiten, 43 Figuren. 1958. (786)

Physikalisch-chemische Rechenaufgaben von *E. Asmus*. 3., verbesserte Auflage. 96 Seiten. 1958. (445)

Maßanalyse. Theorie und Praxis der klassischen und der elektrochemischen Titrierverfahren von *G. Jander* und *K. F. Jahr*. 10., erweiterte Auflage, mitbearbeitet von *H. Knoll*. 358 Seiten, 56 Figuren. 1963. (221/221a)

Qualitative Analyse von *H. Hofmann* u. *G. Jander*. 2., durchgesehene und verbesserte Auflage. 308 Seiten, 5 Abbildungen. 1963. (247/247a)

Thermochemie von *W. A. Roth †*. 2., verbesserte Auflage. 109 Seiten, 16 Figuren. 1952. (1057)

Stöchiometrische Aufgabensammlung von *W. Bahrdt* † und *R. Scheer*. Mit den Ergebnissen. 7., durchgesehene Auflage. 119 Seiten. 1960. (452)
Elektrochemie von *K. Vetter*. 2 Bände.
I: 1964. In Vorbereitung. (252)
II: 1964. In Vorbereitung. (253)

Technologie

Die Chemie der Kunststoffe von *K. Hamann*, unter Mitarbeit von *W. Funke* und *H. D. Hermann*. 143 Seiten. 1960. (1173)
Warenkunde von *K. Hassak* und *E. Beutel* †. 2 Bände.
I: Anorganische Waren sowie Kohle und Erdöl. 8. Auflage. Neubearbeitet von *A. Kutzelnigg*. 119 Seiten, 18 Figuren. 1958. (222)
II: Organische Waren. 8. Auflage. Vollständig neubearbeitet von *A. Kutzelnigg*. 157 Seiten, 32 Figuren. 1959. (223)
Die Fette und Öle von *Th. Klug*. 6., verbesserte Auflage. 143 Seiten. 1961. (335)
Die Seifenfabrikation von *K. Braun* †. 3., neubearbeitete und verbesserte Auflage von *Th. Klug*. 116 Seiten, 18 Abbildungen. 1953. (336)
Thermische Verfahrenstechnik von *H. Bock*. 3 Bände.
I: Eigenschaften und Verhalten der realen Stoffe. 164 Seiten, 28 Abbildungen. 1963. (1209/1209a)
II: Funktionen und Berechnung der elementaren Geräte. In Vorbereitung. (1210/1210a)
III: Fließbilder, ihre Funktion und ihr Zusammenbau aus Geräten. In Vorbereitung. (1211/1211a)
Textilindustrie von *A. Blümcke*.
I: Spinnerei und Zwirnerei. 111 Seiten, 43 Abbildungen. 1954. (184)

Biologie

Einführung in die allgemeine Biologie und ihre philosophischen Grund- und Grenzfragen von *M. Hartmann*. 132 Seiten, 2 Abbildungen. 1956. (96)
Hormone von *G. Koller*. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 187 Seiten, 60 Abbildungen, 19 Tabellen. 1949. (1141)
Fortpflanzung im Tier- und Pflanzenreich von *J. Hämmerling*. 2., ergänzte Auflage. 135 Seiten. 101 Abbildungen. 1951. (1138)
Geschlecht und Geschlechtsbestimmung im Tier- und Pflanzenreich von *M. Hartmann*. 2., verbesserte Auflage. 116 Seiten, 61 Abbildungen, 7 Tabellen. 1951. (1127)
Symbiose der Tiere mit pflanzlichen Mikroorganismen von *P. Buchner*. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 130 Seiten, 121 Abbildungen. 1949. (1128)
Grundriß der Allgemeinen Mikrobiologie von *W.* u. *A. Schwartz*. 2 Bände. 2., verbesserte und ergänzte Auflage.
I: 147 Seiten, 25 Abbildungen. 1960. (1155)
II: 142 Seiten, 29 Abbildungen. 1961. (1157)

Botanik

Entwicklungsgeschichte des Pflanzenreiches von *H. Heil.* 2. Auflage. 138 Seiten, 94 Abbildungen, 1 Tabelle. 1950. (1137)

Morphologie der Pflanzen von *L. Geitler.*, 3., umgearbeitete Auflage. 126 Seiten, 114 Abbildungen. 1953. (141)

Pflanzengeographie von *L. Diels †.* 5., völlig neubearbeitete Auflage von *F. Mattick.* 195 Seiten, 2 Karten. 1958. (389/389a)

Die Laubhölzer. Kurzgefaßte Beschreibung der in Mitteleuropa gedeihenden Laubbäume und Sträucher von *F. W. Neger †* und *E. Münch †.* 3., durchgesehene Auflage, herausgegeben von *B. Huber.* 143 Seiten, 63 Figuren, 7 Tabellen. 1950. (718)

Die Nadelhölzer (Koniferen) und übrigen Gymnospermen von *F. W. Neger †* und *E. Münch †.* 4. Auflage, durchgesehen und ergänzt von *B. Huber.* 140 Seiten, 75 Figuren, 4 Tabellen, 3 Karten. 1952. (355)

Pflanzenzüchtung von *H. Kuckuck.* 2 Bände.
- I: Grundzüge der Pflanzenzüchtung. 3., völlig umgearbeitete und erweiterte Auflage. 132 Seiten, 22 Abbildungen. 1952. (1134)
- II: Spezielle gartenbauliche Pflanzenzüchtung (Züchtung von Gemüse, Obst und Blumen). 178 Seiten, 27 Abbildungen. 1957. (1178/1178a)

Zoologie

Entwicklungsphysiologie der Tiere von *F. Seidel.* 2 Bände.
- I: Ei und Furchung. 126 Seiten, 29 Abbildungen. 1953. (1162)
- II: Körpergrundgestalt und Organbildung. 159 Seiten, 42 Abbildungen. 1953. (1163)

Das Tierreich
- I: Einzeller, Protozoen von *E. Reichenow.* 115 Seiten. 59 Abbildungen. 1956. (444)
- II: Schwämme und Hohltiere von *H. J. Hannemann.* 95 Seiten, 80 Abbildungen. 1956. (442)
- III: Würmer. Platt-, Hohl-, Schnurwürmer, Kamptozoen, Ringelwürmer, Protracheaten, Bärtierchen, Zungenwürmer von *S. Jaeckel.* 114 Seiten, 36 Abbildungen. 1955. (439)
- IV, 1: Krebse von *H. E. Gruner* und *K. Deckert.* 114 Seiten, 43 Abbildungen. 1956. (443)
- IV, 2: Spinnentiere (Trilobitomorphen, Fühlerlose) und Tausendfüßler von *A. Kaestner.* 96 Seiten, 55 Abbildungen. 1955. (1161)
- IV, 3: Insekten von *H. von Lengerken.* 128 Seiten, 58 Abbildungen. 1953. (594)
- V: Weichtiere. Urmollusken, Schnecken, Muscheln und Kopffüßer von *S. Jaeckel.* 92 Seiten. 34 Figuren. 1954. (440)
- VI: Stachelhäuter. Tentakulaten, Binnenatmer und Pfeilwürmer von *S. Jaeckel.* 100 Seiten, 46 Abbildungen. 1955. (441)
- VII, 1: Manteltiere, Schädellose, Rundmäuler von *Th. Haltenorth.* In Vorbereitung. (448)

VII, 2: Fische von *D. Lüdemann*. 130 Seiten, 65 Abbildungen. 1955. (356)
VII, 3: Lurche (Chordatiere) von *K. Herter*. 143 Seiten, 129 Abbildungen. 1955. (847)
VII, 4: Kriechtiere (Chordatiere) von *K. Herter*. 200 Seiten, 42 Abbildungen. 1960. (447/447a)
VII, 5: Vögel (Chordatiere) von *H.-A. Freye*. 156 Seiten, 69 Figuren. 1960. (869)
VII, 6: Säugetiere (Chordatiere) von *Th. Haltenorth*. In Vorbereitung. (282)

Land- und Forstwirtschaft

Landwirtschaftliche Tierzucht. Die Züchtung und Haltung der landwirtschaftlichen Nutztiere von *H. Vogel*. 139 Seiten, 11 Abbildungen. 1952. (228)
Kulturtechnische Bodenverbesserungen von *O. Fauser*. 2 Bände. 5., verbesserte und vermehrte Auflage.
I: Allgemeines, Entwässerung. 127 Seiten, 49 Abbildungen. 1959. (691)
II: Bewässerung, Ödlandkultur, Flurbereinigung. 159 Seiten, 71 Abbildungen. 1961. (692)
Agrikulturchemie von *K. Scharrer*. 2 Bände.
I: Pflanzenernährung. 143 Seiten. 1953. (329)
II: Futtermittelkunde. 192 Seiten. 1956. (330/330a)

Geologie, Mineralogie, Kristallographie

Geologie von *F. Lotze*. 2., verbesserte Auflage. 178 Seiten, 80 Abbildungen. 1961. (13)
Erzkunde von *H. von Philipsborn*. In Vorbereitung. (1207)
Mineral- und Erzlagerstättenkunde von *H. Huttenlocher †*. 2 Bände. 2. Auflage.
I: 128 Seiten, 34 Abbildungen. In Vorbereitung. (1014)
II: 156 Seiten, 48 Abbildungen. In Vorbereitung. (1015/1015a)
Allgemeine Mineralogie. 11., erweiterte Auflage der „Mineralogie" von *R. Brauns†*, neubearbeitet von *K. F. Chudoba*. 152 Seiten, 143 Textfiguren, 1 Tafel, 3 Tabellen. 1963. (29/29a)
Spezielle Mineralogie. 11., erweiterte Auflage der „Mineralogie" von *R. Brauns †*, bearbeitet von *K. F. Chudoba*. Etwa 170 Seiten, 127 Textfiguren, 4 Tabellen. 1964. (31/31a)
Petrographie (Gesteinskunde) von *W. Bruhns †*. Neubearbeitet von *P. Ramdohr*. 5., erweiterte Auflage. 141 Seiten, 10 Figuren. 1960. (173)
Kristallographie von *W. Bruhns †*. 5. Auflage, neubearbeitet von *P. Ramdohr*. 109 Seiten, 164 Abbildungen. 1958. (210)
Einführung in die Kristalloptik von *E. Buchwald*. 5., verbesserte Auflage. 128 Seiten, 117 Figuren. 1963. (619/619a)
Lötrohrprobierkunde. Mineraldiagnose mit Lötrohr und Tüpfelreaktion von *M. Henglein*. 4., durchgesehene und erweiterte Auflage. 108 Seiten, 12 Figuren. 1962. (483)

Technik

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik von *M. Pirani*. 3., erweiterte Auflage bearbeitet von *J. Fischer* unter Benutzung der von *I. Runge* besorgten 2. Auflage. 216 Seiten, 104 Abbildungen. 1957. (728/728a)

Technische Tabellen und Formeln von *W. Müller*. 5., verbesserte und erweiterte Auflage von *E. Schulze*. 165 Seiten, 114 Abbildungen, 99 Tafeln. 1962. (579)

Einführung in die Arbeitswissenschaft von *H. H. Hilf*. 164 Seiten, 57 Abbildungen. 1964. (1212/1212a)

Grundlagen der Straßenverkehrstechnik. Theorie der Leistungsfähigkeit von *E. Engel*. 101 Seiten, 55 Abbildungen. 1962. (1198)

Elektrotechnik

Grundlagen der allgemeinen Elektrotechnik von *O. Mohr*. 2., durchgesehene Auflage. 260 Seiten, 136 Bilder, 14 Tafeln. 1961. (196/196a)

Die Gleichstrommaschine von *K. Humburg*. 2 Bände. 2., durchgesehene Auflage.
I: 102 Seiten, 59 Abbildungen. 1956. (257)
II: 101 Seiten, 38 Abbildungen. 1956. (881)

Die Synchronmaschine von *W. Putz*. 92 Seiten, 64 Bilder. 1962. (1146)

Induktionsmaschinen von *F. Unger*. 2., erweiterte Auflage. 142 Seiten, 49 Abbildungen. 1954. (1140)

Die komplexe Berechnung von Wechselstromschaltungen von *H. H. Meinke*. 3. Auflage. 180 Seiten, 120 Abbildungen. 1964. In Vorbereitung. (1156/1156a)

Theoretische Grundlagen zur Berechnung der Schaltgeräte von *F. Kesselring*. 3. Auflage. 144 Seiten, 92 Abbildungen. 1950. (711)

Einführung in die Technik selbsttätiger Regelungen von *W. zur Megede*. 2., durchgesehene Auflage. 180 Seiten, 86 Abbildungen. 1961. (714/714a)

Elektromotorische Antriebe (Grundlagen für die Berechnung) von *A. Schwaiger*. 3., neubearbeitete Auflage. 96 Seiten, 34 Abbildungen. 1952. (827)

Überspannungen und Überspannungsschutz von *G. Frühauf*. Durchgesehener Neudruck. 122 Seiten, 98 Abbildungen. 1950. (1132)

Elektrische Höchstspannungs-Schaltanlagen für Freiluft und Innenanordnung von *G. Meiners* und *K.-H. Wiesenewsky*. 138 Seiten, 58 Abbildungen. 1964. (796/796a)

Transformatoren von *W. Schäfer*. 4., überarbeitete und ergänzte Auflage. 130 Seiten, 73 Abbildungen. 1962. (952)

Maschinenbau

Metallkunde von *H. Borchers*. 3 Bände. 5., ergänzte und durchgesehene Auflage.
I: Aufbau der Metalle und Legierungen. 120 Seiten, 90 Abbildungen, 2 Tabellen. 1962. (432)
II: Eigenschaften, Grundzüge der Form- und Zustandsgebung. 182 Seiten, 107 Abbildungen, 10 Tabellen. 1963. (433/433a)
III: Die metallkundlichen Untersuchungsmethoden von *E. Hanke*. In Vorbereitung. (434)

Die Werkstoffe des Maschinenbaues von *A. Thum †* und *C. M. v. Meysenbug*. 2 Bände.
I: Einführung in die Werkstoffprüfung. 2., neubearbeitete Auflage. 100 Seiten, 7 Tabellen, 56 Abbildungen. 1956. (476)
II: Die Konstruktionswerkstoffe. 132 Seiten, 40 Abbildungen. 1959. (936)

Dynamik von *W. Müller*. 2 Bände. 2., verbesserte Auflage.
I: Dynamik des Einzelkörpers. 128 Seiten, 48 Figuren. 1952. (902)
II: Systeme von starren Körpern. 102 Seiten, 41 Figuren. 1952. (903)

Technische Schwingungslehre von *L. Zipperer*. 2 Bände. 2., neubearbeitete Auflage.
I: Allgemeine Schwingungsgleichungen, einfache Schwinger. 120 Seiten, 101 Abbildungen. 1953. (953)
II: Torsionsschwingungen in Maschinenanlagen. 102 Seiten, 59 Abbildungen. 1955. (961/961 a)

Werkzeugmaschinen für Metallbearbeitung von *K. P. Matthes*. 2 Bände.
I: 100 Seiten, 27 Abbildungen, 11 Zahlentafeln, 1 Tafelanhang. 1954. (561)
II: Fertigungstechnische Grundlagen der neuzeitlichen Metallbearbeitung. 101 Seiten, 30 Abbildungen, 5 Tafeln. 1955. (562)

Das Maschinenzeichnen mit Einführung in das Konstruieren von *W. Tochtermann*. 2 Bände. 4. Auflage.
I: Das Maschinenzeichnen. 156 Seiten, 75 Tafeln. 1950. (589)
II: Ausgeführte Konstruktionsbeispiele. 130 Seiten, 58 Tafeln. 1950. (590)

Die Maschinenelemente von *E. A. vom Ende †*. 4., überarbeitete Auflage. 184 Seiten, 179 Figuren, 11 Tafeln. 1963. (3/3a)

Die Maschinen der Eisenhüttenwerke von *L. Engel*. 156 Seiten, 95 Abbildungen. 1957. (583/583a)

Walzwerke von *H. Sedlaczek †* unter Mitarbeit von *F. Fischer* und *M. Buch*. 232 Seiten, 157 Abbildungen. 1958. (580/580a)

Getriebelehre von *P. Grodzinski †*. 2 Bände. 3., neubearbeitete Auflage von *G. Lechner*.
I: Geometrische Grundlagen. 164 Seiten, 131 Figuren. 1960. (1061)
II: Angewandte Getriebelehre. In Vorbereitung. (1062)

Kinematik von *H. R. Müller*. 171 Seiten, 75 Figuren. 1963. (584/584a)

Gießereitechnik von *H. Jungbluth*. 2 Bände.
I: Eisengießerei. 126 Seiten, 44 Abbildungen. 1951. (1159)

Die Dampfturbinen. Ihre Wirkungsweise, Berechnung und Konstruktion von *C. Zietemann*. 3 Bände.
I: Theorie der Dampfturbinen. 4. Auflage. 139 Seiten, 48 Abbildungen. 1964. In Vorbereitung. (274)
II: Die Berechnung der Dampfturbinen und die Konstruktion der Einzelteile. 4., verbesserte Auflage. 132 Seiten, 111 Abbildungen. 1964. In Vorbereitung. (715)
III: Die Regelung der Dampfturbinen, die Bauarten, Turbinen für Sonderzwecke, Kondensationsanlagen. 3., verbesserte Auflage. 126 Seiten, 90 Abbildungen. 1956. (716)

Verbrennungsmotoren von *W. Endres*. 3 Bände.
I: Überblick. Motor-Brennstoffe. Verbrennung im Motor allgemein, im Otto- und Diesel-Motor. 153 Seiten, 57 Abbildungen. 1958. (1076/1076a)
II: Die heutigen Typen der Verbrennungskraftmaschine. In Vorbereitung. (1184)
III: Die Einzelteile des Verbrennungsmotors. In Vorbereitung. (1185)

Autogenes Schweißen und Schneiden von *H. Niese*. 5. Auflage, neubearbeitet von *A. Küchler*. 136 Seiten, 71 Figuren. 1953. (499)

Die elektrischen Schweißverfahren von *H. Niese*. 2. Auflage, neubearbeitet von *H. Dienst*. 136 Seiten, 58 Abbildungen. 1955. (1020)

Die Hebezeuge. Entwurf von Winden und Kranen von *G. Tafel*. 2., verbesserte Auflage. 176 Seiten, 230 Figuren. 1954. (414/414a)

Wasserbau

Wasserkraftanlagen von *A. Ludin* unter Mitarbeit von *W. Borkenstein*. 2 Bände.
I: Planung, Grundlagen und Grundzüge. 124 Seiten, 60 Abbildungen. 1955. (665)
II: Anordnung und Ausbildung der Hauptbauwerke. 184 Seiten, 91 Abbildungen. 1958. (666/666a)

Verkehrswasserbau von *H. Dehnert*. 3 Bände.
I: Entwurfsgrundlagen, Flußregelungen. 103 Seiten, 53 Abbildungen. 1950. (585)
II: Flußkanalisierung und Schiffahrtskanäle. 94 Seiten, 60 Abbildungen. 1950. (597)
III: Schleusen und Hebewerke. 98 Seiten, 70 Abbildungen. 1950. (1152)

Wehr- und Stauanlagen von *H. Dehnert*. 134 Seiten, 90 Abbildungen. 1952. (965)

Talsperren von *F. Tölke*. 122 Seiten, 70 Abbildungen. 1953. (1044)

Vermessungswesen

Vermessungskunde von *W. Großmann*. 3 Bände.
I: Stückvermessung und Nivellieren. 11., verbesserte Auflage. 144 Seiten. 117 Figuren. 1962. (468)
II: Horizontalaufnahmen und ebene Rechnungen. 9., verbesserte Auflage. 136 Seiten, 101 Figuren. 1963. (469)
III: Trigonometrische und barometrische Höhenmessung. Tachymetrie und Absteckungen. 8. Auflage. 136 Seiten, 97 Figuren. 1964. (862)

Kartographie von *V. Heissler*. 213 Seiten, 125 Abbildungen, 8 Anlagen. 1962. (30/30a)

Photogrammetrie von *G. Lehmann*. 189 Seiten, 132 Abbildungen. 1959. (1188/1188a)

Hoch- und Tiefbau

Die wichtigsten Baustoffe des Hoch- und Tiefbaus von *O. Graf †*. 4., verbesserte Auflage. 131 Seiten, 63 Abbildungen. 1953. (984)

Baustoffverarbeitung und Baustellenprüfung des Betons von *A. Kleinlogel*. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 126 Seiten, 35 Abbildungen. 1951. (978)

Festigkeitslehre. 2 Bände.
I: Elastizität, Plastizität und Festigkeit der Baustoffe und Bauteile von *W. Gehler †* und *W. Herberg*. Durchgesehener und erweiterter Neudruck. 159 Seiten, 118 Abbildungen. 1952. (1144)
II: Formänderung, Platten, Stabilität und Bruchhypothesen von *W. Herberg* und *N. Dimitrov*. 187 Seiten, 94 Abbildungen. 1955. (1145/1145a)

Grundlagen des Stahlbetonbaus von *A. Troche*. 2., neubearbeitete und erweiterte Auflage. 208 Seiten, 75 Abbildungen, 17 Bemessungstafeln, 20 Rechenbeispiele. 1953. (1078)

Statik der Baukonstruktionen von *A. Teichmann*. 3 Bände.
I: Grundlagen. 101 Seiten, 51 Abbildungen, 8 Formeltafeln. 1956. (119)
II: Statisch bestimmte Stabwerke. 107 Seiten, 52 Abbildungen, 7 Tafeln. 1957. (120)
III: Statisch unbestimmte Systeme. 112 Seiten, 34 Abbildungen, 7 Formeltafeln. 1958. (122)

Fenster, Türen, Tore aus Holz und Metall. Eine Anleitung zu ihrer guten Gestaltung, wirtschaftlichen Bemessung und handwerksgerechten Konstruktion von *W. Wickop †*. 4., überarbeitete und ergänzte Auflage. 155 Seiten, 95 Abbildungen. 1955. (1092)

Heizung und Lüftung von *W. Körting*. 2 Bände. 9., neubearbeitete Auflage.
I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. 171 Seiten, 29 Abbildungen, 36 Zahlentafeln. 1962. (342/342a)
II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. 1964. In Vorbereitung. (343)

Industrielle Kraft- und Wärmewirtschaft von *F. A. F. Schmidt* und *A. Beckers*. 167 Seiten, 73 Abbildungen. 1957. (318/318a)

Sammlung Göschen / Bandnummernfolge

1 Langosch, Der Nibelunge Nôt
3/3a v. Ende, Maschinenelemente
10 Jiriczek-Wisniewski, Kudrun- und Dietrich-Epen
13 Lotze, Geologie
18 Maurer, Hartmann von Aue. Der arme Heinrich
19 Altheim, Römische Geschichte I
20 Hofstaetter, Dt. Sprachlehre
22 Maurer, Gottfried von Strassburg
29/29a Brauns-Chudoba. Allgemeine Mineralogie
30/30a Heissler, Kartographie
31/31a Brauns-Chudoba, Spezielle Mineralogie
32 Schneider-Wisniewski, Deutsche Heldensage
35 Treue, Dt. Geschichte von 1648—1740
37/37a Klemm, Anorganische Chemie
38/38a Schlenk, Organische Chemie
39 Treue, Dt. Geschichte von 1713—1806
42 Behn-Hoernes, Vorgeschichte Europas
44 Kresze, Physikalische Methoden in der Organischen Chemie I
45/45a Kresze, Physikalische Methoden in der Organischen Chemie II
47 Fischer-Rohrbach, Arithmetik
51/51a Ringleb, Mathem. Formelsammlung
52 Bieler Röm. Literaturgesch. I
59 Krahe, Indog. Sprachwiss. I
60 Biehle, Stimmkunde
61 Biele, Redetechnik
64 Krahe, Indog. Sprachwiss. II
65/65a Grotemeyer, Analyt. Geometrie
66 Berneker-Vasmer, Russische Grammatik
70 Nestle-Liebich, Gesch. d. griechischen Literatur I
71 Schulze, Allgemeine und physikalische Chemie I
76 Döring, Einf. i. d. th. Physik I
77 Döring, Einf. i. d. th. Physik II
78 Döring, Einf. i. d. th. Physik III
79/79a Hempel, Got. Elementarbuch
80 Weigert, Stilkunde I
81 Schubert-Haussner-Erlebach, Vierstell. Logarithmentafeln
86 Barner, Differential- u. Integralrechnung I
96 Hartmann, Einf. in die allgem. Biologie
99 Hessenberg-Kneser, Ebene und sphär. Trigonometrie
101 v. Wiese, Soziologie
103 Dahrendorf, Industrie- und Betriebssoziologie
104/104a Hofstätter, Sozialpsychologie
111 Hoffmann-Debrunner, Gesch. der griechischen Sprache I
114 Debrunner, Gesch. der griechischen Sprache II
117 Brandenstein, Griechische Sprachwissenschaft I
118/118a Brandenstein, Griechische Sprachwissenschaft II
119 Teichmann, Statik der Baukonstruktionen I
120 Teichmann, Statik der Baukonstruktionen II
122 Teichmann, Statik der Baukonstruktionen III

128/128a Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft I
136 Mahler-Graewe, Physikal. Formelsammlung
141 Geitler, Morphologie der Pflanzen
142 Haack, Darst. Geometrie I
143 Haack, Darst. Geometrie II
144 Haack, Darst. Geometrie III
145 Weimer, Gesch. der Pädagogik
148 Kolms, Finanzwissenschaft I
156/156a Landmann, Philosophische Anthropologie
170 Oehlmann, Musik des 19. Jhs.
171/171a Oehlmann, Musik des 20. Jhs.
173 Bruhns-Ramdohr, Petrographie
174 Schlingloff, Religion des Buddhismus I
180 Böhm, Versicherungsmathematik I
184 Blümcke, Textilindustrie I
196/196a Mohr, Grundlagen der allgem. Elektrotechnik
200/200a Gottschald, Dt. Rechtschreibungswörterbuch
210 Bruhns-Ramdohr, Kristallographie
220/220a Moser, Allg. Musiklehre
221/221a Jander-Jahr-Knoll, Maßanalyse
222 Hassak-Beutel-Kutzelnigg, Warenkunde I
223 Hassak-Beutel-Kutzelnigg, Warenkunde II
226/226a Hofmann, Gesch. der Mathematik I
228 Vogel, Landw. Tierzucht
231/231a Ehrlich, Gesch. Israels
238 Krahe, Germ. Sprachwiss. I
243 Mahler-Graewe, Physikal. Aufgabensammlung
247/247a Hofmann-Jander, Qualitative Analyse
250 Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft II
252 Vetter, Elektrochemie I
253 Vetter, Elektrochemie II
257 Humburg, Gleichstrommaschine I
264 Lockemann, Gesch. der Chemie I
265/265a Lockemann, Geschichte der Chemie II
270 Kirn, Einführung in die Geschichtswissenschaft
274 Zietemann, Dampfturbinen I
279 Jacob-Hohenleutner, Quellenkunde der deutschen Geschichte I
280 Jacob-Hohenleutner, Quellenkunde der deutschen Geschichte II
281 Leisegang, Einführung in die Philosophie
282 Haltenorth, Säugetiere
284 Jacob-Weden, Quellenkunde der deutschen Geschichte III
318/318a Schmidt-Beckers, Industrielle Kraft- u. Wärmewirtschaft
319 Krug, Australien und Ozeanien
329 Scharrer, Agrikulturchemie I
330/330a Scharrer, Agrikulturchemie II
335 Klug, Fette und Öle
336 Braun-Klug, Seifenfabrikation
342/342a Körting, Heizung und Lüftung I
343 Körting, Heizung und Lüftung II
344 Moser, Musikästhetik
354/354a Valentiner-König, Vektoren und Matrizen
355 Neger-Münch-Huber, Nadelhölzer
356 Lüdemann, Fische
374 Döring, Einführung in die theoret. Physik IV
375 Preller, Geschichte Englands I
389/389a Diels-Mattick, Pflanzengeographie
391 Kolms, Finanzwissenschaft II
394/394a Schilling, Von der Renaissance bis Kant
414/414a Tafel, Hebezeuge
422 Gottschald, Dt. Personennamen
423 Adler-Erlebach, Fünfstellige Logarithmen
432 Borchers, Metallkunde I
433/433a Borchers, Metallkunde II

434 Borchers-Hanke, Metallkunde III
435 Burau, Algebr. Kurven u. Flächen I
436/436a Burau, Algebr. Kurven und Flächen II
439 Jaeckel, Würmer
440 Jaeckel, Weichtiere
441 Jaeckel, Stachelhäuter
442 Hannemann, Schwämme und Hohltiere
443 Gruner-Deckert, Krebse
444 Reichenow, Einzeller
445 Asmus, Physikal.-chem. Rechenaufgaben
447/447a Herter, Kriechtiere
448 Haltenorth, Manteltiere
452 Bahrdt-Scheer, Stöchiometrische Aufgabensammlung
468 Großmann, Vermessungskunde I
469 Großmann, Vermessungskunde II
476 Thum-Meysenbug, Die Werkstoffe des Maschinenbaues I
483 Henglein, Lötrohrprobierkunde
492 Stolz-Debrunner, Geschichte der lateinischen Sprache
499 Niese-Küchler, Autogenes Schweißen
500 Simmel, Hauptprobleme der Philosophie
536 Lehmann, Kant
538 Rumpf, Archäologie I
539 Rumpf, Archäologie II
540 Rumpf, Archäologie III
557 Nestle-Liebich, Gesch. der griech. Literatur II
561 Matthes, Werkzeugmaschinen I
562 Matthes, Werkzeugmaschinen II
564 Behn-Hoernes, Kultur der Urzeit I
565 Behn-Hoernes, Kultur der Urzeit II
566 Behn-Hoernes, Kultur der Urzeit III
571 Lehmann, Philosophie des 19. Jahrhunderts I
576/576a Moser, Gesangskunst
579 Müller-Schulze, Techn. Tabellen
580/580a Sedlaczek-Fischer-Buch, Walzwerke
583/583a Engel, Maschinen der Eisenhüttenwerke
584/584a Müller, Kinematik
585 Dehnert, Verkehrswasserbau I
587 Kalitsunakis-Steinmetz, Neugriech.-dt. Gesprächsbuch
589 Tochtermann, Maschinenzeichnen I
590 Tochtermann, Maschinenzeichnen II
594 v. Lengerken, Insekten
597 Dehnert, Verkehrswasserbau II
601 Mutschmann-Scherer, Engl. Phonetik
619/619a Buchwald, Kristalloptik
665 Ludin-Borkenstein, Wasserkraftanlagen I
666/666a Ludin-Borkenstein, Wasserkraftanlagen II
668 Knopp, Funktionentheorie I
677 Altheim, Röm. Geschichte II
679 Altheim, Röm. Geschichte III
684 Altheim, Röm. Geschichte IV
691 Fauser, Kulturtechn. Bodenverbesserungen I
692 Fauser, Kulturtechn. Bodenverbesserungen II
698/698a Schulze, Allgemeine u. physikalische Chemie II
703 Knopp, Funktionentheorie II
709 Lehmann, Philosophie des 19. Jahrhunderts II
711 Kesselring, Berechnung der Schaltgeräte
714/714a zur Megede, Technik selbsttätiger Regelungen
715 Zietemann, Dampfturbinen II
716 Zietemann, Dampfturbinen III
718 Neger-Münch-Huber, Laubhölzer
728/728a Pirani-Fischer-Runge, Graph. Darstellung in Wissenschaft u. Technik
735 Ekwall, Historische neuengl. Laut- und Formenlehre

746/746a Pfanzagl, Allg. Methodenlehre der Statistik I
747/747a Pfanzagl, Allg. Methodenlehre der Statistik II
756/756a Kalitsunakis, Gramm. d. Neugriech. Volksspr.
763/763a Beer-Meyer, Hebräische Grammatik I
764/764a Beer-Meyer, Hebräische Grammatik II
768/768a Bieberbach, Einführung in die konforme Abbildung
769/769a Beer-Meyer, Hebräisches Textbuch
770 Schlingloff, Religion des Buddhismus II
776 Kolms, Finanzwissensch. III
780 Krahe, Germ. Sprachwiss. II
781 Weigert, Stilkunde II
782 Kolms, Finanzwissensch. IV
786 Schulze, Molekülbau
796/796a Meiners-Wiesenewsky, Elektr. Höchstspannungs-Schaltanlagen
807 Kropp, Erkenntnistheorie
809 Moser, Harmonielehre I
810 Moser, Harmonielehre II
826 Koch, Philosophie d. Mittelalters
827 Schwaiger, Elektromotorische Antriebe
831 Erismann, Allg. Psychologie I
832/382a Erismann, Allg. Psychologie II
833 Erismann, Allg. Psychologie III
834/834a Erismann, Allg. Psychologie IV
837 Baumgartner, Gruppentheorie
845 Lehmann, Philosophie im ersten Drittel des 20. Jhs. I
847 Herter, Lurche
850 Lehmann, Philosophie im ersten Drittel des 20. Jhs. II
851/851a Moede, Psychologie des Berufs- und Wirtschaftslebens
857 Capelle, Griech. Philosophie I
858 Capelle, Griech. Philos. II
859 Capelle, Griech. Philos. III
862 Großmann, Vermessungskunde III
863 Capelle, Griech. Philos. IV
866 Bieler, Röm. Literaturgeschichte II
869 Freye, Vögel
875 Hofmann, Geschichte der Mathematik II
877 Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie I
878 Knopp, Aufgabensammlung zur Funktionentheorie II
881 Humburg, Gleichstrommaschine II
882 Hofmann, Geschichte der Mathematik III
883 Stuloff, Mathematik der neuesten Zeit
893 Treue, Dt. Geschichte von 1806—1890
894 Treue, Dt. Geschichte von 1890 bis zur Gegenwart
902 Müller, Dynamik I
903 Müller, Dynamik II
910 Jaeger, Afrika I
911 Jaeger, Afrika II
915 Sperber-Fleischhauer, Gesch. der Deutschen Sprache
917/917a Böhm, Versicherungsmathematik II
920 Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen
921 Jantzen-Kolb, W. v. Eschenbach. Parzival
929 Schirmer-Mitzka, Dt. Wortkunde
930 Krull, Elementare und klassische Algebra I
931 Hasse, Höhere Algebra I
932 Hasse, Höhere Algebra II
933 Krull, Elementare und klassische Algebra II
936 Thum-Meysenbug, Werkstoffe d. Maschinenbaues II
952 Schäfer, Transformatoren
953 Zipperer, Techn. Schwingungslehre I
961/961a Zipperer, Techn. Schwingungslehre II
965 Dehnert, Wehr- und Stauanlagen
970 Baldus-Löbell, Nichteuklidische Geometrie

978 Kleinlogel, Baustoffverarbeitung und Baustellenprüfung d. Betons
984 Graf, Baustoffe des Hoch- und Tiefbaues
999/999a Kamke, Mengenlehre
1000 Jaspers, Geistige Situat. der Zeit
1003 Hoheisel, Partielle Differentialgleichung
1008/1008a Mellerowicz, Allgem. Betriebswirtschaftslehre I
1009 Bechert-Gerthsen-Flammersfeld, Atomphysik I
1014 Huttenlocher, Mineral- und Erzlagerstättenkunde I
1015/1015a Huttenlocher, Mineral- u. Erzlagerstättenkunde II
1017 Döring, Einführung in die theoret. Physik V
1020 Niese-Dienst, Elektrische Schweißverfahren
1031/1031a Apel-Ludz, Philosophisches Wörterbuch
1033 Bechert-Gerthsen-Flammersfeld, Atomphysik II
1034 Kranefeldt-Jung, Therapeutische Psychologie
1035 Altheim, Röm. Religionsgeschichte I
1039 Dovifat, Zeitungslehre I
1040 Dovifat, Zeitungslehre II
1044 Tölke, Talsperren
1045 Schubert, Technik des Klavierspiels
1051/1051a Stolberg-Wernigerode, Gesch. d. Vereinigten Staaten
1052 Altheim, Röm. Religionsgeschichte II
1057 Roth, Thermochemie
1059/1059a Hoheisel, Aufgabenslg. z. d. gew. u. part. Differentialgl.
1061 Grodzinski-Lechner, Getriebelehre I
1062 Grodzinski-Lechner, Getriebelehre II
1065 Haller-Dannenbauer, Von d. Karolingern zu den Staufern
1070 Sauter, Differentialgleichungen der Physik
1074 Koschmieder, Variationsrechnung I
1075 Koschmieder, Variationsrechnung II
1076/1076a Endres, Verbrennungsmotoren I
1077 Haller-Dannenbauer, Von den Staufern zu den Habsburgern
1078 Troche, Stahlbetonbau
1082 Hasse-Klobe, Aufgabensammlung zur höheren Algebra
1085 Lietzmann-Aland, Zeitrechnung
1086 Müller, Dt. Dichten und Denken
1088 Preller, Gesch. Englands II
1092 Wickop, Fenster, Türen, Tore
1094 Hernried, System. Modulation
1096 Viëtor, Dt. Dichten und Denken
1099 Hoheisel, Integralgleichungen
1105 Hartung, Dt. Geschichte im Zeitalter der Reformation
1108 de Boor-Wisniewski, Mittelhochdeutsche Grammatik
1109 Knopp, Elemente der Funktionentheorie
1111/1111a Naumann-Betz, Althochdt. Elementarbuch
1113/1113a Strubecker, Differentialgeometrie I
1114 Schubel, Engl. Literaturgeschichte I
1115 Ranke, Altnord. Elementarbuch
1116 Schubel, Engl. Literaturgeschichte II
1117 Haller-Dannenbauer, Eintritt der Germanen in die Geschichte
1121 Naumann, Dt. Dichten u. Denken
1122 Feist, Sprechen und Sprachpflege
1123/1123a Bechert-Gerthsen-Flammersfeld, Atomphysik III

1124 Schubel, Engl. Literaturgeschichte III
1125 Lehnert, Altengl. Elementarbuch
1127 Hartmann, Geschlecht u. Geschlechtsbestimmung im Tier- und Pflanzenreich
1128 Buchner, Symbiose der Tiere
1130 Dibelius-Kümmel, Jesus
1131 Scholz-Schoeneberg, Einführung in die Zahlentheorie
1132 Frühauf, Überspannungen
1134 Kuckuck, Pflanzenzüchtung I
1135 Lehnert, Beowulf
1137 Heil, Entwicklungsgesch. d. Pflanzenreiches
1138 Hämmerling, Fortpflanzung im Tier- und Pflanzenreich
1140 Unger, Induktionsmaschine
1141 Koller, Hormone
1142 Meissner-Lehnert, Shakespeare
1144 Gehler-Herberg, Festigkeitslehre I
1145/1145a Herberg-Dimitrov, Festigkeitslehre II
1146 Putz, Synchronmaschine
1147 v. Waltershausen, Kunst d. Dirigierens
1148 Pepping, Der polyphone Satz I
1152 Dehnert, Verkehrswasserbau III
1153/1153a Mellerowicz, Allgem. Betriebswirtschaftslehre II
1154/1154a Mellerowicz, Allgem. Betriebswirtschaftslehre III
1155 Schwartz, Mikrobiologie I
1156/1156a Meinke, Komplexe Berechnungen v. Wechselstromschaltungen
1157 Schwartz, Mikrobiologie II
1158 Mayrhofer, Sanskrit-Grammatik
1159 Jungbluth, Gießereitechnik I
1160 Dibelius-Kümmel, Paulus
1161 Kaestner, Spinnentiere
1162 Seidel, Entwicklungsphysiologie der Tiere I
1163 Seidel, Entwicklungsphysiologie der Tiere II
1164/1164a Pepping, Der polyphone Satz II
1165/1165a Bechert-Gerthsen-Flammersfeld, Atomphysik IV
1169 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre I
1170 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre II
1171 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre III
1172 Paulsen, Allgemeine Volkswirtschaftslehre IV
1173 Hamann-Funke-Hermann, Chemie der Kunststoffe
1176/1176a Lorenzen, Form. Logik
1178/1178a Kuckuck, Pflanzenzüchtung II
1179/1179a Strubecker, Differentialgeometrie II
1180/1180a Strubecker, Differentialgeometrie III
1181 Franz, Topologie I
1182 Franz, Topologie II
1183/1183a Nicolas, Finanzmathematik
1184 Endres, Verbrennungsmotoren II
1185 Endres, Verbrennungsmotoren III
1186/1186a Mellerowicz, Allgem. Betriebswirtschaftslehre IV
1187 Lau, Luther
1188/1188a Lehmann, Photogrammetrie
1189/1189a Päsler, Mechanik
1190 Stupperich, Melanchthon
1191/1191a Bräuer, Slav. Sprachwissenschaft I
1193 Fürstenberg, Wirtschaftssoziologie
1194 Wendt, Gesch. d. Volkswirtschaftslehre
1195 Ohm, Allgem. Volkswirtschaftspolitik I
1196 Ohm, Allgem. Volkswirtschaftspolitik
1197/1197a Onasch, Einf. in die Konfessionskunde der orthodoxen Kirchen
1198 Engel, Straßenverkehrstechnik

1199 Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft III, 1. Teil
1200/1200a Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft III, 2. Teil
1201/1201a Dehn, Versuche zur allgem. u. phys. Chemie
1202/1202a Nagel, Gesch. des christl. Gottesdienstes
1203 Wendland, Sozialethik
1204 Scheurig, Zeitgeschichte
1205/1205a Hofmann, Ideengeschichte d. soz. Bewegung
1206/1206a Langen, Lineare Programmierung
1207 Philipsborn, Erzkunde
1208 Lausberg, Romanische Sprachwissenschaft IV
1209/1209a Bock, Therm. Verfahrenstechnik I
1210/1210a Bock Therm. Verfahrenstechnik II
1211/1211a Bock, Therm. Verfahrenstechnik III
1212/1212a Hilf, Arbeitswissenschaft
1213 Kosiol, Buchhaltung und Bilanz
1216 Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie I
1217 Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie II
1218 Brandenstein, Griechische Sprachwissenschaft III

Autorenregister

120 / I / 64