liegen allein in der Verantwortung des Autors. Für Hinweise an die E-Mail-Adresse `baer@math.uni-potsdam.de` bin ich natürlich sehr dankbar.

Durch die neuen Abschnitte wurde das ehemals vierte Kapitel so umfangreich, dass ich es aufteilen musste in das jetzt vierte und fünfte. Das ehemals fünfte Kapitel ist daher jetzt das sechste. Auf vielfachen Leserwunsch habe ich das Nummerierungsschema bei den Sätzen, Definitionen, Aufgaben, usw. geändert und hoffe, das Nachschlagen dadurch komfortabler gemacht zu haben.

Das Buch wurde mit LaTeX unter Benutzung des PSTricks-Pakets für die Zeichnungen gesetzt. Die Farbabbildungen wurden mit povray erzeugt, die Karten im Abschnitt über Kartografie mit den Generic Mapping Tools for Unix. Die Transformation von Eschers Holzschnitt in das Klein'sche Modell der hyperbolischen Geometrie auf Seite 239 und in das Halbebenen-Modell auf Seite 241 wurde mit gimp und dem mathmap plugin erzeugt. Ich bin den Entwicklern all dieser tollen freien Software zu großem Dank verpflichtet. Die Illustrationen auf den Seiten 157, 223 und 277 wurden mit Maple erstellt.

Auch dieses Mal war die Zusammenarbeit mit dem Walter de Gruyter Verlag wieder sehr angenehm und konstruktiv. Mein besonderer Dank geht hierbei an Herrn Albroscheit.

Potsdam, im Dezember 2009 Christian Bär

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist aus Vorlesungen über elementare Differentialgeometrie entstanden, die ich an den Universitäten in Freiburg und Hamburg gehalten habe. Dabei steht das Wort „elementar“ keineswegs für „besonders einfach“, sondern deutet an, dass der formale Aufwand, der bei einem tieferen Eindringen in die Differentialgeometrie unvermeidlich ist, hier noch weitgehend vermieden wird. Statt dessen werden ausschließlich mit den Hilfsmitteln der üblichen Grundvorlesungen über Analysis und lineare Algebra direkt geometrisch interessante Probleme angegangen. Selbst über so „einfache“ Objekte wie Kurven in der Ebene kann man knifflige Fragen stellen. So ist z. B. der Beweis des Vierscheitelsatzes alles andere als trivial.

Das Buch ist geeignet für Studenten ab dem zweiten Studienjahr und kann in Vorlesungen, (Pro-)Seminaren oder im Selbststudium eingesetzt werden.

Das erste Kapitel ist vor allem aus historischer Sicht von Interesse. Hier kann der Leser erfahren, wie geometrische Resultate auf axiomatische Weise jahrtausendelang seit Euklid gewonnen wurden. Insbesondere erfährt man, was es mit der Kontroverse um das Parallelenaxiom auf sich hat. Wir folgen in diesem Kapitel weitgehend Hilberts Darstellung der ebenen Geometrie, da sie noch sehr nahe an Euklids Formulierung der Axiome ist und gleichzeitig den heutigen Anforderungen an mathematischer Strenge genügt. Inzwischen wurde der axiomatische Aufbau stark vereinfacht [1]. Eine Darstellung mit lediglich sieben Axiomen findet sich in [26].

Wer nur an Differentialgeometrie selbst interessiert ist, kann direkt mit dem zweiten Kapitel beginnen. Hier wird die Theorie der Kurven entwickelt mit besonderem Gewicht auf Kurven in der Ebene und im dreidimensionalen Raum. Der für die Differentialgeometrie so zentrale Begriff der Krümmung taucht erstmals auf. Besonders interessant sind globale Resultate, d. h. Aussagen über die Gesamtgestalt geschlossener Kurven. Dazu gehören z. B. der oben erwähnte Vierscheitelsatz sowie die Sätze von Fenchel und Fáry-Milnor, die darüber Auskunft geben, wie stark sich eine Raumkurve krümmen muss, damit sie sich schließen kann bzw. zusätzlich noch verknotet ist.

Im dritten Kapitel beginnen wir das Studium von Flächen im dreidimensionalen Raum. Es werden die nötigen Konzepte entwickelt, wie z. B. verschiedene Krümmungsbegriffe, und einige besonders wichtige Klassen von Flächen werden genauer untersucht. Eine solche Klasse wird von den Minimalflächen gebildet, die in der Natur als Seifenhäute vorkommen. Einige Beispiele sind auch auf den Farbabbildungen dargestellt.

Im vierten Kapitel ändern wir unseren Standpunkt und konzentrieren uns auf geometrische Größen, die man nur durch Messungen innerhalb der Fläche gewinnen kann. Dazu gehört z. B. das Studium der kürzesten Verbindungskurven zweier vorgegebener Punkte in einer Fläche. Dieser Standpunkt legt es nahe, allgemeine riemannsche Metriken einzuführen, was uns die Konstruktion neuer wichtiger Geometrien erlaubt. Das prominenteste Beispiel dürfte die hyperbolische Ebene sein, die, wie Hilbert gezeigt hat, nicht als „klassische Fläche“ realisiert werden kann. Die hyperbolische Ebene ist unter anderem deshalb so bedeutsam, weil sie die Kontroverse um das Parallelenaxiom entschieden hat. Sie wird daher häufig auch etwas unglücklich als nichteuklidische Geometrie bezeichnet. Wir widmen der hyperbolischen und der sphärischen Geometrie einige Aufmerksamkeit und leiten die wichtigsten trigonometrischen Lehrsätze her. Wir beschließen das Kapitel mit der Herleitung des Divergenzsatzes von Gauß und folgern daraus, dass die totale Gauß-Krümmung einer geschlossenen Fläche nicht von der riemannschen Metrik abhängt. Diese Totalkrümmung ist mithin eine „topologische Invariante“ der Fläche.

Das letzte Kapitel ist der topologischen Interpretation dieser Größe gewidmet. Dazu zeigen wir, dass man kompakte Flächen stets triangulieren, d. h. auf geeignete Weise in Dreiecke zerlegen kann. Der Satz von Gauß-Bonnet sagt uns dann, dass die

Totalkrümmung durch Abzählen von Ecken, Kanten und Dreiecken einer solchen Triangulierung bestimmt werden kann.

Es folgen noch zwei Anhänge, zunächst eine Sammlung nützlicher Formeln zur inneren Geometrie von Flächen und der wichtigsten trigonometrischen Lehrsätze. Anschließend werden die in diesem Buch definierten mathematischen Symbole aufgelistet, um das Nachschlagen zu erleichtern. Wie üblich wird das Buch mit Literatur- und Stichwortverzeichnis abgeschlossen.

Die Nummerierung von Sätzen, Beispielen, Aufgaben usw. erfolgt durch drei Ziffern, wobei die erste das Kapitel und die zweite den Abschnitt bezeichnet. Die zahlreichen in den Text eingestreuten Aufgaben behandeln vorwiegend Beispiele anhand derer der bis dahin entwickelte Stoff geübt werden kann. Zwar hängt der weitere logische Aufbau des Buches von den allermeisten Aufgaben nicht ab, dennoch sei dem Leser eine möglichst aktive Lektüre mit Bearbeitung der Aufgaben angeraten, um die nötige Vertrautheit mit den eingeführten Konzepten herzustellen. Schwierigere Aufgaben wurden mit Lösungshinweisen versehen.

Allen, die zum Gelingen dieses Buches beigetragen haben, sei an dieser Stelle ganz herzlich gedankt, u. a. B. Ammann, F. Auer, H. Karcher, A. Kreuzer, F. Pfäffle, E. Schröder und U. Wöske. Alle Fehler, die das Buch in wohl unvermeidlicher Weise dennoch enthalten wird, sind natürlich alleine von mir zu verantworten. Für eine Mitteilung an die Adresse `baer@math.uni-hamburg.de` wäre ich sehr dankbar. Ein sehr herzlicher Dank geht auch an den Walter de Gruyter Verlag, insbesondere an Herrn Karbe, für die stets angenehme und vertrauensvolle Zusammenarbeit. Ein ganz besonderer Dank schließlich gebührt Herrn A. Hornecker, der die Farbillustrationen und die meisten Zeichnungen beigesteuert hat.

Hamburg, im September 2000 Christian Bär