Anhang

Das Rechnen mit komplexen Zahlen

1. Es sei $\mathfrak{R}$ die Menge der reellen, $\mathfrak{C}$ die Menge der komplexen Zahlen. Die Elemente aus $\mathfrak{C}$ haben die Gestalt $a + bi$ $(a, b \in \mathfrak{R})$, und es wird wie folgt mit ihnen gerechnet:

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c, b = d; \tag{1}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \tag{2}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{3}$$

Statt $a + 0i$ schreiben wir a, statt $0 + bi$ schreiben wir bi. Ist $a + bi \neq 0$, so ist auch $a - bi \neq 0$, und durch formales Erweitern mit $a - bi$ findet man

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)\,(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i;$$

dieses Resultat wird durch die Probe bestätigt.
Wir rechnen also mit komplexen Zahlen in gewohnter Weise und beachten nur $i^2 = -1$. Daß es einen derart hingeschriebenen Körper $\mathfrak{C}$ wirklich gibt, bedarf einer Begründung. Hierzu vergleiche man etwa § 23.

2. Es ist von großem Nutzen, sich die komplexen Zahlen in folgender Weise zu veranschaulichen. Man wähle in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatensystem, bestehend aus einer x-Achse und einer y-Achse, und ordne der komplexen Zahl $z = x + yi$ $(x, y \in \mathfrak{R})$ den Punkt (x, y) mit den Koordinaten x, y zu. Durch diese Vorschrift wird $\mathfrak{C}$ eineindeutig auf die sogenannte *Gaußsche Zahlenebene* abgebildet. Den Punkten der x-Achse sind dabei genau die reellen Zahlen zugeordnet, und wir bezeichnen deshalb die x-Achse als die *reelle Achse*; die y-Achse heißt die *imaginäre Achse*. Wir sagen, die komplexe Zahl $z = x + yi$ $(x, y \in \mathfrak{R})$ habe den Realteil x und den Imaginärteil y, und wir schreiben $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Der Spiegelpunkt von $z = x + yi$ $(x, y \in \mathfrak{R})$ an der reellen Achse ist der Punkt $x - yi$; wir bezeichnen ihn mit $\bar{z}$ und nennen $\bar{z} = x - yi$ die zu $z = x + yi$ *konjugiert-komplexe Zahl.* Die Zahl $z \in \mathfrak{C}$ ist genau dann reell, wenn $z = \bar{z}$ ist. Es ist $\bar{\bar{z}} = z$. Die Zahl $-z$ findet man, indem man den Punkt z am Ursprung spiegelt. Man bestätigt leicht die Regeln

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \end{aligned} \qquad (z_1, z_2 \in \mathfrak{C}). \tag{4}$$

Der Punkt $z = x + yi$ $(x, y \in \Re)$ hat vom Ursprung die Entfernung $\sqrt{x^2 + y^2} \geqq 0$; diese nichtnegative reelle Zahl bezeichnet man mit $|z|$. Es folgen die Regeln $|z| = |-z| = |\bar{z}|$, $-|z| \leqq \operatorname{Re} z \leqq |z|$, $-|z| \leqq \operatorname{Im} z \leqq |z|$.
Der Abstand der Punkte $z_1, z_2 \in \mathfrak{C}$ ist $|z_1 - z_2|$. Er ist ja genauso groß wie der Abstand des Punktes $z_1 - z_2$ vom Ursprung.
Es gelten die beiden Regeln

$$(5) \qquad |z|^2 = z\bar{z},$$

$$(6) \qquad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Die erste folgt unmittelbar aus den Definitionen für $\bar{z}$ und $|z|$. Die zweite besagt dasselbe wie $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$, und das folgt durch Ausrechnen der linken Seite mittels (5) und (4): $|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 \cdot z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.
Sind z_1, z_2, z_3 drei Punkte der Gaußschen Zahlenebene, so gilt

$$|z_1 - z_2| \leqq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|,$$

weil der Umweg von z_1 über z_3 nach z_2 mindestens ebenso groß ist wie die direkte Entfernung $|z_1 - z_2|$. Setzt man speziell $z_3 = 0$ und schreibt $-z_2$ für z_2, so bekommt man die *Dreiecksungleichung*

$$(7) \qquad |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|,$$

die man auch ohne Rückgriff auf die Anschauung bestätigen kann.

3. Wir führen nun in der Gaußschen Zahlenebene Polarkoordinaten ein. Die Entfernung r des Punktes $z = x + yi$ $(x, y \in \Re)$ vom Ursprung haben wir schon betrachtet: Es ist $r = |z|$. Für jeden Punkt $z \neq 0$ ist ferner bis auf additive ganzzahlige Vielfache von 2π eindeutig ein Winkel φ dadurch erklärt, daß die positive reelle Achse im mathematisch positiven Sinn so lange gedreht wird, bis sie die Verbindungsstrecke von 0 und z enthält: Dieser Winkel sei φ. Wir schreiben $\varphi = \arg z$ und nennen φ das Argument von z; wir verabreden, daß mit φ auch die reellen Zahlen $\varphi + 2k\pi$ (k ganz) Argumente von z sind. Wegen $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ bekommt z die Gestalt $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Genau dann liegt z auf dem Einheitskreis, wenn hierbei $r = 1$ ist.
Es seien nun zwei komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \end{aligned}$$

gegeben. Für ihr Produkt bekommt man

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Daraus kann man zwei Regeln ablesen. Einmal wird $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$. Das steht bereits in (6). Ferner liefert ein Vergleich der Argumente auf beiden Seiten

$$(8) \qquad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad (z_1 z_2 \neq 0).$$

Aus (8) folgt beispielsweise, daß $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$ das Inverse von $\cos\varphi + i\sin\varphi$ oder

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

das Inverse von $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ ist, was man auch unmittelbar direkt nachrechnet.

Für reelles φ definiert man

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{9}$$

Wir können dabei die linke Seite als eine bequeme Abkürzung der rechten ansehen; wegen (8) gilt auch hier das bereits aus dem Reellen vertraute Additionstheorem

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Mehrfache Anwendung von (8) liefert auch die sogenannte MOIVREsche Formel

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi; \tag{10}$$

sie gilt für alle natürlichen, ja sogar für alle ganzen Zahlen n. Sie gestattet verschiedene praktische Anwendungen. Will man beispielsweise $\cos n\varphi$ durch $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrücken, so braucht man links nur den binomischen Lehrsatz anzuwenden und anschließend die Realteile auf beiden Seiten zu vergleichen. So bekommt man etwa $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$.

Weiter ist jede der n Zahlen

$$\cos\nu\frac{2\pi}{n} + i\sin\nu\frac{2\pi}{n} = e^{i\nu\frac{2\pi}{n}} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

eine n-te Wurzel aus 1, wie die Probe mittels (10) zeigt. Diese n Punkte liegen auf dem Einheitskreis und teilen ihn in n gleiche Teile. Man nennt sie n-te Einheitswurzeln. Andere n-te Wurzeln aus 1 gibt es nicht. Wegen

$$\cos\nu\frac{2\pi}{n} + i\sin\nu\frac{2\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^\nu$$

bilden die n-ten Einheitswurzeln eine von $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung n bezüglich der Multiplikation.

Die dritten Einheitswurzeln beispielsweise sind demnach

$$\cos 0\cdot\frac{2\pi}{3} + i\sin 0\cdot\frac{2\pi}{3} = 1,$$

$$\cos 1\cdot\frac{2\pi}{3} + i\sin 1\cdot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 2 \cdot \frac{2\pi}{3} + i \sin 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3};$$

man kann sie auch durch Aufsuchen der Nullstellen von

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

ermitteln.
Die vierten Wurzeln aus $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ sind

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \nu \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \nu \frac{2\pi}{4}\right) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3);$$

wieder macht man am einfachsten die Probe nach (10). Schreibt man die Winkelfunktionen aus, so erhält man die sämtlichen vier Werte von $\sqrt[4]{-1}$ zu $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$.