so daß also $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ endlich von der Ordnung 2, $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ unendlich ist[1]).

4. Die abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen bezüglich der gewöhnlichen Addition besitzt z. B. die Untergruppe $\mathfrak{H}$ aller geraden Zahlen. Es gilt die Zerlegung

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + 1\mathfrak{H},$$

so daß also $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ wieder endlich von der Ordnung 2 ist[2]). Wir kommen in **2**, § 2 ausführlich auf diese und analog gebildete Untergruppen von $\mathfrak{G}$, sowie deren Faktorgruppen zu sprechen.

III. Determinantenfreie lineare Algebra

§ 10. Linearformen, Vektoren, Matrizen

Es sei K ein beliebiger Körper, der *Grundkörper*, in dem wir *lineare Algebra* im Sinne von § 5, 1) [46] treiben wollen, und den wir für den Rest von **1** fest zugrunde legen.

Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise verabreden wir, daß in III und IV alle mit $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ und evtl. angehängten Indizes bezeichneten Elemente solche aus K sein sollen, ohne daß dies immer ausdrücklich gesagt wird. Ebenso sollen $x_1, \ldots, x_n$, wenn zum Funktionsbegriff i. S. d. An. übergegangen wird, Elemente aus K sein.

Ehe wir uns der eigentlichen Aufgabe, wie sie in § 5, 1) formuliert ist, zuwenden, sollen in diesem Paragraphen einige Begriffe eingeführt werden, die zwar an sich entbehrlich wären, durch deren Verwendung sich aber die folgenden Entwicklungen in der Schreib- und Redeweise außerordentlich vereinfachen.

a) Linearformen

Zunächst führen wir für ganze rationale Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$, wie sie auf den linken Seiten des zu behandelnden

[1]) Bezüglich $\mathfrak{U}$ ist hier der auf die Primzahl 2 bezügliche Teil des Fundamentalsatzes der Arithmetik von der eindeutigen Zerlegbarkeit der rationalen Zahlen in Primzahlpotenzen vorausgesetzt, den wir in **2**, § 1 systematisch behandeln werden.

[2]) Hierbei ist der auf die Primzahl 2 bezügliche Fall des Satzes 13 von **2**, § 1 vorausgesetzt, daß sich nämlich jede ganze Zahl g eindeutig in die Form $g = 2q + r$ setzen läßt, wo q und r ganze Zahlen sind und $0 \leqq r < 2$ ist. $\mathfrak{H}$ besteht dann aus den g mit $r = 0$, $1\mathfrak{H}$ aus den g mit $r = 1$. — Natürlich bedeutet $1\mathfrak{H}$ hier, daß 1 zu den Elementen von $\mathfrak{H}$ zu addieren ist.

Gleichungssystems § 5, (1) auftreten, eine besondere Benennung ein:

Definition 22. *Ein Element von* $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, *dessen Normaldarstellung* $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ *ist, heißt eine* Linearform *von* $x_1, \ldots, x_n$ *oder auch* linear *und* homogen *in* $x_1, \ldots, x_n$.

Die Bedeutung von *linear* wurde schon in § 5 bei (1) erklärt, *Form* oder *homogen* soll besagen, daß auch der in Satz 11 [31] mit $a_{0, \ldots, 0}$ bezeichnete Koeffizient der Normaldarstellung Null ist. — Unter *Linearform* schlechthin verstehen wir, wo nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, stets eine solche der n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$.

Von großer Wichtigkeit für alles weitere sind nun die beiden folgenden Definitionen:

Definition 23. *Eine Linearform* f *heißt* lineares Kompositum *oder* linear abhängig von *den Linearformen* $f_1, \ldots, f_m$, *wenn* $c_1, \ldots, c_m$ *derart existieren, daß* $f = \sum_{i=1}^{m} c_i f_i$ *ist. Anderenfalls heißt* f linear unabhängig von $f_1, \ldots, f_m$.

Die Nullform $0 = \sum_{k=1}^{n} 0 x_k$ ist hiernach sicher lineares Kompositum jedes Systems $f_1, \ldots, f_m$ von Linearformen, indem $c_1, \ldots, c_m = 0$ gewählt werden. Dies berücksichtigend definieren wir weiter:

Definition 24. *Die Linearformen* $f_1, \ldots, f_m$ *heißen* linear abhängig, *wenn* $c_1, \ldots, c_m$, *die nicht sämtlich Null sind, derart existieren, daß* $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i = 0$ *ist. Anderenfalls heißen* $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig.

Hiernach ist speziell ($m = 1$) jede Linearform $f \neq 0$ linear unabhängig, während die Form 0 linear abhängig ist.

Die beiden in Def. 23 und 24 eingeführten, wohl zu unterscheidenden Begriffe *linear (un-)abhängig von* und *linear (un-)abhängig* stehen nun in folgenden Relationen zueinander, deren einfacher Beweis dem Leser überlassen bleiben darf[1]):

Satz 38. a) *Ist* f *von* $f_1, \ldots, f_m$ *linear abhängig, so sind* $f, f_1, \ldots, f_m$ *linear abhängig.*

b) *Ist* f *von* $f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig und sind* $f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig, so sind* $f, f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig.*

a′) *Sind* $f, f_1, \ldots, f_m$ *linear abhängig, und zwar so, daß* f *in einer Relation* $cf + c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m = 0$ *einen Koeffizienten* $c \neq 0$ *hat (was speziell der Fall ist, wenn* $f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig sind), so ist* f *von* $f_1, \ldots, f_m$ *linear abhängig.*

b′) *Sind* $f, f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig, so ist* f *von* $f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig, und es sind auch* $f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig.*

Aus b′) ergeben sich durch wiederholte Anwendung die beiden einander bedingenden Tatsachen:

Satz 39. *Mit* $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+l}$ *sind auch* $f_1, \ldots, f_m$ *linear unabhängig. Mit* $f_1, \ldots, f_m$ *sind auch* $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+l}$ *linear abhängig.*

In gewisser Analogie dazu gelten die folgenden beiden einander bedingenden Tatsachen:

Satz 40. *Es sei* $f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$, $g_i = \sum_{k=1}^{n+l} a_{ik} x_k$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Dann sind mit $f_1, \ldots, f_m$ *auch* $g_1, \ldots, g_m$ *linear unabhängig und mit* $g_1, \ldots, g_m$ *auch* $f_1, \ldots, f_m$ *linear abhängig.*

Beweis. Es sei $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathsf{K}_n$. Dann sind die g_i solche Elemente (linear, aber keine Formen!) aus $\mathsf{K}_n[x_{n+1}, \ldots, x_{n+l}]$, deren Funktionswerte für das System $(0, \ldots, 0)$ der Unbestimmten $x_{n+1}, \ldots, x_{n+l}$ die Elemente f_i aus K_n sind. Nach dem Einsetzungsprinzip [39] folgt also aus einer Relation $\sum_{i=1}^{m} c_i g_i = 0$ auch die Relation $\sum_{i=1}^{m} c_i f_i = 0$ für die Funktionswerte.

[1]) Man mache sich vor allem klar, daß dazu die Körpereigenschaft [§ 1, (7)] wesentlich benutzt wird, so daß schon diese für das Folgende grundlegenden Tatsachen in Integritätsbereichen nicht allgemein richtig sind. (Vgl. Punkt 2 in der Anm. 1 [46] zu § 5.)

Wir untersuchen nun im Anschluß an Satz 38, b) die Frage, ob man zu m linear unabhängigen Linearformen $f_1, \ldots, f_m$ stets noch eine weitere von ihnen linear unabhängige Linearform f_{m+1} finden kann, so daß also auch noch $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}$ linear unabhängig sind. Dieses ist nicht unbegrenzt möglich; vielmehr gilt:

Satz 41. *Es gibt höchstens n linear unabhängige Linearformen von n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$; oder also: Mehr als n Linearformen von n Unbestimmten sind stets linear abhängig.*

Beweis. Nach Satz 39 genügt es zu zeigen, daß $n+1$ Linearformen von n Unbestimmten stets linear abhängig sind. Diesen Nachweis führen wir durch vollständige Induktion nach n. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivialerweise richtig. Denn ist $f' = a' x$, $f'' = a'' x$, so sind entweder $f' = 0$ und $f'' = 0$, oder es besteht die Beziehung $a'' f' - a' f'' = 0$ mit $a' \neq 0$ oder $a'' \neq 0$; und in beiden Fällen sind f', f'' linear abhängig.

Wir nehmen nunmehr an, daß je n (oder mehr) Linearformen von $n-1$ Unbestimmten stets linear abhängig sind, und zeigen, daß dann auch $n+1$ vorgelegte Linearformen von n Unbestimmten

$$f_i \equiv a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

linear abhängig sind. Dazu bilden wir durch formales Einsetzen des Wertes $x_n = 0$ die $n+1$ Linearformen

$$g_i \equiv a_{i1} x_1 + \cdots + a_{i,n-1} x_{n-1} \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

von den $n-1$ Unbestimmten $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Nach der Induktionsannahme sind sie linear abhängig, d. h. es besteht eine Beziehung

$$g' = c_1' g_1 + \cdots + c_{n+1}' g_{n+1} = 0,$$

in der nicht alle $c_i' = 0$ sind und daher ohne Einschränkung $c_{n+1}' \neq 0$ angenommen werden kann. Weiter sind nach der Induktionsannahme aber auch schon die n Linearformen $g_1, \ldots, g_n$ linear abhängig, d. h. es besteht eine weitere Beziehung

$$g'' = c_1'' g_1 + \cdots + c_n'' g_n = 0,$$

in der ebenfalls nicht alle $c_i'' = 0$ sind. Wir bilden nun mit den so bestimmten c_i' bzw. c_i'' die entsprechenden linearen Komposita der f_i, d. h. die beiden Linearformen von n Unbestimmten

$$\begin{aligned} f' &= c_1' f_1 + \cdots + c_n' f_n + c_{n+1}' f_{n+1}, \\ f'' &= c_1'' f_1 + \cdots + c_n'' f_n, \end{aligned}$$

so daß also die beiden Linearformen $g' = 0$, $g'' = 0$ durch Einsetzen des Wertes $x_n = 0$ aus f', f'' hervorgehen. Aus diesem Grunde haben diese die besondere Gestalt

$$f' = a' x_n, \quad f'' = a'' x_n.$$

Ist hierin $a'' = 0$, also $f'' = 0$, so sind schon $f_1, \ldots, f_n$ linear abhängig, da ja nicht alle $c_i'' = 0$ sind. Ist aber $a'' \neq 0$, so entnehmen wir aus

$$a'' f' - a' f'' = 0,$$

also

$$(a'' c_1' - a' c_1'') f_1 + \cdots + (a'' c_n' - a' c_n'') f_n + a'' c_{n+1}' f_{n+1} = 0$$

wegen $a'' \neq 0$, $c_{n+1}' \neq 0$, daß $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ linear abhängig sind.

Daß es wirklich n linear unabhängige Linearformen von n Unbestimmten gibt, zeigt das spezielle System der n Linearformen $x_1, \ldots, x_n$; denn wegen der Eindeutigkeit in Satz 11 [31] ist nur dann $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$, wenn $c_1, \ldots, c_n = 0$ sind.

Nach Satz 41 gibt es in jeder (endlichen oder unendlichen) Menge von Linearformen unter den linear unabhängigen Teilsystemen $f_1, \ldots, f_s$ solche von maximaler Anzahl r, und zwar ist dabei $r \leqq n$. Von besonderer Wichtigkeit werden nun Linearformenmengen mit der in folgender Definition geforderten Eigenschaft sein:

Definition 25. *Eine Linearformenmenge* M, *die mit irgendwelchen Linearformen immer auch alle deren lineare Komposita enthält, heißt ein* Linearformenmodul.

Die Maximalanzahl r linear unabhängiger Linearformen aus M *heißt der* Rang *von* M.

Ein linear unabhängiges Teilsystem $f_1, \ldots, f_s$ *aus* M, *von dem alle Linearformen aus* M *linear abhängig sind, so daß also* M *aus der Gesamtheit aller linearen Komposita von* $f_1, \ldots, f_s$ *besteht, heißt eine* Basis *von* M.

Solche Teilsysteme gibt es wirklich immer. Nach Satz 38, a′) gilt nämlich:

Satz 42. *Ein linear unabhängiges Teilsystem* $f_1, \ldots, f_r$ *aus* M *von der maximalen Anzahl* r *ist auch eine Basis von* M.

Wir werden gleich sehen, daß auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist. Zuvor beweisen wir:

Satz 43. *Die Menge* M *aller linearen Komposita gegebener* m *Linearformen* $f_1, \ldots, f_m$ *von* n *Unbestimmten* $x_1, \ldots, x_n$ *bildet einen Linearformenmodul; man sagt kurz,* $f_1, \ldots, f_m$ erzeugen *den Modul* M. *Der Rang* r *von* M *genügt neben der nach Satz* 41 *bestehenden Ungleichung* $r \leqq n$ *auch noch der Ungleichung* $r \leqq m$.

Beweis. a) Das Erfülltsein der in Def. 25 geforderten Eigenschaft erkennt man folgendermaßen: Aus $g_k = \sum\limits_{i=1}^{m} c_{ki} f_i$ $(k = 1, \ldots, l)$ und $g = \sum\limits_{k=1}^{l} b_k g_k$ folgt

$$g = \sum_{k=1}^{l} \left[b_k \left(\sum_{i=1}^{m} c_{ki} f_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{m} \left[\left(\sum_{k=1}^{l} b_k c_{ki} \right) f_i \right].$$

Die dabei verwendete Regel über die Vertauschung der Summationsfolge, die auf die Additionsgesetze § 1, (1), (3), (5) zurückgeht, werden wir im folgenden häufig anzuwenden haben. Wegen ihrer Gültigkeit dürfen wir ohne Mißverständnis die Klammern bei derartigen Umformungen fortlassen.

b) Zum Nachweis der Ungleichung $r \leqq m$ ordnen wir jedem Linearformensystem

$$g_k = \sum_{i=1}^{m} c_{ki} f_i \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

aus M das Linearformensystem

$$h_k = \sum_{i=1}^{m} c_{ki} y_i \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

von m neuen Unbestimmten $y_1, \ldots, y_m$ zu. Für $l > m$ sind die h_k nach Satz 41 linear abhängig, d. h. es besteht eine Beziehung

$$\sum_{k=1}^{l} b_k h_k = 0,$$

in der nicht alle $b_k = 0$ sind. Nach dem Einsetzungsprinzip, angewandt im Integritätsbereich $\mathsf{K}_n[y_1, \ldots, y_m]$ über $\mathsf{K}_n = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ mit Ersetzung der y_i durch die f_i, folgt daraus die entsprechende Beziehung

$$\sum_{k=1}^{l} b_k g_k = 0,$$

also die lineare Abhängigkeit der g_k für $l > m$, d. h. die Behauptung $r \leqq m$.

Nunmehr können wir die angekündigte Umkehrung von Satz 42 folgern:

Satz 44. *Jede Basis eines Linearformenmoduls* M *vom Rang* r *besteht aus genau* r *Linearformen* $f_1, \ldots, f_r$, *ist also auch ein linear unabhängiges Teilsystem aus* M *von der maximalen Anzahl* r.

Beweis. Für eine Basis $f_1, \ldots, f_s$ von M ist einerseits nach Def. 25 jedenfalls $s \leqq r$, andererseits nach Satz 43 auch $r \leqq s$, zusammengenommen also $s = r$.

Eine Basis von M ist nach Satz 38, a) ein maximales linear unabhängiges Teilsystem in dem Sinne, daß bei Hinzufügung irgendeiner weiteren Linearform aus M ein linear abhängiges Teilsystem entsteht. Da wir durch Satz 43 festgestellt haben, daß diese schwächere Maximalität die stärkere Maximalität der Anzahl nach zur Folge hat, können wir fortan bei einer Basis von M unmißverständlich auch von einem *Maximalsystem linear unabhängiger Linearformen* aus M reden.

Wir heben weiter im Anschluß an Def. 25 und Satz 44 die folgende wichtige Tatsache hervor:

Satz 45. *Die lineare Komposition der Linearformen eines Linearformenmoduls* M *durch eine Basis von* M *ist jeweils nur auf eine einzige Art möglich.*

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folge aus (und ersichtlich sogar gleichbedeutend mit) der linearen Unabhängigkeit einer Basis $f_1, \ldots, f_r$ von M. Aus $\sum_{i=1}^{r} c_i f_i = \sum_{i=1}^{r} c_i' f_i$, d. h. $\sum_{i=1}^{r} (c_i - c_i') f_i = 0$ folgt nämlich nach Def. 24 gerade $c_i - c_i' = 0$, d. h. $c_i = c_i'$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Wir bemerken schließlich, daß wir im trivialen Falle des nur aus der Nullform bestehenden Linearformenmoduls $\mathsf{M} = 0$ gemäß Def. 25 auch $r = 0$ zu verstehen haben. Eine Basis von M existiert in diesem Falle nicht; zur Vereinheitlichung der Ausdrucksweise wollen wir dann sagen, M besitze eine Basis aus $r = 0$ Linearformen.

b) Vektoren

Nach der bei der Konstruktion von $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ aus K in § 4, c) und d) zugrunde gelegten Auffassung sind speziell Linearformen $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ formal nichts anderes, als Systeme $(a_1, \ldots, a_n)$ von Elementen, die den sich aus § 4, (1a)–(3a) ergebenden Unterscheidungs- und Verknüpfungsregeln unterworfen sind, und wobei für die speziellen Systeme $(e, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, e)$ die abkürzenden Bezeichnungen $x_1, \ldots, x_n$ eingeführt sind. Ohne Einführung dieser Bezeichnungen lauten die Gesetze § 4, (1a)—(3a), soweit sie sich auf die jetzt allein zu betrachtenden Linearformen und auf Elemente des Grundkörpers beziehen, folgendermaßen:

(1) $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1', \ldots, a_n')$ dann und nur dann,
wenn $a_k = a_k'$ für $k = 1, \ldots, n$,

(2) $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$,

(3) $a(a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n)$.

Nun hat man es in der linearen Algebra außer mit den Koeffizientensystemen von Linearformen auch mit Systemen von n Elementen des Grundkörpers zu tun, die für die Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ in Linearformen einzusetzen sind, und hat dann diese Elementsysteme häufig nach (1) zu unterscheiden, sowie die rechts in (2) und (3) stehenden Bildungen aus ihnen vorzunehmen. Man könnte das zwar nach dem eben Bemerkten so ausdrücken, daß man jene einzusetzenden Elementsysteme als Koeffizientensysteme von Linearformen ansieht, sie demgemäß wie diese Linearformen unterscheidet und die in (2) und (3) rechts stehenden Bildungen für sie durch die links stehenden Verknüpfungen mit diesen Linearformen zur Ausführung bringt. Die hierbei zu verwendende Ausdrucksweise würde aber sehr umständlich werden; sie ist überdies auch insofern unschön, als man bei dem Ausdruck Linearform gewohnheitsmäßig an die Möglichkeit der Ersetzung der Unbestimmten durch Elemente des Grundkörpers denkt, wovon bei den letztgenannten „Hilfslinearformen" natürlich nicht die Rede ist. Es ist daher zweckmäßiger, für die Anwendung der formalen Regeln (1)—(3) auf andere Art eine kurze Ausdrucksweise zu ermöglichen.

Definition 26. *Den Unterscheidungs- und Verknüpfungsregeln* (1)—(3) *unterworfene Systeme von n Elementen heißen* n-gliedrige Vektoren. *Wir bezeichnen sie mit den ihren Gliedern entsprechenden kleinen deutschen Buchstaben.*

Es wird also z. B. bezeichnet: $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $\mathfrak{a}$, $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ mit $\mathfrak{a}_i$, usw. Unter *Vektoren* schlechthin verstehen wir, wo nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, stets n-gliedrige.

Durch (2) ist natürlich zwangsläufig auch die Substraktion für Vektoren unbeschränkt und eindeutig erklärt, und zwar nach der zu (2) analogen Formel

$$(a_1, \ldots, a_n) - (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_n),$$

entweder weil für die Verknüpfung (2) die Gesetze § 1, (1), (3), (6) stimmen, oder einfach vermöge der formalen Identität mit den Linearformen. Der hiernach sich als *Nullvektor* ergebende, der Nullform entsprechende Vektor $(0, \ldots, 0)$ darf wieder mit 0 bezeichnet werden.

Auf Grund der formalen Übereinstimmung von Vektoren und Linearformen sind die in Def. 23—25 eingeführten Begriffe sinngemäß auch für Vektoren als erklärt anzusehen, und es bestehen dann auch die Analoga der Sätze 38—45 in sinngemäßer Formulierung für Vektoren.

Ausführlich geschrieben bedeuten nach Def. 23, 24 die Aussagen „$\mathfrak{a}$ ist von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ linear abhängig" bzw. „$\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ sind linear abhängig" das Bestehen von Relationen

(4) $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ik} = a_k$ bzw. (5) $\sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ik} = 0$ für $k = 1, \ldots, n$,

wobei in den letzteren mindestens ein $c_i \neq 0$ ist.

Die speziellen n linear unabhängigen Vektoren $(e, 0, \ldots, 0)$, $\ldots, (0, \ldots, 0, e)$, die den Linearformen $x_1, \ldots, x_n$ entsprechen, nennt man auch die n *Einheitsvektoren* und bezeichnet sie mit $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$. Sie bilden eine Basis des Moduls aller n-gliedrigen Vektoren (der somit den Rang n hat); denn es besteht für jeden Vektor $\mathfrak{a}$ die Darstellung $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathfrak{e}_k$ durch diese Einheitsvektoren. Durch Einführung dieser Darstellungen kommt man natürlich (bis auf den Bezeichnungsunterschied zwischen $\mathfrak{e}_k$ und x_k) auf den Linearformenstandpunkt zurück.

Während die bisherigen Festsetzungen über Vektoren formal mit denen über Linearformen übereinstimmen, treffen wir schließlich eine letzte Festsetzung, die über den Linearformenstandpunkt hinausgeht:

Definition 27. *Unter dem* inneren Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *zweier Vektoren* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *werde das Element* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$ *verstanden.*

Im Gegensatz zu (3) sind also beim inneren Produkt beide Faktoren Vektoren, während das Ergebnis dieser inneren Produktbildung kein Vektor, sondern ein Element des Grundkörpers ist. — Speziell gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{e}_k = a_k$, $\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}_{k'} = \begin{Bmatrix} e \text{ für } k = k' \\ 0 \text{ für } k \neq k' \end{Bmatrix}$, $\mathfrak{a}0 = 0$.

Satz 46. *Für die innere Produktbildung von Vektoren gelten die Regeln:*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a},\ c(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (c\mathfrak{a})\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(c\mathfrak{b}),\ (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}.$$

Beweis. Das folgt nach Def. 26, 27 unmittelbar aus den Gesetzen § 1, (1)—(5).

Natürlich folgt aus der letzten dieser Regeln durch wiederholte Anwendung noch die allgemeinere Formel

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i\right)\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{a}_i\mathfrak{c},$$

die ausführlich geschrieben in $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik} c_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k$, d.h. in die im Beweis von Satz 43 erwähnte Regel von der Vertauschung der Summationsfolge, übergeht und von der wir hauptsächlich Gebrauch zu machen haben werden (Satz 47).

Da von der Körpereigenschaft [§ 1, (7)] des Grundbereichs K beim inneren Produkt kein Gebrauch gemacht ist, gelten die letzten Entwicklungen auch für Vektoren des Integritätsbereiches $\mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$[1]). Von solchen Vektoren brauchen wir lediglich den Vektor $\mathfrak{x}$ der Unbestimmten.

Wir bezeichnen unter Verwendung dieses Vektors eine Linearform $f(x_1, \ldots, x_n)$ auch mit $f(\mathfrak{x})$ und treffen bezüglich der Möglichkeit, $\mathfrak{x}$ auch als Vektor des Grundbereichs aufzufassen, sowie der hierauf bezüglichen Zeichen $\equiv$ und $=$ die entsprechenden Festsetzungen wie im Anschluß an Satz 12 [41].

Nach Def. 27 besteht für jede Linearform $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$ auch die Darstellung $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ als inneres Produkt. Diese Darstellung führt auf Grund der Formeln des Satzes 46 zu einer außerordentlich einfachen Gestaltung des Rechnens mit den Funktionswerten einer Linearform. Wir heben insbesondere, im Anschluß an die Bemerkung hinter Satz 46, folgende Tatsache hervor:

Satz 47. *Ist $f(\mathfrak{x})$ eine Linearform, so gilt für ein lineares Kompositum $\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{x}_i$ von $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_m$ die Formel*

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i f(\mathfrak{x}_i),$$

d.h. der Funktionswert von f für ein lineares Kompositum von m Vektoren ist das entsprechende lineare Kompositum der m Funktionswerte für jene Vektoren.

Beweis. Ist $f(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}\mathfrak{x}$, so ist nach Satz 46

[1]) Solchen Vektoren würden dann Linearformen $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ des Integritätsbereiches $\mathsf{K}_n[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ über $\mathsf{K}_n = \mathsf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ entsprechen; wir brauchen jedoch für unsere Zwecke diese Auffassung nicht (vgl. die Ausführungen vor Def. 26).

$$\mathfrak{f}\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{x}_i\Big) = \mathfrak{a}\Big(\sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{x}_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{a}(c_i \mathfrak{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i(\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathfrak{f}(\mathfrak{x}_i).$$

An Tatsachen und Rechnungen, wie sie in Satz 47 und seinem Beweise vorkommen, wurde bei den Ausführungen vor Def. 26 vornehmlich gedacht. Im Hinblick auf Satz 47 liegt die Zweckmäßigkeit der Einführung der Vektoren auf der Hand.

Wir heben schließlich, anschließend an die Ausführungen des § 4 noch hervor, daß für Linearformen der formale Funktionsbegriff der Algebra mit dem Funktionsbegriff i. S. d. An. zusammenfällt. Auf Grund des nachstehenden Satzes ist nämlich die fragliche Bedingung § 2, (ε') beim Übergang zu den Linearformen i. S. d. An. erfüllt:

Satz 48. *Für Linearformen f und g über* K *ist die Relation*

$$f(\mathfrak{x}) \equiv g(\mathfrak{x})$$

mit der Relation

$$f(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x}) \text{ für alle } \mathfrak{x} \text{ aus } K$$

gleichbedeutend.

Beweis. a) Daß aus der ersten Relation die letztere folgt, ist klar.

b) Ist $f(\mathfrak{x}) = g(\mathfrak{x})$ für alle $\mathfrak{x}$ aus K, so ist speziell $f(\mathfrak{e}_k) = g(\mathfrak{e}_k)$ ($k = 1, \ldots, n$). Da nun, wenn $f(\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{a}\mathfrak{x}$ ist, gilt $f(\mathfrak{e}_k) = \mathfrak{a}\mathfrak{e}_k = a_k$, folgt das Übereinstimmen entsprechender Koeffizienten von f und g, d. h. $f(\mathfrak{x}) \equiv g(\mathfrak{x})$.

c) Matrizen

In den Koeffizientensystemen auf den linken Seiten linearer Gleichungssysteme treten uns Systeme von m n-gliedrigen Vektoren entgegen, die wir zu einem (mn)-gliedrigen Vektor zusammengefaßt denken können. Diesen (mn)-gliedrigen Vektor können wir uns auch aus den n m-gliedrigen Vektoren, die je durch die Koeffizienten einer festen Unbestimmten gebildet werden, durch andersartige Zusammenfassung entstanden denken. Es empfiehlt sich für diese beiden Zusammenfassungsprozesse, sowie umgekehrt für die Zerlegung eines (mn)-gliedrigen Vektors auf eine dieser beiden Weisen eine besondere Ausdrucksweise einzuführen. Wir definieren in diesem Sinne:

Definition 28. *Ein (mn)-gliedriger Vektor, insofern er als durch Zusammenfassung von m n-gliedrigen bzw. n m-gliedrigen Vektoren in ein rechteckiges Schema*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots\dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \textit{kurz } (a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{pmatrix},$$

*entstanden gedacht wird, heißt eine (m,n)-*reihige Matrix. *Die waagerechten bzw. senkrechten zusammensetzenden Vektoren heißen die* Zeilen *bzw.* Spalten *der Matrix. Wir bezeichnen Matrizen auch durch die ihren Gliedern entsprechenden großen Buchstaben.*

Es wird also z. B. bezeichnet: (a_{ik}) mit A, (a_{ik}) mit $\mathsf{A}, \dots$; die dem (mn)-gliedrigen Nullvektor entsprechende (m, n)-reihige *Nullmatrix* darf wieder mit 0 bezeichnet werden. — Den Zusatz (m, n)-reihig lassen wir auch fort, wo die Zahlen m und n aus dem Zusammenhang hervorgehen.

Der Begriff (m, n)-reihige Matrix ist gemäß Def. 28 enger als der Begriff (mn)-gliedriger Vektor, etwa in demselben Sinne, wie „die in Faktoren zerlegte ganze Zahl $l = mn$" ein engerer Begriff als „die ganze Zahl l" ist. Die Unterscheidungs- und Verknüpfungsregeln für Matrizen, nämlich analog zu (1), (2), (3)

$$\left.\begin{array}{ll} (1') & (a_{ik}) = (a'_{ik}) \text{ dann und nur dann, wenn } a_{ik} = a'_{ik} \\ (2') & (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik}) \\ (3') & a(a_{ik}) = (aa_{ik}) \end{array}\right\} \begin{pmatrix} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, n \end{pmatrix},$$

lassen das allerdings nicht hervortreten. Die Einengung liegt vielmehr in dem dem (mn)-gliedrigen Vektor übergelegten rechteckigen Schema, durch das eine begriffliche Zusammenfassung je der in einer Zeile bzw. Spalte stehenden Glieder gefordert wird.

Es ist allgemein üblich, den Index i immer für die Numerierung der Zeilen, k für die der Spalten zu verwenden. Demgemäß wäre bei vorgelegtem (m, n)-reihigen (a_{ik}) unter (a_{ki}) die durch Vertauschung der Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-reihige Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots\dots a_{m1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} \dots\dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

zu verstehen; denn in dieser numeriert eben der erste Index die Spalten, der zweite die Zeilen.

Definition 29. *Die aus einer (m, n)-reihigen Matrix (a_{ik}) durch Vertauschung ihrer Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-reihige Matrix (a_{ki}) heißt die* transponierte *zu (a_{ik}). Bei Verwendung der Bezeichnung A für (a_{ik}) wird (a_{ki}) mit A' bezeichnet.*

Außer den Verknüpfungen (2′) und (3′) benutzt man im sog. Matrizenkalkül noch eine weitere, außerordentlich wichtige Verknüpfung zweier Matrizen zu einer neuen Matrix, dem sog. *Matrizenprodukt*, das sich aber erst innerhalb der Menge aller Matrizen (nicht nur der mit festem m und n) erklären läßt. Diese Matrizenproduktbildung enthält zwar die innere Produktbildung für Vektoren als Spezialfall[1]), läuft aber nicht einfach auf das innere Produkt der den Matrizen entsprechenden Vektoren hinaus. Wenn auch der so zustande kommende sog. Matrizenkalkül von größter Bedeutung für die lineare Algebra ist, insbesondere in noch viel weiterem Maße als die Vektorschreibweise zur Übersichtlichkeit der Entwicklungen und Resultate der linearen Algebra beiträgt, müssen wir doch im begrenzten Rahmen unserer Darstellung von einem weiteren Eingehen darauf absehen und auf umfangreichere Werke verweisen[2]).

§ 11. Inhomogene und homogene lineare Gleichungssysteme

Wir beginnen jetzt mit der systematischen Behandlung der in § 5, (1) formulierten Aufgabe. Neben dem eigentlich zu untersuchenden linearen Gleichungssystem

$$\text{(J)} \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \doteq a_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

betrachten wir selbständig das lineare Gleichungssystem

[1]) Vom Standpunkte des Matrizenproduktes sind die beiden Faktoren des inneren Vektorproduktes eine $(1, n)$-reihige und eine $(n, 1)$-reihige Matrix und das Ergebnis eine $(1, 1)$-reihige Matrix, also formal, aber nicht begrifflich ein Element des Grundkörpers.

[2]) Z. B. Lit.-Verz. 2—10, 13, 14, 16, 17, 20, 23. Siehe auch **3**, 1, § 10, Aufg. 3, sowie zahlreiche weitere Aufgaben zu den nachfolgenden Paragraphen von **1** und **2**.

$$\text{(H)} \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \doteq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Man nennt (H) das (J) *zugeordnete homogene Gleichungssystem*, während (J) *inhomogen* heißt.

In dieser gegensätzlichen Benennung von (J) und (H) ist schon zum Ausdruck gebracht, daß wir (H) nicht, wie es zunächst naturgemäß zu sein scheint, als den formal mit (H) identischen Spezialfall von (J), wo alle $a_i = 0$ sind, ansehen wollen. Wir treffen vielmehr mit Rücksicht auf eine glatte Formulierung der herzuleitenden Resultate die (H) von diesem Spezialfall von (J) methodisch unterscheidende Festsetzung, daß der stets eine Lösung von (H) bildende Nullvektor $\mathfrak{x} = 0$ (die sog. *identische Lösung*) nicht als Lösung von (H) gerechnet werden soll. Speziell wird also (H) *unlösbar* genannt, wenn außer dem Nullvektor keine Lösung existiert. Dagegen sehen wir den Nullvektor sehr wohl als Lösung für den genannten Spezialfall von (J) an.

Unter der *Matrix von* (J) *und* (H) verstehen wir die (m, n)-reihige Matrix $A = (a_{ik})$.

Mittels der in § 10 entwickelten Begriffe läßt sich das Bestehen von (J) bzw. (H) für ein System $x_1, \ldots, x_n$ auch so ausdrücken, daß die Spalten von A durch lineare Komposition mit den Koeffizienten $x_1, \ldots, x_n$ den durch die rechten Seiten von (J) gebildeten Vektor $\mathfrak{a}$ bzw. den Nullvektor ergeben. Nach obiger Verabredung ist also insbesondere die Lösbarkeit von (H) mit der linearen Abhängigkeit der Spalten von A gleichbedeutend. (Vgl. die Formeln § 10, (4), (5) [75], die sich allerdings in diesem Sinne auf die Gleichungssysteme mit der Matrix A' beziehen.) Die Aufgabe der linearen Algebra § 5, (1) kann demnach auch dahin formuliert werden, daß alle Möglichkeiten, aus einem vorgegebenen Vektorensystem einen vorgegebenen Vektor linear zu komponieren, und speziell alle linearen Abhängigkeiten eines vorgegebenen Vektorensystems gefunden werden sollen. Es empfiehlt sich, diese im folgenden häufig benutzte Auffassungsweise gegenwärtig zu behalten.

Wir werden schließlich neben (J) und (H) auch noch das mit der transponierten Matrix $A' = (a_{ki})$ gebildete *transponierte homogene Gleichungssystem*

$$(\mathrm{H}') \quad f_k(x'_1, \ldots, x'_m) \equiv \sum_{i=1}^{m} a_{ik} x'_i \doteq 0 \text{ [1]} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

zu betrachten haben.

Die selbständige Betrachtung von (H) neben dem ursprünglich allein zu untersuchenden Gleichungssystem (J) wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 49. *Ist* (J) *lösbar, so erhält man alle übrigen Lösungen* $\mathfrak{x}_J$ *von* (J), *wenn man zu irgendeiner festen Lösung* $\mathfrak{x}_J^{(0)}$ *von* (J) *alle Lösungen* $\mathfrak{x}_H$ *von* (H) *addiert, also in der Form* $\mathfrak{x}_J = \mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H$.

Beweis. a) Nach Satz 47 [76] folgt aus $f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)}) = a_i$, $f_i(\mathfrak{x}_H) = 0$, daß $f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H) = f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)}) + f_i(\mathfrak{x}_H) = a_i + 0 = a_i$ ist. Also sind alle $\mathfrak{x}_J = \mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H$ Lösungen von (J).

b) Ist $f_i(\mathfrak{x}_J) = a_i$, $f_i(\mathfrak{x}_J^{(0)}) = a_i$, so folgt ebenso $f_i(\mathfrak{x}_J - \mathfrak{x}_J^{(0)}) = 0$. Also ist, falls $\mathfrak{x}_J \neq \mathfrak{x}_J^{(0)}$ ist, $\mathfrak{x}_J - \mathfrak{x}_J^{(0)} = \mathfrak{x}_H$ Lösung von (H), d. h. es ist wirklich jede von $\mathfrak{x}_J^{(0)}$ verschiedene Lösung $\mathfrak{x}_J$ von (J) von der Form $\mathfrak{x}_J = \mathfrak{x}_J^{(0)} + \mathfrak{x}_H$.

Nach Satz 49 reduziert sich die Aufgabe der linearen Algebra auf die folgenden beiden Teilaufgaben:

J) Bestimmung einer Lösung von (J),
H) Bestimmung aller Lösungen von (H).

Was einerseits H) betrifft, so gilt:

Satz 50. *Falls* (H) *lösbar ist, bilden die Lösungen von* (H) *einen Vektormodul, den* Lösungsmodul von (H).

Beweis. Gemäß Def. 25 [70] ist zu zeigen, daß mit beliebigen Lösungen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ auch jedes ihrer linearen Komposita eine Lösung von (H) ist. Aus $f_i(\mathfrak{x}_j) = 0$ $(i = 1, \ldots, m;$ $j = 1, \ldots, s)$ folgt aber nach Satz 47

[1] In der Tat steht in der i-ten Zeile und k-ten Spalte dieses ausgeschrieben gedachten Gleichungssystems der Koeffizient a_{ki} und nicht a_{ik}, wie man auf den ersten Blick glauben möchte! — Es sei jedoch für das Folgende empfohlen, sich die Gleichungen von (H') nebeneinander und jede einzelne Gleichung von oben nach unten geschrieben vorzustellen, so wie es der Entstehung von (H') aus der Matrix A entspricht.

$$f_i\left(\sum_{j=1}^{s} c_j \mathfrak{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{s} c_j f_i(\mathfrak{x}_j) = \sum_{j=1}^{s} c_j 0 = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Falls (H) lösbar ist, hat nach Satz 41 [69], Def. 25 [70] und Satz 44 [72] der Lösungsmodul von (H) einen Rang s mit $1 \leqq s \leqq n$ und besteht aus der Gesamtheit aller linearen Komposita irgendeiner seiner Basen, die ihrerseits aus genau s linear unabhängigen Vektoren besteht; nach Satz 45 [72] sind überdies die Darstellungen der Lösungen durch eine solche Basis eindeutig.

Falls (H) unlösbar ist, d. h. nur die identische Lösung $\mathfrak{x} = 0$ besitzt, gilt gemäß der Bemerkung und Verabredung nach Satz 45 [73] Entsprechendes mit $s = 0$. Daß dieser Fall eintreten kann, zeigt etwa das nur aus einer Gleichung in nur einer Unbestimmten x bestehende Gleichungssystem $a\,x \doteq 0$ mit $a \neq 0$.

Demnach reduziert sich die Aufgabe H) auf die Bestimmung des Ranges s mit $0 \leqq s \leqq n$, sowie einer Basis $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_s$ des Lösungsmoduls von (H). Für diese Bildungen führen wir die folgenden kurzen Bezeichnungen ein:

Definition 30. *Der Rang des Lösungsmoduls von* (H) *heißt der* Lösungsrang *von* (H). *Jede Basis des Lösungsmoduls heißt ein* Fundamentallösungssystem *von* (H).

Was andererseits J) betrifft, so besteht folgende notwendige Lösbarkeitsbedingung, von der sich dann später (Satz 53 [92]) herausstellen wird, daß sie auch hinreichend ist:

Satz 51. *Damit* (J) *lösbar ist, ist notwendig, daß mit jeder linearen Abhängigkeit* $\sum_{i=1}^{m} x_i' f_i = 0$ *zwischen den Linearformen links auch die entsprechende Relation* $\sum_{i=1}^{m} x_i' a_i = 0$ *für die rechten Seiten besteht.*

Beweis. Ist (J) lösbar, existiert also ein Vektor $\mathfrak{x}$ derart, daß die Funktionswerte $f_i(\mathfrak{x}) = a_i$ werden, so folgt aus $\sum_{i=1}^{m} x_i' f_i = 0$ nach dem Einsetzungsprinzip auch $\sum_{i=1}^{m} x_i' a_i = 0$.

Da eine lineare Abhängigkeit $\sum_{i=1}^{m} x_i' f_i = 0$ der Linearformen f_i nach § 10 gleichbedeutend ist mit der entsprechenden linearen Abhängigkeit $\sum_{i=1}^{m} x_i' \mathfrak{a}_i = 0$ zwischen den zugeordneten Vektoren $\mathfrak{a}_i$, d. h. den Zeilen von A, und da diese wiederum nur ein anderer Ausdruck für die Tatsache ist, daß $\mathfrak{x}'$ Lösung von (H′) ist, so folgt:

Zusatz 1. *Die Bedingung von Satz* 51 *kann auch dahin ausgesprochen werden, daß für jede Lösung* $\mathfrak{x}'$ *von* (H′) *gelten muß* $\mathfrak{x}'\mathfrak{a} = 0$.

Daraus ergibt sich dann nach Satz 46 [75] noch weiter:

Zusatz 2. *Die Bedingung von Satz* 51 *kann auch dahin ausgesprochen werden, daß für die Lösungen* $\mathfrak{x}_e'$ *eines Fundamentallösungssystems von* (H′) *gelten muß* $\mathfrak{x}_e'\mathfrak{a} = 0$.

Diese Zusätze rechtfertigen die Einführung von (H′) in den Kreis unserer Betrachtungen, da durch sie, neben der Verkettung von (J) mit (H) in Satz 49, (J) auch mit (H′) verkettet ist.

Die zu behandelnden Aufgaben J) und H) können jetzt ausführlicher so formuliert werden:

J*) *Entscheidung über die Lösbarkeit von* (J) *und Bestimmung einer Lösung im Lösbarkeitsfalle,*

H*) *Bestimmung des Lösungsranges und eines Fundamentallösungssystems von* (H).

§ 12. Äquivalente lineare Gleichungssysteme

Wir entwickeln in diesem Paragraphen ein konstruktives Verfahren, das es gestattet, ein beliebig vorgegebenes (inhomogenes oder homogenes) lineares Gleichungssystem in ein anderes von besonderer Gestalt mit derselben Lösungsgesamtheit zu transformieren, aus dem sich dann die Lösungen der am Schluß von § 11 herausgestellten Aufgaben J*) und H*) in einfacher Weise ergeben werden.

Dazu definieren wir:

Definition 31. *Zwei lineare Gleichungssysteme heißen* äquivalent, *wenn sie dieselbe Lösungsgesamtheit haben.*

Das ist natürlich eine Äqualenzrelation im Sinne von § 2, (I). Wir brauchen hier jedoch die ihr entsprechende Klasseneinteilung nicht. Diese wird erst im Matrizenkalkül von Bedeutung, wo sich die Äquivalenz durch rechnerische Beziehungen zwischen den Matrizen der Gleichungssysteme beschreiben läßt (vgl. **3**, 1, § 12, Aufg. 1—3).

Unsere Aufgabe besteht dann darin, zu (J) bzw. (H) ein äquivalentes Gleichungssystem ($\bar{\text{J}}$) bzw. ($\bar{\text{H}}$) zu konstruieren, dessen Lösungsgesamtheit sich in einfacher Weise bestimmen läßt. Dabei werden wir uns vor allem auf den folgenden Hilfssatz stützen.

Hilfssatz. *Wird in einem linearen Gleichungssystem entweder*

(a) *die Reihenfolge der Gleichungen geändert*

oder

(b) *die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einer Konstanten* $c \neq 0$ *multipliziert*

oder

(c) *zu der linken und rechten Seite einer Gleichung das c-fache der entsprechenden Seite einer anderen Gleichung addiert,*

so geht das Gleichungssystem in ein äquivalentes über, und die beiden auf den linken Seiten stehenden Linearformensysteme erzeugen im Sinne von Satz 43 [71] *denselben Linearformenmodul.*

Beweis. Hinsichtlich (a) ist die Behauptung klar. Hinsichtlich (b) und (c) können wir uns dann auf den Fall beschränken, daß die erste Gleichung mit c multipliziert bzw. zur ersten Gleichung das c-fache der zweiten addiert werden soll, und schließen so: Ist

$$g_1 = c f_1 \quad , \quad b_1 = c a_1 \quad \text{mit} \quad c \neq 0$$

bzw.

$$g_1 = f_1 + c f_2 \, , \quad b_1 = a_1 + c a_2$$

sowie

$$g_i = f_i \quad , \quad b_i = a_i \qquad (i = 2, \ldots, m) \, ,$$

so gilt einerseits für jeden Vektor $\mathfrak{x}$, der den Gleichungen $f_i(\mathfrak{x}) \doteq a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ genügt, nach dem Einsetzungsprinzip auch $g_i(\mathfrak{x}) = b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ und ist andererseits jedes g_i ein lineares Kompositum der f_i. Umgekehrt gilt dann aber auch

$$f_1 = \frac{1}{c}\, g_1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{c}\, b_1 \quad \text{mit } \frac{1}{c} \neq 0$$

bzw.

$$f_1 = g_1 - c\, g_2\,, \quad a_1 = b_1 - c\, b_2$$

sowie

$$f_i = g_i \quad , \quad a_i = b_i \qquad (i = 2, \ldots, m)\,,$$

so daß wie eben einerseits für jede Lösung $\mathfrak{x}$ der Gleichungen $g_i(\mathfrak{x}) \doteq b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ auch $f_i(\mathfrak{x}) = a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ gilt und andererseits jedes f_i ein lineares Kompositum der g_i ist.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nunmehr zum Beweis unseres Hauptsatzes:

Satz 52. *Genügt* (J) *der notwendigen Lösbarkeitsbedingung aus Satz* 51 [82], *so läßt sich* (J) *in ein äquivalentes Gleichungssystem* $(\overline{\text{J}})$ *von der Gestalt*

$$(\overline{\text{J}}) \quad \begin{aligned} g_1(\mathfrak{x}) &\equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots\cdots\cdots + b_{1n} x_n \doteq b_1 \\ g_2(\mathfrak{x}) &\equiv \qquad x_{k_2} + b_{2,k_2+1} x_{k_2+1} + \cdots\cdots + b_{2n} x_n \doteq b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_r(\mathfrak{x}) &\equiv \qquad\qquad x_{k_r} + b_{r,k_r+1} x_{k_r+1} + \cdots + b_{rn} x_n \doteq b_n \end{aligned}$$

transformieren. Dabei gilt:

(1) r *ist die Maximalanzahl linear unabhängiger unter den linken Seiten* $f_1, \ldots, f_m$ *von* (J),

(2) $g_1, \ldots, g_r$ *sind linear unabhängig und bilden eine Basis des von* $f_1, \ldots, f_m$ *erzeugten Linearformenmoduls,*

(3) $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq n.$

Beweis. Wir führen das vorgelegte Gleichungssystem

$$(\text{J}) \quad \begin{aligned} f_1(\mathfrak{x}) &\equiv a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \doteq a_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(\mathfrak{x}) &\equiv a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \doteq a_m \end{aligned}$$

durch Operationen der Form (a), (b), (c) aus dem Hilfssatz schrittweise in äquivalente Gleichungssysteme über, bis wir schließlich, nach dem r-ten Schritt, eines von der angegebenen Gestalt erhalten.

Erster Schritt. Sofern nicht alle $f_i = 0$, d. h. nicht alle $a_{ik} = 0$ sind[1]), sei k_1 der kleinste Index k, für den mindestens ein $a_{ik} \neq 0$ ist, etwa $a_{i_1 k_1} \neq 0$; dabei gilt natürlich $1 \leqq k_1 \leqq n$. Dann ändern wir (gemäß (a)) die Reihenfolge der Gleichungen so, daß die i_1-te Gleichung $f_{i_1}(\mathfrak{x}) \doteq a_{i_1}$ an die erste Stelle kommt, und dividieren diese Gleichung (gemäß (b)) durch $a_{i_1 k_1}$. Wir erhalten so an der ersten Stelle eine Gleichung der Gestalt

$$g_1(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots + b_{1n} x_n \doteq b_1 .$$

Anschließend subtrahieren wir (gemäß (c)) von den übrigen Gleichungen $f_i(\mathfrak{x}) \doteq a_i$ $(i \neq i_1)$ jeweils das a_{ik_1}-fache dieser neuen ersten Gleichung, so daß in jenen Gleichungen dann auch noch der k_1-te Koeffizient verschwindet (während alle vorherigen Koeffizienten bereits nach der Wahl von k_1 verschwanden). Damit haben wir ein zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_1) von der folgenden Gestalt gewonnen:

$$(\mathrm{J}_1)\quad \begin{array}{lllll} g_1(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} & + \cdots + & b_{1n} x_n & \doteq b_1 \\ f_2^{(1)}(\mathfrak{x}) & \equiv \quad a_{2,k_1+1}^{(1)} x_{k_1+1} & + \cdots + & a_{2n}^{(1)} x_n & \doteq a_2^{(1)} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f_m^{(1)}(\mathfrak{x}) & \equiv \quad a_{m,k_1+1}^{(1)} x_{k_1+1} & + \cdots + & a_{mn}^{(1)} x_n & \doteq a_m^{(1)} \end{array}$$

mit $1 \leqq k_1 \leqq n$.

j-ter Schritt $(j \geqq 2)$. Angenommen, wir haben in $j-1$ Schritten durch Operationen der Formen (a), (b), (c) bereits ein zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_{j-1}) der folgenden Gestalt gewonnen:

[1]) Bezüglich dieses Falles siehe die Bemerkung 4 am Schluß dieses Paragraphen.

$$
\begin{array}{llll}
& g_1(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1}x_{k_1+1} + \cdots\cdots\cdots + b_{1n}x_n & \doteq b_1 \\
& \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& g_{j-1}(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_{j-1}} + b_{j-1,k_{j-1}+1}x_{k_{j-1}+1} + \cdots + b_{j-1,n}x_n & \doteq b_{j-1} \\
(\mathrm{J}_{j-1}) & f_j^{(j-1)}(\mathfrak{x}) & \equiv \qquad a^{(j-1)}_{j,k_{j-1}+1}x_{k_{j-1}+1} + \cdots + a^{(j-1)}_{jn}x_n & \doteq a_j^{(j-1)} \\
& \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& f_m^{(j-1)}(\mathfrak{x}) & \equiv \qquad a^{(j-1)}_{m,k_{j-1}+1}x_{k_{j-1}+1} + \cdots + a^{(j-1)}_{mn}x_n & \doteq a_m^{(j-1)}
\end{array}
$$

mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_{j-1} \leqq n$.

Dann konstruieren wir ein zu (J_{j-1}) äquivalentes Gleichungssystem (J_j) ganz entsprechend wie im ersten Schritt: Sofern noch Gleichungen mit $f_i^{(j-1)} \neq 0$ hinter der $(j-1)$-ten vorhanden sind, d. h. $j \leqq m$ ist und nicht alle $a_{ik}^{(j-1)} = 0$ sind, sei k_j der kleinste Index k, für den mindestens ein $a_{ik}^{(j-1)} \neq 0$ ist, etwa $a_{i_j k_j}^{(j-1)} \neq 0$; dabei gilt wegen der Gestalt von (J_{j-1}) $k_{j-1} < k_j \leqq n$. Dann ändern wir (gemäß (a)) die Reihenfolge der letzten $m - j + 1$ Gleichungen $f_i^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \doteq a_i^{(j-1)}$ so ab, daß die i_j-te Gleichung $f_{i_j}^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \doteq a_{i_j}^{(j-1)}$ an die j-te Stelle des ganzen Gleichungssystems kommt, und dividieren diese Gleichung (gemäß (b)) durch $a_{i_j k_j}^{(j-1)}$. Wir erhalten so an der j-ten Stelle eine Gleichung der Gestalt

$$g_j(\mathfrak{x}) \equiv x_{k_j} + b_{j,k_j+1}x_{k_j+1} + \cdots + b_{jn}x_n \doteq b_j.$$

Anschließend subtrahieren wir (gemäß (c)) von den übrigen Gleichungen $f_i^{(j-1)}(\mathfrak{x}) \doteq a_i^{(j-1)}$ $(i \neq i_j)$ jeweils das $a_{ik_j}^{(j-1)}$-fache der neuen j-ten Gleichung, so daß in diesen Gleichungen dann auch noch der k_j-te Koeffizient verschwindet (während alle vorherigen Koeffizienten bereits nach der Wahl von k_j verschwanden). Damit haben wir ein zu (J_{j-1}) und daher auch zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_j) von der folgenden Gestalt gewonnen:

$$
\begin{array}{lll}
& g_1(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots\cdots + b_{1n} x_n \doteq b_1 \\
& \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& g_j(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_j} + b_{j,k_j+1} \quad x_{k_j+1} + \cdots + b_{jn} x_n \doteq b_j \\
(\mathrm{J}_j) & f_{j+1}^{(j)}(\mathfrak{x}) & \equiv \quad a_{j+1,k_j+1}^{(j)} \quad x_{k_j+1} + \cdots + a_{j+1,n}^{(j)} x_n \doteq a_{j+1}^{(j)} \\
& \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& f_m^{(j)}(\mathfrak{x}) & \equiv \quad a_{m,k_j+1}^{(j)} \quad x_{k_j+1} + \cdots + a_{mn}^{(j)} x_n \doteq a_m^{(j)}
\end{array}
$$

mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_j \leqq n$.

r-ter Schritt. Dieses Verfahren der schrittweisen Umformungen setzen wir fort, solange das möglich ist; das ist der Fall, solange noch nicht erfaßte Gleichungen mit $f_i^{(j)} \neq 0$ übrig sind. Der letzte mögliche Schritt sei der r-te. Diese Zahl r bestimmt sich demnach dadurch, daß nach dem r-ten Schritt entweder alle Gleichungen erfaßt sind, also $r = m$ ist, oder aber in den noch nicht erfaßten Gleichungen (also für $i = r + 1, \ldots, m$) $f_i^{(r)} = 0$ ist, d. h. alle $a_{ik}^{(r)} = 0$ sind. Da die in jedem einzelnen Schritt vorgenommene Wahl des Index i_ι und Abänderung der Reihenfolge der Gleichungen mit Willkürlichkeiten behaftet, also das ganze Transformationsverfahren nicht durch das Gleichungssystem (J) allein eindeutig festgelegt ist, hängt auch die Zahl r zunächst nicht allein von (J), sondern auch noch von der Wahl des Verfahrens ab. Es wird sich jedoch zeigen, daß r in Wahrheit allein durch das Gleichungssystem (J) eindeutig bestimmt ist.

Nach dem r-ten Schritt haben wir demnach ein zu (J) äquivalentes Gleichungssystem (J_r) der folgenden Gestalt gewonnen:

$$
\begin{array}{lll}
& g_1(\mathfrak{x}) & \equiv x_{k_1} + b_{1,k_1+1} x_{k_1+1} + \cdots\cdots + b_{1n} x_n \doteq b_1 \\
& \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& g_r(\mathfrak{x}) & \equiv \quad x_{k_r} + b_{r,k_r+1} x_{k_r+1} + \cdots + b_{rn} x_n \doteq b_r \\
(\mathrm{J}_r) & f_{r+1}^{(r)}(\mathfrak{x}) & \equiv \qquad\qquad 0 \doteq a_{r+1}^{(r)} \\
& \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
& f_m^{(r)}(\mathfrak{x}) & \equiv \qquad\qquad 0 \doteq a_m^{(r)}
\end{array}
$$

mit $1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq n$.

Das Teilsystem

$$(\bar{\mathrm{J}}) \qquad \begin{array}{c} g_1(\mathfrak{x}) \doteq b_1 \\ \cdots\cdots \\ g_r(\mathfrak{x}) \doteq b_r \end{array}$$

von (J_r) hat die im Satz angegebene Gestalt und besitzt die Eigenschaft (3). Wir zeigen zunächst, daß es auch die Eigenschaften (2) und (1) besitzt.

Wenn eine Relation

$$x_1' g_1 + \cdots + x_r' g_r = 0$$

besteht, so gilt insbesondere für die Koeffizienten der x_{k_j} $(j = 1, \ldots, r)$:

$$\begin{array}{ll} x_1' & = 0 \\ x_1' b_{1k_2} + x_2' & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1' b_{1k_r} + \cdots + x_{r-1}' b_{r-1,k_r} + x_r' & = 0, \end{array}$$

und daraus folgt der Reihe nach $x_1' = 0, \ldots, x_r' = 0$. Die Linearformen $g_1, \ldots, g_r$ sind somit linear unabhängig. Da sie zusammen mit den Nullformen $f_{r+1}^{(r)}, \ldots, f_m^{(r)}$ aus dem Linearformensystem $f_1, \ldots, f_m$ durch wiederholte Anwendung der Operationen (a), (b), (c) hervorgegangen sind, erzeugen sie nach dem Hilfssatz denselben Linearformenmodul M wie $f_1, \ldots, f_m$ und bilden darin wegen ihrer linearen Unabhängigkeit nach Def. 25 [70] eine Basis. Damit ist die Eigenschaft (2) nachgewiesen und im Hinblick auf Satz 44 [72] zugleich gezeigt, daß die Zahl r der Rang von M ist und somit tatsächlich nur von dem Gleichungssystem (J) und nicht auch noch von den Willkürlichkeiten des Transformationsverfahrens abhängt. Schließlich erzeugt nach Satz 38, a′) [68] und Satz 43 [71] bereits ein Maximalsystem linear unabhängiger unter den Linearformen $f_1, \ldots, f_m$ den Modul M, bildet somit nach Def. 25 eine Basis von M und hat daher nach Satz 44 die Anzahl r; und das bedeutet die die Eigenschaft (1).

Es bleibt noch zu beweisen, daß das durch Weglassen der $m - r$ letzten Gleichungen

$$\text{(N)} \qquad f_i^{(r)}(\mathfrak{x}) \equiv 0 \doteq a_i^{(r)} \qquad (i = r+1, \ldots, m)$$

aus (J_r) entstehende Teilsystem $(\bar{\mathrm{J}})$ mit (J_r) und daher auch mit (J) äquivalent ist. Für $r = m$, wo gar keine Gleichungen wegzulassen sind, also $(\bar{\mathrm{J}})$ mit (J_r) zusammenfällt, ist das trivialerweise richtig. Für $r < m$ zeigen wir: Wenn (J) — wie im Satz vorausgesetzt — die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 [82] erfüllt, dann sind in (N) mit den linken auch die rechten Seiten

$$a_i^{(r)} = 0 \qquad (i = r+1, \ldots, m),$$

also die $m - r$ letzten Gleichungen (N) von (J_r) identisch erfüllt und daher die Lösungen des Teilsystems $(\bar{\mathrm{J}})$ in der Tat auch Lösungen des vollen Systems (J_r).

Bei den Operationen (a), (b), (c) aus dem Hilfssatz geht nämlich ein Gleichungssystem jeweils in ein neues über, dessen linke Seiten linear aus den linken Seiten des Ausgangssystems komponiert sind und dessen rechte Seiten sich in gleicher Weise linear aus den rechten Seiten des Ausgangssystems zusammensetzen. Da das System (J_r) durch wiederholte Anwendung von Operationen (a), (b), (c) aus dem System (J) hervorgegangen ist, sind daher nach Satz 43 [71] die linken Seiten von (J_r) linear aus $f_1, \ldots, f_m$ komponiert und, da die im Beweis von Satz 43 angewendete Regel über die Vertauschung der Summationsfolge ebenso wie für Linearformen f_i auch für Körperelemente a_i gültig ist, sind die rechten Seiten in gleicher Weise linear aus $a_1, \ldots, a_m$ zusammengesetzt. Insbesondere sind also die $a_i^{(r)}$ in gleicher Weise linear aus $a_1, \ldots, a_m$ zusammengesetzt wie die $f_i^{(r)}$ aus $f_1, \ldots, f_m$. Da aber die $f_i^{(r)} = 0$ sind, besagt die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 [82], daß auch die $a_i^{(r)} = 0$ sind, wie behauptet.

Damit ist der Beweis von Satz 52 zum Abschluß gebracht. Wir haben in diesem Beweis das vorgelegte Gleichungssystem (J) in ein äquivalentes von der besonderen Gestalt $(\bar{\mathrm{J}})$ transformiert, von dem wir im folgenden § 13 zeigen werden, daß es stets lösbar ist und wie man seine Lösungsgesamtheit bestimmen kann. Zuvor wollen wir an den Beweis noch einige Bemerkungen anknüpfen:

1. Über die in Satz 52 formulierte Existenzaussage hinaus liefert der Beweis zugleich ein konstruktives Verfahren aus endlich vielen (nämlich $r \leqq \operatorname{Min}(m, n)$) Schritten, durch das man jedes vorgelegte lineare Gleichungssystem (J) in ein äquivalentes von der einfacheren Gestalt $(\bar{\mathrm{J}})$ überführen kann.

2. Die Prüfung, ob ein vorgelegtes lineares Gleichungssystem (J) die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 [82] erfüllt, würde im allgemeinen unendlich viele Schritte erfordern, da ja bei unendlichem Grundkörper unendlich viele Möglichkeiten linearer Abhängigkeit der Linearformen auf den linken Seiten durchzuprobieren wären. Für die Lösung der Aufgaben J*), H*) aus § 11 ist man aber auf diese Prüfung gar nicht angewiesen. Wendet man nämlich das beschriebene Verfahren auf ein vorgelegtes lineares Gleichungssystem (J) an, von dem nicht feststeht, ob die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 erfüllt ist, so gibt es für das nach r Schritten resultierende zu (J) äquivalente System (J_r) mit den $m - r$ letzten Gleichungen (N) nur die folgenden beiden Möglichkeiten:

a) Es sind, wie im vorstehenden Beweis, in (N) alle rechten Seiten $a_i^{(r)} = 0$ — hierunter zählen wir auch den Fall $r = m$, in dem gar keine $a_i^{(r)}$ mehr existieren. Dann ist (J) wie oben zu dem Teilsystem $(\bar{\mathrm{J}})$ von (J_r) äquivalent, und für dieses Teilsystem ist die notwendige Lösbarkeitsbedingung aus Satz 51 trivialerweise erfüllt, da seine linken Seiten ja linear unabhängig sind.

b) Es ist in (N) mindestens eine rechte Seite $a_i^{(r)} \neq 0$. Dann ist (J_r) und damit auch (J) unlösbar.

3. Das (J) zugeordnete homogene lineare Gleichungssystem (H) ist mit dem $(\bar{\mathrm{J}})$ zugeordneten homogenen linearen Gleichungssystem $(\bar{\mathrm{H}})$ äquivalent. Denn wendet man das beschriebene Verfahren auf (H) an, so ergibt sich gerade $(\bar{\mathrm{H}})$.

4. Der triviale Fall, daß in (J) alle linken Seiten $f_i = 0$ sind, ordnet sich dem beschriebenen Verfahren folgendermaßen unter: Hier hat (J) von vornherein schon die im allgemeinen Fall nach r Schritten resultierende Endgestalt (J_r). Demnach ist sinngemäß $r = 0$ zu setzen und das Teilsystem ($\bar{\mathrm{J}}$) aus $r = 0$ Gleichungen als identisch erfüllt anzusehen. Die beiden Möglichkeiten aus Bemerkung 2 stellen sich hier wie folgt dar:

a) Es sind alle rechten Seiten $a_i = 0$. Dann ist (J) mit ($\bar{\mathrm{J}}$) äquivalent und identisch erfüllt.

b) Es ist mindestens ein $a_i \neq 0$. Dann ist (J) unlösbar.

§ 13. Lösbarkeit und Lösungen linearer Gleichungssysteme

Wir wenden jetzt den Satz 52 [85] zur Lösung der beiden am Schluß von § 11 formulierten Aufgaben J*) und H*) an.

Die Aufgabe J*) wird durch den Beweis des folgenden Satzes gelöst:

Satz 53. *Das Gleichungssystem* ($\bar{\mathrm{J}}$) *ist stets lösbar; d. h. die notwendige Lösbarkeitsbedingung für* (J) *aus Satz* 51 [82] *ist auch hinreichend.*

Beweis. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems ($\bar{\mathrm{J}}$) folgt aus seiner besonderen Gestalt, wie sie in der Eigenschaft (3) aus Satz 52 zum Ausdruck kommt.

Man wähle nämlich, um eine Lösung zu konstruieren, zunächst die $n - k_r$ Unbestimmten $x_n, \ldots, x_{k_r+1}$ (soweit sie überhaupt vorkommen, d. h. $k_r < n$ ist) ganz beliebig. Dann läßt sich x_{k_r} (eindeutig) so bestimmen, daß die letzte Gleichung $g_r(\mathfrak{x}) \doteq b_r$ erfüllt ist, wie auch die übrigen x_k gewählt werden mögen. Danach wähle man weiter die $k_r - k_{r-1} - 1$ Unbestimmten $x_{k_r-1}, \ldots, x_{k_{r-1}+1}$ (soweit sie überhaupt vorkommen, d. h. $k_{r-1} < k_r - 1$ ist) ganz beliebig. Dann läßt sich $x_{k_{r-1}}$ (eindeutig) so bestimmen, daß auch die zweitletzte Gleichung $g_{r-1}(\mathfrak{x}) \doteq b_{r-1}$ erfüllt ist, wie auch die noch nicht festgelegten x_k gewählt werden mögen. So fahre man fort, bis schließlich auch x_{k_1} bestimmt ist, und wähle dann noch die $k_1 - 1$ Unbestimmten $x_{k_1-1}, \ldots, x_1$ (soweit sie überhaupt vorkommen, d. h. $k_1 > 1$ ist) ganz beliebig. Der damit vollständig festgelegte Vektor $\mathfrak{x}$ ist eine Lösung von $(\bar{J})$.

Diesem Lösungsverfahren ordnet sich auch der am Schluß von § 12 in der Bemerkung 4 aufgeführte triviale Fall $r = 0$ unter, indem dann alle Unbestimmten x_k ganz beliebig gewählt werden können, d. h. jeder Vektor x Lösung von $(\bar{J})$ ist.

Nach Satz 53 können wir ergänzend zu der Bemerkung 2 am Schluß von § 12 feststellen:

Zusatz. *Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des inhomogenen linearen Gleichungssystems* (J) — *und daher gleichbedeutend mit der Lösbarkeitsbedingung aus Satz* 51 [82] — *ist, daß bei der im Beweis zu Satz* 52 [85] *beschriebenen Transformation nach dem r-ten Schritt nicht nur die linken, sondern auch die rechten Seiten der letzten $m - r$ Gleichungen zum Verschwinden kommen.*

Im Hinblick auf die Bemerkung 1 am Schluß von § 12 ist damit die Aufgabe J*), bei einem vorgelegten inhomogenen linearen Gleichungssystem (J) über die Lösbarkeit zu entscheiden und gegebenenfalls eine Lösung zu bestimmen, durch ein konstruktives, in endlich vielen Schritten durchführbares Verfahren gelöst.

Dieses Verfahren liefert zudem nicht nur, wie in der Aufgabe J*) verlangt, eine Lösung von (J), sondern sogar alle Lösungen von (J), indem man für die ganz beliebig zu wählenden von den x_{k_j} verschiedenen x_k jeweils nicht nur ein, sondern nacheinander alle Elemente des Grundkörpers einsetzt (vgl. den anschließenden Beweis von Satz 54 für den homogenen Fall). Wir wollen jedoch hierauf nicht genauer eingehen, da sich die Lösungsgesamtheit von (J) auf dem bisher eingeschlagenen, durch Satz 49 [81] bestimmten Wege, nämlich durch getrennte Behandlung der Aufgaben J) und H), in übersichtlicherer Form darstellt.

Die Aufgabe H*) wird durch den Beweis des folgenden Satzes gelöst:

Satz 54. *Der Lösungsrang von* (H) *ist $s = n - r$, wo r der Rang des von $f_1, \ldots, f_m$ erzeugten Linearformenmoduls ist;*

oder also: Jedes Fundamentallösungssystem von (H) *besteht aus* $s = m - r$ *Vektoren, wo* r *die Maximalanzahl linear unabhängiger unter* $f_1, \ldots, f_m$ *ist.*

Beweis. Wir betrachten das $(\bar{\mathrm{J}})$ zugeordnete homogene lineare Gleichungssystem $(\bar{\mathrm{H}})$, das nach der Bemerkung 3 am Schluß von § 12 zu (H) äquivalent ist, und konstruieren alle Lösungen von $(\bar{\mathrm{H}})$ ebenso, wie wir im Beweis des vorigen Satzes eine Lösung von $(\bar{\mathrm{J}})$ konstruierten, indem wir nämlich die von $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ verschiedenen unter den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ ganz beliebig wählen und $x_{k_r}, \ldots, x_{k_1}$ der Reihe nach so bestimmen, daß eine Gleichung von $(\bar{\mathrm{H}})$ nach der anderen erfüllt wird. Der Lösungsrang $s = n - r$ ergibt sich dabei als die Anzahl der von den x_{k_j} verschiedenen, frei wählbaren x_k. Das erkennt man im einzelnen folgendermaßen.

Für jeden Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ von $(\bar{\mathrm{H}})$ ergibt sich x_{k_r} aus der letzten Gleichung von $(\bar{\mathrm{H}})$ als lineares Kompositum der $n - k_r$ Unbestimmten $x_{k_r+1}, \ldots, x_n$ mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten:

$$x_{k_r} = -b_{r, k_r+1}\, x_{k_r+1} - \cdots - b_{rn} x_n$$

(bzw. $x_{k_r} = 0$, falls $k_r = n$ ist). Ebenso ergibt sich $x_{k_{r-1}}$ aus der zweitletzten Gleichung von $(\bar{\mathrm{H}})$ zunächst als lineares Kompositum der $n - k_{r-1}$ Unbestimmten $x_{k_{r-1}+1}, \ldots, x_n$ mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten:

$$x_{k_{r-1}} = -b_{r-1, k_{r-1}+1}\, x_{k_{r-1}+1} - \cdots - b_{r-1,n}\, x_n.$$

Da aber hierin x_{k_r} seinerseits lineares Kompositum von $x_{k_r+1}, \ldots, x_n$ mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten ist, ergibt sich nach Satz 43 [71] durch Einsetzen $x_{k_{r-1}}$ als lineares Kompositum der x_k mit $k > k_{r-1}, k \neq k_r$, mit durch $(\bar{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten (bzw. $x_{k_{r-1}} = 0$, falls keine solchen x_k vorhanden sind, d. h. $k_r = n$, $k_{r-1} = n - 1$ ist). Fährt man so fort, so erhält man schließlich für jeden Lösungsvektor von $(\bar{\mathrm{H}})$ die r Unbestimmten $x_{k_r}, \ldots, x_{k_1}$ der

Reihe nach als lineare Komposita der übrigen $n-r$ Unbestimmten x_k mit durch $(\overline{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegten Koeffizienten (bzw. $x_{k_r}=0,\ldots,x_{k_1}=0$, falls keine weiteren x_k vorhanden sind, d. h. $r=n$ ist).

Um uns einfacher ausdrücken zu können, bezeichnen wir im folgenden die $n-r$ von $x_{k_1},\ldots,x_{k_r}$ verschiedenen unter den Unbestimmten $x_1,\ldots,x_n$ mit $x_{k_{r+1}},\ldots,x_{k_n}$. Dann liefert das eben beschriebene Verfahren r durch $(\overline{\mathrm{H}})$ eindeutig festgelegte Linearformen $h_1,\ldots,h_r$ von $n-r$ Unbestimmten $x_{k_{r+1}},\ldots,x_{k_n}$ derart, daß für jeden Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ von $(\overline{\mathrm{H}})$ gilt:

$$x_{k_1}=h_1(x_{k_{r+1}},\ldots,x_{k_n})\equiv c_{1,r+1}x_{k_{r+1}}+\cdots+c_{1n}x_{k_n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{k_r}=h_r(x_{k_{r+1}},\ldots,x_{k_n})\equiv c_{r,r+1}x_{k_{r+1}}+\cdots+c_{rn}x_{k_n}.$$

(Dabei ist im Falle $r=n$ sinngemäß $h_1=0,\ldots,h_r=0$ zu verstehen.)

Setzt man umgekehrt für $x_{k_{r+1}},\ldots,x_{k_n}$ beliebige und für $x_{k_1},\ldots,x_{k_r}$ die sich dann aus den Linearformen $h_1,\ldots,h_r$ ergebenden Werte ein, so erhält man nach dem Einsetzungsprinzip auch stets einen Lösungsvektor $\mathfrak{x}$ von $(\overline{\mathrm{H}})$. Der Lösungsmodul von $(\overline{\mathrm{H}})$ ist demnach identisch mit der Gesamtheit der Vektoren von der erhaltenen Form. Diese Vektoren $\mathfrak{x}$ sind nach Satz 47 [76] gerade die sämtlichen linearen Komposita der folgenden $s=n-r$ speziellen Vektoren (deren Komponenten wir der Einfachheit halber auf die Reihenfolge $x_{k_1},\ldots,x_{k_n}$ statt $x_1,\ldots,x_n$ der Unbestimmten bezogen angeben):

$$\mathfrak{c}_{r+1}=(c_{1,r+1},\ldots,c_{r,r+1},e,0,\ldots,0)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{c}_n\;=(c_{1n}\quad,\ldots,c_{rn}\;,\quad 0,\ldots,0,e),$$

nämlich

$$\mathfrak{x}=x_{k_{r+1}}\mathfrak{c}_{r+1}+\cdots+x_{k_n}\mathfrak{c}_n.$$

Die $s = n - r$ Vektoren $\mathfrak{c}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ sind nach Satz 40 [68] linear unabhängig, da bereits die aus ihren $n - r$ (in der angegebenen Reihenfolge) letzten Komponenten gebildeten Vektoren ersichtlich linear unabhängig sind. Sie bilden daher eine Basis des Lösungsmoduls von $(\overline{\mathrm{H}})$, d. h. ein Fundamentallösungssystem von $(\overline{\mathrm{H}})$ und damit auch von (H). Somit ist Satz 54 bewiesen.

Wir wollen noch kurz darauf eingehen, wie sich die beiden Grenzfälle $r = 0$ und $r = n$ diesem Lösungsverfahren unterordnen.

Ist $r = 0$, so besteht das Gleichungssystem $(\overline{\mathrm{H}})$ aus $r = 0$ Gleichungen. Dann ist jeder Vektor $\mathfrak{x}$ Lösung von $(\overline{\mathrm{H}})$. — In diesem Falle ist das Teilsystem $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ (und damit auch das Linearformensystem $h_1, \ldots, h_r$) leer und besteht das Teilsystem $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$ aus allen Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$. Dann ist das obige Fundamentallösungssystem $\mathfrak{c}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{c}_n$ gerade das System der $s = n - r = n$ Einheitsvektoren.

Ist dagegen $r = n$, so besteht das Gleichungssystem $(\overline{\mathrm{H}})$ aus $r = n$ Gleichungen, die der Reihe nach eindeutig $x_n = 0, \ldots, x_1 = 0$ bestimmen. Dann ist $\mathfrak{x} = 0$ die einzige Lösung, d. h. $(\overline{\mathrm{H}})$ ist im Sinne der in § 11 getroffenen Festsetzung unlösbar. — In diesem Falle besteht das Teilsystem $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$ aus allen Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$, während das Teilsystem $x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$ leer ist. Dann sind, wie gesagt, $h_1 = 0, \ldots, h_r = 0$ zu verstehen, und das obige Fundamentallösungssystem ist leer, d. h. besteht aus $s = n - r = 0$ Vektoren.

Damit ist auch die Aufgabe H*), bei einem vorgelegten homogenen linearen Gleichungssystem (H) den Lösungsrang und ein Fundamentallösungssystem zu bestimmen, durch ein konstruktives, in endlich vielen Schritten durchführbares Verfahren gelöst.

Wir wollen nun zum Schluß noch einige zusätzliche Feststellungen über die bei der Lösung von (J) bzw. (H) aufgetretenen Anzahlen r und s treffen und damit gleichzeitig das transponierte homogene Gleichungssystem (H') wieder in den Kreis der Untersuchungen einbeziehen.

Satz 54 besagt, daß der Lösungsrang des Gleichungssystems (H) um so größer ist, je weniger linear unabhängige Zeilen seine Matrix A hat, je mehr lineare Abhängigkeiten also zwischen diesen Zeilen bestehen, oder, da eine lineare Abhängigkeit zwischen den Zeilen von A mit einer Lösung von (H′) gleichbedeutend ist, je größer die Lösungsgesamtheit von (H′) ist. Es ist daher eine Relation zwischen den Lösungsrängen von (H) und (H′) zu vermuten, die sich nach Satz 54 auch als Relation zwischen den Maximalanzahlen linear unabhängiger Zeilen bzw. Spalten von A aussprechen lassen muß. Wir beweisen nun in der Tat die beiden folgenden Tatsachen:

Satz 55. *Die Maximalanzahl r linear unabhängiger Zeilen einer Matrix A ist gleich der Maximalanzahl r' linear unabhängiger Spalten von A.*

Satz 56. *Zwischen den Lösungsrängen s eines homogenen linearen Gleichungssystems* (H) *von m Gleichungen und s' seines transponierten* (H′) *von m' Gleichungen besteht die Relation*

$$m + s = m' + s'.$$

Dabei haben wir der Symmetrie halber ausnahmsweise m' für die sonst mit n bezeichnete Anzahl der Spalten geschrieben.

Beweise. 1) (Satz 55) Es seien r und r' die im Satz genannten Maximalanzahlen für die (m, m')-reihige Matrix A.

a) Ist $A = 0$, so ist die Aussage des Satzes trivial, da dann $r = 0$ und $r' = 0$ ist (vgl. Bemerkung 4 am Schluß von § 12).

b) Ist $A \neq 0$, so dürfen wir ohne Einschränkung die Zeilen so geordnet annehmen, daß $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ ein Maximalsystem linear unabhängiger Zeilen ist. Ist nun zunächst $r < m$, so sind nach Satz 38, a′) [68] die letzten $m - r$ Zeilen $\mathfrak{a}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{a}_m$ von den ersten r Zeilen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ linear abhängig, d. h. es bestehen $m - r$ Relationen der Form

$$\mathfrak{a}_j = \sum_{i=1}^{r} c_{ij}\mathfrak{a}_i \qquad (j = r + 1, \ldots, m)$$

zwischen den Zeilen. Diese besagen, daß die $m - r$ nach Satz 40 [68] linear unabhängigen Vektoren

$$(-c_{r+1,1}, \ldots, -c_{r+1,r}, e, 0, \ldots, 0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-c_{m1}\quad, \ldots, -c_{mr}\quad, 0, \ldots, 0, e)$$

Lösungen des A zugeordneten transponierten homogenen Gleichungssystems (H′) sind. Nach Satz 54, angewandt auf (H′), ist somit der Lösungsrang $m - r'$ von (H′) mindestens $m - r$, d. h. $m - r' \geqq m - r$, also $r' \leqq r$. Ist aber $r = m$, so gilt $r' \leqq r$ bereits nach Satz 41 [69], da die Spalten von A ja m-gliedrige Vektoren sind. Durch die entsprechenden Betrachtungen über die transponierte Matrix A' folgt ebenso $r \leqq r'$. Zusammen gilt also $r = r'$.

2) (Satz 56) Nach Satz 54, 55 gilt $s = m' - r$, $s' = m - r$, d. h. $m + s = m' + s'$ $(= m + m' - r)$.

Durch Satz 55 wird die nach Satz 41 [69] richtige Tatsache, daß in einer (m, m')-reihigen Matrix A für die Maximalanzahl r linear unabhängiger Zeilen nicht nur $r \leqq m$, sondern auch $r \leqq m'$ gilt, in helles Licht gestellt. Denn nach Satz 55 geht die „nicht-selbstverständliche" Ungleichung $0 \leqq r \leqq m'$ zwischen einer Zeilen- und einer Spaltenanzahl in die „selbstverständliche" Ungleichung $0 \leqq r \leqq m$ zwischen zwei Spaltenanzahlen über.

Durch Satz 56 wird der „Kreis" unserer Betrachtungen über (J), (H), (H′) geschlossen: Durch Satz 49 [81] ist (J) mit (H), durch Satz 56 (H) mit (H′) und durch Satz 51 [82], 53 (und deren Zusätze) (H′) mit (J) verkettet.

§ 14. Der Fall m = n

Es ist für die Betrachtungen in IV und auch für die Anwendungen von Interesse, die in Satz 49—56 [81—97] gewonnenen Resultate über Lösbarkeit und Lösungen linearer Gleichungssysteme auf den Fall zu spezialisieren, daß die Anzahl m der Gleichungen mit der Anzahl n der Unbekannten übereinstimmt, daß also A eine (n, n)-reihige Matrix ist. Da aber nach den Resultaten des vorigen Paragraphen die Anzahlen m und n allein für die Lösungsgesamtheit von (H) (und damit nach Satz 49 [81] auch für die von (J)) so gut wie nichts besagen, vielmehr diese sich erst durch Hinzunahme der dortigen Anzahl r bestimmt, haben wir ohne eine feste Annahme über r keine besonderen Resultate zu erwarten. Wir wollen daher außer der Spezialisierung $m = n$ noch die weitere einführen, daß nur zwischen dem Grenzfall $r = m = n$ und dem Fall $0 \leqq r < m = n$ (ohne weitere Unterscheidungen im letzteren Falle) unterschieden wird[1]).

Wir treffen demgemäß, vorläufig nur der kürzeren Ausdrucksweise halber, die folgende, erst durch die Entwicklungen in IV in ihrer vollen Bedeutung verständlich werdende Festsetzung:

Definition 32. *Eine (n, n)-reihige Matrix A heiße* regulär *oder* singulär, *je nachdem, ob für sie der Fall $r = n$ oder der Fall $0 \leqq r < n$ vorliegt, wo r die Bedeutung aus §§ 12, 13 hat.*

Der in Satz 54—56 [93—97] enthaltene Tatsachenkomplex über (H) liefert dann hier, zusammengefaßt, unmittelbar folgendes Resultat:

Satz (54, 55, 56) a. *Ist A eine (n, n)-reihige Matrix, so sind entweder sowohl ihre Zeilen als auch ihre Spalten linear unabhängig oder sowohl ihre Zeilen als auch ihre Spalten linear abhängig, d. h. es sind die A zugehörigen Gleichungssysteme* (H) *und* (H′) *entweder beide unlösbar oder beide lösbar, und zwar gilt das erstere oder das letztere, je nachdem A regulär oder singulär ist.*

Ferner liefert der in Satz 49 [81], 51 [82], 53 [92] enthaltene Tatsachenkomplex über (J) hier, zusammengefaßt, folgendes Resultat:

Satz (49, 51, 53) a. *Das Gleichungssystem* (J) *mit (n, n)-reihiger Matrix A ist genau dann für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ rechts und genau dann sogar eindeutig lösbar, wenn A regulär ist.*

Beweis. a) Es sei A regulär.

1. Dann ist (J) nach Satz 53 [92] für beliebiges $\mathfrak{a}$ lösbar, weil (H′) nach Satz (54, 55, 56) a unlösbar ist, also die einschränkende Bedingung von Satz 51 (Zusätze) [83] für $\mathfrak{a}$ fortfällt.

2. Ferner ist dann (J) nach Satz 49 [81] eindeutig auflösbar, weil (H) nach Satz (54, 55, 56) a unlösbar ist.

b) Es sei A singulär.

1. Dann existiert nach Satz (54, 55, 56) a eine Lösung $\mathfrak{x}' (\neq 0)$ von (H′). Ist darin $x'_i \neq 0$, also $\mathfrak{x}' \mathfrak{e}_i = x'_i \neq 0$, so ist (J) nach Satz 51, Zusatz 1 [83] für den Vektor $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_i$ unlösbar, also nicht für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$ lösbar.

2. Ferner ist (J) nach Satz 49 [81], wenn überhaupt, dann nicht eindeutig lösbar, weil (H) nach Satz (54, 55, 56) a lösbar ist.

[1]) Der andere Grenzfall $r = 0$ verlohnt seiner Trivialität halber keiner besonderen Hervorhebung.

Die beiden erhaltenen Sätze ergeben noch durch Elimination der Alternative (d. h. der kontradiktorisch entgegengesetzten Aussagen) „A ist regulär“ oder „A ist singulär“:

Zusatz. *Es besteht die* Alternative: *Entweder ist* (J) *einschränkungslos und eindeutig lösbar, oder es sind* (H) *und* (H′) *lösbar.*

Für den ersten Fall dieser Alternative, d. h. für reguläres A, können wir schließlich eine über die Resultate von § 13 hinausgehende, elegante Aussage betreffend die Abhängigkeit der dann stets vorhandenen, eindeutig bestimmten Lösung $\mathfrak{x}$ von (J) von dem rechtsstehenden Vektor $\mathfrak{a}$ machen. Wir bezeichnen in diesem Zusammenhang $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{x}^*$ und beweisen:

Satz 57. *Ist $A = (a_{ik})$ eine (n, n)-reihige reguläre Matrix, so existiert eine eindeutig bestimmte (n, n)-reihige Matrix A^* derart, daß die stets vorhandene und eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{x}$ des Gleichungssystems*

$$\text{(J)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k \doteq x_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A in ihrer Abhängigkeit von den rechtsstehenden x_i^* durch die Formeln

$$(\mathfrak{J}^*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^*\, x_k^* = x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A^* gegeben wird. A^* ist ebenfalls regulär, und es gilt $(A^*)^* = A$, d. h. das den Formeln $(\mathfrak{J}^*)$ entsprechende Gleichungssystem

$$\text{(J}^*) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^*\, x_k^* \doteq x_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A^* für die Unbekannten x_k^* mit den rechten Seiten x_i wird durch die dem Gleichungssystem (J) *entsprechenden Formeln*

$$(\mathfrak{J}) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = x_i^* \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

mit der Matrix A gelöst.

Beweis[1]. a) Sind die n Vektoren $\mathfrak{a}_{\cdot k}^* = (a_{1k}^*, \ldots, a_{nk}^*)$ die Lösungen von (J) für die speziellen rechten Seiten $\mathfrak{e}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, so

[1] Der Leser setze in diesem Beweise, wie im Satz geschehen, zum besseren Verständnis des Zusammenhangs vor jedes (J), (J*) das Wort Gleichungssystem, vor jedes $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}^*)$ das Wort Formeln.

folgt nach Satz 47 [76] sofort, daß das lineare Kompositum $\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \mathfrak{a}_{\cdot k}^*$ eine, also die Lösung von (J) für das entsprechende lineare Kompositum $\mathfrak{x}^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \mathfrak{e}_k$ ist. Die Darstellung von $\mathfrak{x}$ durch die $\mathfrak{a}_{\cdot k}^*$ geht aber, ausführlich geschrieben, in ($\mathfrak{J}^*$) über. Es existiert daher eine (n, n)-reihige Matrix A^* mit der im ersten Teil des Satzes genannten Eigenschaft.

b) Ist $\bar{A}^* = (\bar{a}_{ik}^*)$ eine weitere Matrix mit dieser Eigenschaft, so daß also ($\mathfrak{J}^*$) und das mit $\bar{A}^*$ gebildete ($\bar{\mathfrak{J}}^*$) für alle $\mathfrak{x}^*$ jeweils dasselbe $\mathfrak{x}$ rechts liefern, so folgt speziell für $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{e}_k$, daß die k-ten Spalten $\bar{\mathfrak{a}}_{\cdot k}^*$ und $\mathfrak{a}_{\cdot k}^*$ von $\bar{A}^*$ und A^* übereinstimmen $(k = 1, \ldots, n)$, und daraus $\bar{A}^* = A^*$, d. h. die eindeutige Bestimmtheit von A^* durch die im ersten Teil des Satzes genannte Eigenschaft.

c) Wird umgekehrt $\mathfrak{x}$ irgendwie gewählt und $\mathfrak{x}^*$ dazu so bestimmt, daß ($\mathfrak{J}$) besteht, so muß nach a) auch ($\mathfrak{J}^*$) bestehen (weil eben dann $\mathfrak{x}$ die Lösung von (J) für das so bestimmte $\mathfrak{x}^*$ ist). Anders ausgedrückt, es liefert ($\mathfrak{J}$) für jedes beliebige $\mathfrak{x}$ eine Lösung von (J^*). Dessen Matrix A^* ist also nach Satz (49, 51, 53) a regulär, und ferner $(A^*)^* = A$.

Im Hinblick auf die charakteristische Eigenschaft der Matrix A^* aus Satz 57 definieren wir noch:

Definition 33. *Die nach Satz* 57 *durch eine* (n, n)*-reihige reguläre Matrix* A *eindeutig bestimmte Matrix* A^* *heißt die* lösende Matrix *von* A.

§ 15. Die Tragweite der determinantenfreien linearen Algebra

Durch die Resultate aus §§ 11—13 haben wir die Aufgabe der linearen Algebra § 5, (1) in theoretischer wie praktischer Hinsicht vollständig gelöst.

In theoretischer Hinsicht haben wir für das Gleichungssystem (J) eine notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung (Satz 51 [82], 53 [92]) sowie eine genaue Kenntnis der Struktur der Lösungsgesamtheit (Satz 49 [81] verbunden mit Satz 50 [81], 54 [93]) gewonnen.

In praktischer Hinsicht haben wir aus endlich vielen Schritten bestehende, konstruktive Verfahren zur Entscheidung über die Lösbarkeit (Beweis von Satz 52 [85], Zusatz zu Satz 53 [93]) sowie zur Bestimmung der Lösungsgesamtheit (Beweis von Satz 52 [85], 53 [92], 54 [93]) des Gleichungssystems (J) entwickelt.

Diese Bemerkungen beziehen sich auch auf den in § 14 behandelten Spezialfall. Insbesondere wird über die dortige Alternative dadurch entschieden, ob das Transformationsverfahren aus § 12 erst nach n Schritten oder schon früher zum Abschluß kommt, und die n Spalten der lösenden Matrix werden durch Auflösung der speziellen Gleichungssysteme (J) mit den n Einheitsvektoren als rechten Seiten gewonnen.

Trotz aller dieser Errungenschaften bleibt in theoretischer wie praktischer Hinsicht noch etwas zu wünschen übrig.

In theoretischer Hinsicht ist der Beweis von Satz 55 [97] insofern unbefriedigend, als er keine tiefere Einsicht in den wahren Grund für das Übereinstimmen der Maximalanzahlen linear unabhängiger Zeilen und Spalten einer Matrix liefert. Man würde sich eine neue, in den Zeilen und Spalten symmetrische Definition dieser Anzahl wünschen, aus der sich ihre beiden bisherigen Bedeutungen durch ein und dieselbe Schlußweise folgern lassen.

In praktischer Hinsicht sind die entwickelten Verfahren insofern unbefriedigend, als sie mit Willkürlichkeiten behaftet sind und weder die Lösbarkeitsentscheidung noch die Lösungsgesamtheit in geschlossener Form liefern. Man würde sich dafür Formeln wünschen, die nur aus den Koeffizienten und rechten Seiten des Gleichungssystems in einheitlicher Form aufgebaut sind.

Diese Wünsche werden nun durch die *Determinantenlehre* erfüllt.

Der Grund, weswegen wir hier, von dem bis zur ersten Auflage dieses Bändchens fast immer üblichen Wege abweichend, nicht von vornherein diese Determinantenlehre zur Herleitung aller bisherigen Resultate verwendet haben, ist ein doppelter. Einerseits erscheint bei der eben angedeuteten Behandlungsart der an die Spitze gestellte Determinantenbegriff als etwas Fremdartiges, in gar keiner Beziehung zu dem zu lösenden Problem Stehendes, so daß die mit ihm gewonnenen Resultate überraschend wirken und aus ihrem Sinnzusammenhang gelöst erscheinen, während die von uns eingeschlagene Methode dem Problem durchaus angepaßt ist und die Zusammenhangsfäden zwischen den Sätzen 49—56 in voller Klarheit hervortreten läßt. Andererseits aber hat der entwickelte determinantenfreie Sätzekomplex der linearen Algebra in neuerer Zeit ein besonderes Interesse gewonnen, da er allein es ist, der sich mit allen seinen Beweisen fast wörtlich auf die entsprechenden Probleme für unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten und auf die damit eng zusammenhängende Theorie der linearen Integralgleichungen übertragen läßt, während der Begriff der Determinante sich dort, abgesehen von Spezialfällen, als zu eng erweist. Im übrigen ist die Schönheit und Geschlossenheit der determinantenfreien Theorie, wie sie vorstehend entwickelt wurde, Rechtfertigung genug für ihre gesonderte Behandlung.

IV. Lineare Algebra mit Determinanten

§ 16. Permutationsgruppen

In den Beweisen des vorigen Abschnitts haben wir mehrfach Umordnungen der Zeilen oder Spalten einer Matrix vorgenommen. Der in diesem Abschnitt einzuführende Determinantenbegriff beruht nun in sachlicher Hinsicht auf solchen Umordnungen, oder genauer auf gewissen dabei vorliegenden Verhältnissen. Wir müssen uns daher, ehe wir an die Entwicklung der Determinantenlehre gehen, zuvor mit diesen Verhältnissen vertraut machen.

Der Begriff *Umordnung* oder *Permutation* ist rein mengentheoretisch. Er geht davon aus, daß jede Menge zu sich selbst gleichmächtig ist [§ 2, (II)], also sich zum mindesten auf eine Weise eineindeutig sich selbst zuordnen läßt (indem nämlich jedes Element sich selbst zugeordnet wird), und entsteht durch Betrachtung irgendeiner derartigen Zuordnung:

Definition 34. *Unter einer* Permutation *einer Menge* M *versteht man irgendeine eineindeutige Zuordnung mit bestimmter Zuordnungsrichtung von* M *zu sich selbst, unter* Ausführung *oder* Anwendung *der Permutation das Ersetzen der Elemente von* M *durch die ihnen zugeordneten.*

Wir unterscheiden Permutationen nach Def. 34 sinngemäß vermöge der ihnen zugrunde liegenden Zuordnungen unter Berücksichtigung der Zuordnungsrichtung, nennen also zwei Permutationen dann und nur dann gleich, wenn jedem Element bei beiden dasselbe Element zugeordnet ist. Natürlich können wir zur eindeutigen Beschreibung einer Permutation sowohl die Mitteilung der sämtlichen Zuordnungen als auch die der sämtlichen, bei ihrer