

Inhalt

Vorwort — V

Vorwort zur 2. Auflage — VII

Vorwort zur 3. Auflage — IX

Einleitung — 1

1 Die Zahlbereiche \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} — 5

- 1.1 Natürliche Zahlen — 5
- 1.2 Ganze Zahlen — 8
- 1.3 Teilbarkeit in \mathbb{Z} — 10
- 1.4 Brüche und Rationale Zahlen — 11
- 1.5 Division mit Rest — 13
- 1.6 Gekürzte Brüche — 16
- 1.7 Vollständige Induktion — 18
- 1.8 Die vollständige Ganz-Abgeschlossenheit von \mathbb{Z} — 21

2 Primzahlen — 25

- 2.1 Primzahlen — 26
- 2.2 Fundamentalsatz der elementaren Zahlentheorie — 28
- 2.3 Euklidischer Algorithmus — 33
- 2.4 Lineare Kongruenzen und eulersche φ -Funktion — 41
- 2.5 Lineare diophantische Gleichungen — 55
- 2.6 Fermatsche und mersennesche Zahlen — 64
- 2.7 Vollkommene Zahlen — 69

3 Die Zahlbereiche \mathbb{R} und \mathbb{C} — 76

- 3.1 Reelle Zahlen — 76
- 3.2 Komplexe Zahlen — 86
- 3.3 Algebraische und transzendentale Zahlen — 92
- 3.4 Spezielle algebraische Zahlen — 101
- 3.5 k -adische Brüche — 103
- 3.6 Kettenbruchdarstellungen — 111
- 3.6.1 Allgemeine Kettenbrüche — 111
- 3.6.2 Reguläre Kettenbrüche — 118
- 3.7 Irrationalitätsbeweise — 143
- 3.8 Transzendenzbeweis von e — 148

4	Zahlentheoretische Funktionen — 153
4.1	Multiplikative und additive Funktionen — 153
4.1.1	Beispiele zahlentheoretischer Funktionen — 154
4.1.2	Multiplikative zahlentheoretische Funktionen — 156
4.1.3	Additive zahlentheoretische Funktionen — 157
4.1.4	Primzahlunabhängige zahlentheoretische Funktionen — 158
4.1.5	Summatorische Funktionen — 159
4.2	Die Teilerfunktionen — 161
4.3	Dirichlet-Faltung — 167
4.4	Dirichletsche Reihen — 174
4.5	Eulersche Summenformel — 180
4.5.1	Landausche Ordnungssymbole — 180
4.5.2	Endliche Summen — 183
4.5.3	Eulersche Summenformel — 187
4.6	Riemannsche Zetafunktion — 189
4.7	Möbiussche μ -Funktion — 194
4.8	Mittelwerte und Größenordnungen — 197
4.9	Partitionen — 207
5	Quadratische und höhere Kongruenzen — 225
5.1	Primitive Wurzeln — 225
5.2	Indexrechnung — 235
5.3	Quadratische Kongruenzen — 239
5.4	Darstellungen von Zahlen als Quadratsummen — 256
5.5	Höhere Kongruenzen — 262
6	Zwei-Personen-Spiele mit Zahlen — 279
6.1	Subtraktions-Spiele — 279
6.1.1	Das 1-2-Subtraktions-Spiel — 280
6.1.2	Rückwärtsanalyse — 282
6.1.3	Struktur: Perioden und Vorperioden — 285
6.1.4	Spiele-Familien mit langen Perioden und Vorperioden — 286
6.2	Das Nim-Spiel und Boutons Strategie — 293
6.2.1	Die Strategie von Bouton — 294
6.2.2	Die Rache des Verlierers — 297
6.3	Subtraktions-Spiele mit anderen Zugreihenfolgen — 298
6.3.1	A-A-B-A-B-A-A-B-A-B-... — 298
6.3.2	Die Macht der häufigeren Alice — 301
7	Drei moderne Spiele: Über Zahlen – Würfel – Schildkröten — 307
7.1	Letzter Mann voran — 308
7.2	EinStein würfelt nicht — 314

- 7.3 Karls Rennen — 320
7.4 Die drei Spiele im Vergleich — 327

Anhang — 329

Lösungshinweise und Lösungen — 337

Literatur — 351

Symbolverzeichnis — 355

Index — 357

