Einführung in die angewandte Logik

von

Theodor G. Bucher

1987

Walter de Gruyter · Berlin · New York

SAMMLUNG GÖSCHEN 2231

Dr. Theodor G. Bucher
o. Professor für Philosophie
an der Theologischen Hochschule Chur (Schweiz)

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Bucher, Theodor G.:
Einführung in die angewandte Logik / von
Theodor G. Bucher. – Berlin ; New York : de
Gruyter, 1987.
(Sammlung Göschen ; 2231)
ISBN 3-11-011278-7

NE: GT

Satz: Tutte Druckerei GmbH, Salzweg-Passau – Druck: Druckerei Arthur Collignon GmbH, Berlin – Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer GmbH, Berlin – Printed in Germany

Meiner Mutter, meinem Vater †
und allen Geschwistern mit ihren Angehörigen

Vorwort

Was gezeigt werden kann,
kann nicht gesagt werden.
L. Wittgenstein, Tractatus 4.1212

Bei der Besprechung der Wahrheit bemerkt William James, eine neue Theorie werde zunächst als widersinnig bekämpft; in einem späteren Zeitpunkt gibt man ihre Wahrheit zu, bezeichnet sie aber als selbstverständlich und bedeutungslos. Wenn es schließlich soweit ist, daß ihre weitreichende Bedeutung anerkannt wird, dann behaupten die früheren Gegner, sie hätten sie selbst entdeckt.

Im deutschen Sprachgebiet scheint die Logik unter den sogenannten Geisteswissenschaftlern im zweiten Stadium angelangt zu sein. Ein Grund für den Rückstand gegenüber dem englischsprachigen Gebiet liegt zweifellos in der Darstellung der Einführungsliteratur. Der Zugang zur Logik ist vergleichbar mit dem Erlernen einer Fremdsprache. Methodisch hat man sich eingangs zu entscheiden zwischen der Bearbeitung kunstvoller Texte aus der Literatur, an denen die Hochleistung der Sprache abzulesen ist oder der Wiederholung einfacher Formen mit den geläufigen Ausdrücken der Umgangssprache. In der Logik stellt sich eine analoge Frage, ob es didaktisch vorteilhaft sei, sich zuerst die wesentlichen logischen Ideen in Reinheit anzueignen, um so zunächst die Anwendungsprobleme mit den ihnen eigenen Schwierigkeiten zu umgehen. Da ich zum einen die Nähe zur Praxis für natürlicher und erst noch reizvoller und zum andern das künstliche Hinausschieben der Anwendungsprobleme für eine Mißdeutung der genetischen Entwicklung der Logik halte, habe ich mich auf die hier vorliegende Darstellungsart festgelegt.

Seit der Zeit der alten Griechen gilt die Logik als brauchbares Hilfsinstrument. Sie soll den Gesprächsteilnehmer befähigen, den Ablauf einer komplexeren Argumentation zu überschauen, überzeugend zu begründen oder Fehlerhaftes ebenso sicher zu widerlegen. Für den Alltag ist das nützlich, für die wissenschaftliche Arbeit unerläßlich. Darüber hinaus könnte die Logik in der allenthalben beklagten Zersplitterung des heutigen Wissens die Führung zur Konzentration übernehmen, denn sie ebnet den Weg zum modernen Wissenschaftsverständnis und den Anspruchsvolleren zur Grundlagenforschung der Mathematik. Bereits geringe Kenntnisse in diese Richtung dürften dazu beitragen, die verbreitete Technikfeindlichkeit in ein kühleres Verhältnis zur Wirklichkeit zu bringen. So bleibt als Neben- oder Fernziel die Hoffnung, es könnte die künstliche, aber schädliche Trennung zwischen der vermeintlich geistlosen Natur- und naturlosen Geisteswissenschaften vielleicht etwas gemildert werden.

Ein beruhigendes Wort soll noch vorausgeschickt werden zur verrufenen Symbolik. Sie ist für die Logik genau so unentbehrlich wie für die Mathematik, sobald die Ebene überschaubarer Banalitäten überschritten wird. Jedermann setzt in der Arithmetik spätestens bei der Multiplikation von dreistelligen Zahlen die in der Volksschule erlernte Technik ein. Entsprechend habe ich versucht, für die Logik das unvermeidliche Minimum an Formalem pädagogisch erträglich aufzubauen. Es muß bei einem Versuch bleiben, was sich je nach Gesichtspunkt vor- oder nachteilig auf die ganze Darstellung niederschlägt, etwa wenn Beispiele oder Umschreibungen zur Erklärung von Begriffen und ihren Anwendungen bevorzugt werden. In der gleichen Absicht werden kurze Lerneinheiten mit Übungen abgeschlossen – meistens in aufsteigendem Schwierigkeitsgrad –, an denen der Leser jederzeit sein tatsächliches Verständnis wirksam überprüfen kann. Die vielen Formeln, die beim flüchtigen Durchblättern dem Leser Schrecken einjagen, werden sich entgegen ihrem ersten Eindruck als weit harmloser erweisen, weil sie vertraute Strukturen der Umgangssprache widerspiegeln.

Ferner bleibt festzuhalten, daß die zitierten Originalbeispiele zu einem guten Teil aus der Gegenwart stammen. Sie sind mehrheitlich logisch bedenklich, jedoch absichtlich unter diesem Gesichtspunkt ausgewählt worden; denn einerseits läßt sich anhand von Fehlern viel lernen, andererseits soll die Tatsache nicht weiterhin beschönigt werden, mit welch geringer Treffsicherheit selbst intellektuell führende Zeitgenossen an logischen Klippen vorbeirudern, sobald das Resultat nicht trivialerweise feststeht. Die Eigenüberschätzung hängt mit dem anscheinend unausrottbaren Irrtum zusammen, ein beliebiges Fachstudium würde die erforderliche logische Kompetenz mitliefern. Indessen ist die Auswahl aus der vorwiegend philosophischen, theologischen und juristischen Literatur lediglich das Spiegelbild meiner persönlichen Beschäftigung und insofern willkürlich. Es darf nicht voreilig geschlossen werden, in den drei genannten Gebieten werde die Logik systematischer verletzt als anderswo.

Der vorliegende Stoff ist als zweisemestrige Anfängervorlesung bei sogenannten Geisteswissenschaftlern erprobt. Nichts ist so vollkommen, daß Verbesserungsvorschläge nicht dankbar entgegengenommen und eingehend geprüft würden.

Zum Schluß bleibt mir noch die angenehme Aufgabe, die wichtigsten Mithelfer zu erwähnen. An erster Stelle möchte ich meinem Abt Leonhard Bösch zu Engelberg danken, der mich für den Philosophieunterricht an der Theologischen Hochschule in Chur freigestellt hat. Weiter danke ich einer halben Studentengeneration; ihre Einwände haben merklich zu einer durchsichtigeren Darstellung beigetragen. Ferner habe ich seit Jahren in einem weit größeren Rahmen der Forschung als nur für die Abfassung des vorliegenden Buches die Unterstützung zahlreicher Bibliotheken erfahren. Bei dieser Gelegenheit möchte ich ihnen danken, allen voran der Bibliothèque Royale in Bruxelles sowie den Universitätsbibliotheken von Leuven, Oxford und Cambridge. Und schließlich muß mit besonderer Dankbarkeit erwähnt werden, daß ohne die ermunternde Vermittlung von Herrn Prof. Wenzel beim Verlag de Gruyter mein Manuskript irgendwo in der Provinz vermodert wäre.

Chur/Engelberg, am Tag des hl. Anselm 1987

Inhaltsverzeichnis

0. Logik und Wahrheit

Eine weit verbreitete Meinung sagt, die Logik sei die Lehre vom Denken oder genauer vom richtigen Denken. Mit dem Denken befaßt sich jedoch die ganze Philosophie, dazu noch viele andere Wissenschaften, von der Psychologie bis zur Neurophysiologie. Da die Logik nur einen kleinen Ausschnitt des Denkens behandelt, dürfen wir sie nicht als die Lehre vom Denken ansehen. Der Aspekt des Denkens, mit dem sich die Logik befaßt, kann deutlicher umschrieben werden als die Form des Schließens.

0.1 Logik als Lehre der gültigen Formen

Was eine Form genau ist, das kann nicht exakt beschrieben werden. Doch für unsere Bedürfnisse läßt es sich mit genügender Klarheit andeuten. Wir können uns unter der Form so etwas vorstellen wie eine Schale, die mit Teig gefüllt wird, woraus im Ofen ein Kuchen entsteht. Es gibt außerhalb der Bäckerei weitere Formen, etwa zur Herstellung von Bierflaschen, Zementröhren oder Schokoladentafeln. Das Gemeinsame an solchen Formen ist: Jedes Individuum, das aus ihnen hervorgeht, hat die gleichen Eigenschaften. Sie gleichen einander wie Zwillingspaare.

So gibt es in der Sprache vergleichbare Formen von Sätzen, die miteinander verknüpft werden können. Daraus entstehen Zusammenhänge, die manchmal kaum oder überhaupt nicht beachtet werden. Eine solch einfache Form wird beispielsweise für den folgenden Schluß verwendet:

(1) Alle Winterartikel sind ausverkauft
Alle Schlittschuhe sind Winterartikel
Also sind alle Schlittschuhe ausverkauft

Aus zwei Sätzen wird hier gefolgert, die Schlittschuhe seien ausverkauft. Wir haben das Gefühl, etwas Wahres und Selbstverständliches geschlossen zu haben. Das gilt auch für den folgenden

Schluß, bei dem wir mit der gleichen Spontaneität erkennen, daß etwas daran falsch ist:

(2) Alle Pferde sind weiß
Alle Schimmel sind Pferde — Prämissen
Also sind alle Schimmel weiß — Konklusion

Die zwei Sätze oberhalb des Striches nennen wir Prämissen. Manchmal wird der Strich weggelassen. Was unterhalb des Striches liegt, ist die Folgerung, Konklusion oder Schluß. „Schluß" wird manchmal zweideutig verwendet, indem es zur Bezeichnung der Konklusion oder der ganzen Ableitung eingesetzt wird.

Wir sehen sofort ein, daß beim Beispiel (2) die Konklusion wieder wahr ist, denn die Schimmel sind tatsächlich weiß. Vergleichen wir vorerst noch ein drittes Beispiel:

(3) Alle Naturwissenschaftler sind teilnahmeberechtigt
Alle Biologen sind teilnahmeberechtigt
Also sind alle Biologen Naturwissenschaftler

Schwierigkeiten scheint es auch hier keine zu geben, denn der gesunde Menschenverstand hält diesen Schluß für richtig. In Wirklichkeit ist er jedoch falsch. Wenn sich das nachweisen läßt, dann stimmen Gefühl und Logik nicht immer überein. Aber was soll denn hier falsch sein? Wir wollen das im Zeitlupentempo untersuchen.

Der erste Satz muß als wahr angenommen werden, er wird vermutlich auf der allgemeinen Kongreßeinladung stehen. Möglicherweise ist der zweite Satz im Rundschreiben zu finden, das der Präsident der Biologen seinen Kollegen zukommen läßt. Schließlich wissen wir schon längst, daß alle Biologen Naturwissenschaftler sind. Wo bleibt denn der Fehler?

Der Logiker würde dies alles nicht bestreiten; er will mit seinem Einwand nur besagen, der dritte Satz folge nicht aus den beiden ersten. Ob er nämlich folgt oder nicht, darüber entscheidet nicht unsere Einsicht, sondern die Form. Die Form ist hier bestimmt durch die Verteilung der drei Begriffe: Naturwissenschaftler, teilnahmeberechtigt und Biologe. Wir können die Form auf folgende Weise andeuten:

(3a)	Alle	△	sind ○
	Alle	□	sind ○
	Also alle	□	sind △

Von einer gültigen Form verlangen wir, daß sie gültig bleibt unter jeder Einsetzung der entsprechenden Kategorie. Versuchen wir die Formen von (3a) durch folgende Worte auszutauschen:

△	□	○
Knaben,	Mädchen,	fröhlich

Eingesetzt erhalten wir:

(3b) Alle Knaben sind fröhlich
Alle Mädchen sind fröhlich
Also sind alle Mädchen Knaben

Niemand wird diesen Schluß als gültig anerkennen, weil auch in einer emanzipierten Welt ein Unterschied zwischen Mädchen und Knaben bestehen bleibt.

Wenn wir uns die Form von (3b) genauer ansehen, dann stellen wir fest: sie ist identisch mit der Form (3a), aus deren Einsetzung sie entstanden ist, und überdies mit der Form des Beispieles (3). können wir (3) und (3b) einander gegenüberstellen und daraus ersehen, daß (3) ein raffiniert gewähltes Beispiel ist, aus dem sich rein zufällig nicht der gleiche Unsinn ergibt wie aus (3b). Die Logik möchte nur jene Formen anerkennen, die immer gültig sind. Das trifft zu für jene, die im Beispiel (1) verwendet wird. Nur müssen wir dann auch das Beispiel (2) anerkennen, weil dort die gleiche Form vorliegt.

0.2 Wahrheit und Gültigkeit

Es taucht eine neue Schwierigkeit auf. Wenn wir das gleiche Formelspiel der geometrischen Figuren auf die Beispiele (1) und (2) übertragen, dann stellen wir fest, daß die beiden tatsächlich identisch sind. Nun haben wir aber (1) als richtig erkannt, während bei (2) etwas nicht stimmt. Wozu soll die Logik tauglich sein, wenn sie nicht einmal zwischen (1) und (2) zu unterscheiden vermag?

Es wurde ein wesentlicher Bestandteil bisher nicht berücksichtigt, die Wahrheit. Unter Wahrheit verstehen wir, daß das, was z.B. in den Prämissen behauptet wird, auch tatsächlich zutrifft. Für das Auffinden oder Beurteilen dieser Wahrheit ist der Logiker nicht zuständig. Er holt sich die nötige Auskunft beim entsprechenden Fachmann oder aus dem Alltagswissen. Wird dem Logiker eine Einzelinformation vorgelegt aus einem Gebiet, in dem er über kein Zusatzwissen verfügt, dann ist er unfähig zu entscheiden, ob die Angabe wahr oder falsch ist. Der Logiker vermag also nicht eine Einzelaussage zu prüfen, sondern nur die Form bei der Verknüpfung mehrerer Aussagen.

Aber ist denn überhaupt jemand an der Form interessiert? Haben wir es nicht auf die Wahrheit abgesehen? Gewiß ist die Wahrheit das einzige Ziel. Leider ist es häufig nicht auf direktem Weg erreichbar. Die Wahrheit kann nicht immer durch unmittelbare Wahrnehmung erfaßt werden, wie etwa bei der Tatsache, daß zwei Zeitungen auf meinem Pult liegen. Sehen wir uns einen Fall an, in dem die Wahrheit erschlossen werden muß.

Mein Freund behauptet, am Montag sei der Nachbar zu spät zur Arbeit gekommen. Die beiden sind jedoch in verschiedenen Betrieben tätig, also kann es sich nicht um unmittelbar geschaute Wahrheit handeln. Auf die Frage an meinen Freund, wie er zu seiner Vermutung komme, antwortet er: „Als ich am letzten Montag im hintersten Wagen des abgehenden Zuges saß, da kam der Nachbar im Eilschritt um die Häuserecke und fuchtelte ärgerlich mit den Händen in der Luft herum, als er nur noch die Schlußlichter unseres Zuges sah. Da der nächste Zug erst in einer halben Stunde fährt, ein Taxi im Stoßverkehr aber mehr als eine halbe Stunde braucht, läßt sich mit dem gesunden Menschenverstand entnehmen: Also kam er mindestens eine halbe Stunde zu spät“.

Was mein Freund dem gesunden Menschenverstand zuschreibt, ist durchaus nicht sichtbar; er hat es erschlossen aus einigen Vorkommnissen, die er gesehen hatte, zusammen mit anderen Dingen, die er weiß.

Im Alltag wie in der Wissenschaft wird sehr oft geschlossen. Dabei hängt die Wahrheit nicht nur von dem ab, was ich gesehen habe und was ich weiß, sondern auch von der Schlußform. Wird die Form richtig eingehalten, so sagen wir, der Schluß sei gültig oder korrekt, im andern Fall ungültig oder unkorrekt. Wir sind jedoch primär nicht an gültigen, sondern an wahren Schlüssen interessiert. Wann ist ein Schluß wahr? Dazu muß er zwei Bedingungen erfüllen: Erstens, die Prämissen müssen wahr und zweitens die Schlußform muß gültig sein. Damit kennen wir den grundlegenden Unterschied zwischen Gültigkeit und Wahrheit:

Gültigkeit: die Form ist korrekt
Wahrheit: die Prämissen sind wahr und die Form ist korrekt

Mit dieser Erkenntnis können wir nochmals auf die Beispiele (1) und (2) zurückkommen. Beide haben dieselbe gültige Form. Warum die Form gültig ist, das werden wir freilich erst im Lauf unserer Arbeit zeigen können. Was uns am Beispiel (2) stört, das hat nichts mit der Gültigkeit zu tun, sondern mit der Wahrheit der ersten Prämisse: „Alle Pferde sind weiß" ist eine unwahre Behauptung. Für die Beurteilung der Wahrheit in den Prämissen ist die Logik nicht zuständig. Sie vermag auch nicht im nachhinein erkenntnistheoretische Irrtümer oder Fehlbeobachtungen zu korrigieren. Nur indirekt kann sie darauf aufmerksam machen, indem sie etwa zeigt, daß einem Ding widersprüchliche Eigenschaften zugeschrieben werden.

Das soll uns jedoch wieder nicht dazu verleiten, die Nützlichkeit korrekter Schlüsse zu unterschätzen. Das Beispiel (3) zeigt uns, daß der Mensch leichthin vorgibt, von Natur aus über die logisch korrekten Schlüsse zu verfügen. In Wirklichkeit durchschaut er bestenfalls die Widerspruchsfreiheit der einzelnen Sätze. Wäre uns das unfehlbare Schließen angeboren, so könnten wir uns den mühsamen Umweg einer Kontrolle über die Logik ersparen. Wie die Erfahrung lehrt, versagt jedoch das Naturtalent häufig schon in einfachsten Fällen, indem eine erwünschte Konklusion voreilig als Beweis für die Korrektheit des Schlusses angesehen wird.

Zuerst werden einige Begriffe der Mengenlehre erklärt. Wer Elementarkenntnisse auf diesem Gebiet mitbringt, der mag gleich zum 2. Kapitel übergehen und sich der Aussagenlogik zuwenden.

1. Einige Grundbegriffe der naiven Mengenlehre

Mengenlehre ist uns vor allem als umstrittenes mathematisches Schulfach bekannt. In diesem Streit ist der kühle Verstand soweit erhitzt worden, daß der Gedanke kaum mehr erwogen wird, es könnte sich möglicherweise um ein allgemeines Gebiet handeln, das nur noch wenig mit dem traditionellen Verständnis der unbeliebten Mathematik zu tun hat. Auf jeden Fall befaßt sich die Mengenlehre mit Beziehungen. Außerhalb der Mathematik sind Beziehungen nicht weniger bedeutsam, seien es solche zwischen den Mitgliedern eines Schachklubs, zwischen mir und meinem Papagei oder zwischen Stimmbürger und Staat. Natürlich werden diese Beziehungen nicht ausgeschöpft durch mengentheoretische Angaben, sowenig wie mit „100 Dollar" ein bestimmter Geldbetrag erschöpfend beschrieben ist.

Mengenlehre ist eine allgemeine Grunddisziplin, deren Erforschung die Philosophen zu Unrecht fast gänzlich den Mathematikern überlassen haben. Dadurch haben sie versäumt, Kenntnis davon zu nehmen, wie sich zahlreiche traditionelle Fragen unter veränderten Gesichtspunkten gewandelt haben. Wir möchten jedoch nicht jenen zahlreichen philosophischen Problemen nachgehen, die durch die Entdeckung der Mengenlehre eine neue Fragestellung erfahren haben. Es sollen nur einige elementare Grundbegriffe dargestellt werden, soweit sie unmittelbar das Verständnis für die Logik fördern. Daß diese Kenntnisse nebenbei zu vertiefter Einsicht in Sprache und Mathematik führen kann, das ist ein erfreulicher Nebeneffekt.

Als Begründer der Mengenlehre ist Georg Cantor (1845–1918) anzusehen. 1874 erschien seine erste Abhandlung zur Mengenlehre. Im Verlauf von etwas mehr als 20 Jahren sind die grundlegenden Publikationen erschienen. Damit ist der Einfluß von Cantor auf die Mathematik vergleichbar mit der Entdeckung der Irrationalzahlen in der Antike oder der Infinitesimalrechnung in der Neuzeit. Die von den Mathematikern anfänglich vorgebrachten

Einwände gegen die Mengenlehre waren wesentlich philosophischer Natur. Der Hauptvorwurf lautete, Mengenlehre sei Mystik. Zu diesem unzutreffenden Bild kamen die Mathematiker, weil sie sich eine ziemlich abgeschlossene Meinung darüber gemacht hatten, was Mathematik sein mußte. Doch die Darstellungen von Cantor haben die Fachleute in relativ kurzer Zeit überzeugt. 1887 wurden die Begriffe auf dem internationalen Mathematikerkongreß anerkannt.

Zuerst noch zwei terminologische Vorbemerkungen: Erstens wird im Zusammenhang mit der Mengenlehre „naiv“ nicht abwertend verstanden; es ist ein Fachausdruck, der besagt, der Aufbau sei nicht streng, nicht axiomatisch durchgeführt, sondern mehr anschaulich. Zweitens wird anstelle von „Menge“ unterschiedslos „Klasse“ gebraucht. Da die beiden Wörter als Synonyme gelten sollen, kann jederzeit „Mengenlehre“ gegen „Klassenlogik“ ausgetauscht werden. Und schließlich bleibt noch beizufügen, daß die benutzten Zeichnungen keine Beweise sind; sie sollen bloß durch ihre Anschaulichkeit das Verständnis erleichtern.

1.0 Definition und Vergleich von Mengen

In der Mengenlehre wird fortwährend von Mengen und Elementen gesprochen. Man könnte sich das Verhältnis dieser beiden Begriffe an einem vertrauteren Zusammenhang verdeutlichen, nämlich am Ganzen und an den Teilen. Menge und Element verhalten sich ungefähr wie das Ganze zu den Teilen. Wichtig ist dabei das *ungefähr*. Die Abweichung besteht darin, daß es uns gelingen wird, von Mengen und Elementen präziser zu reden als vom Ganzen und den Teilen.

Zuerst erwarten wir eine Definition für Menge und Element. Im traditionellen Sinn können diese Begriffe jedoch nicht definiert werden; sie werden als Grundbegriffe eingeführt. Das ist nichts Ausgefallenes, denn in jedem Zweig der Wissenschaften gibt es einige Grundbegriffe, die so fundamental sind, daß sie nicht definiert werden können. So hat auch die Geometrie „Punkt“, „Gerade“ usw. als undefinierte Begriffe eingeführt. Euklid sagt zwar, der Punkt sei „das, was keine Teile hat". Aber das ist bloß eine Beschreibung, die an die Phantasie appelliert. In diesem Sinn legt auch Cantor eine Definition der Menge vor, wenn er sagt, sie sei „eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen". Das ist bei weitem keine strenge Definition, eher eine Paraphrase, die inhaltliche Vorstellungen erzeugt und uns zu verstehen geben möchte, daß eine ähnliche Situation vorliegt, wie etwa in der Aufzählung: Beine, Arme, Ohren, Nase sind Teile des Menschen. Freilich ist die cantorsche Übersicht insofern präziser, als sich aus den in ihr enthaltenen vier Punkten ein ausreichendes Verständnis für den Mengenbegriff gewinnen läßt. Es genügt, den vier Eigenschaften, die Cantor aufzählt, nachzugehen.

1) Zusammenfassung zu einem Ganzen
2) Objekte der Anschauung
3) Objekte des Denkens
4) bestimmte, wohlunterschiedene Objekte

1) Zusammenfassung zu einem Ganzen: Eine Zusammenfassung zu einem Ganzen liegt vor, wenn ich Eier in einen Korb lege. Was so gesammelt wird, das kann nachher weggetragen werden. Ich darf aber auch das Hausdach als das Ganze der Ziegel auffassen. Doch bevor ich die Eier in den Korb gelegt oder die fehlenden Ziegel auf dem Dach ersetzt habe, ist in mir der Plan gereift, eine dieser Tätigkeiten auszuführen. So habe ich gedankenmäßig im voraus vorgestellte Eier in einen vorgestellten Korb gelegt. Darin liegt nichts Erstaunliches. Eine Handlung wird meistens zuerst überlegt. Überlegen bedeutet hier, sie vor dem geistigen Auge ablaufen zu lassen. Dabei lassen sich nicht nur materielle Dinge zu einem materiellen Haufen zusammenfassen, sondern auch geistige Dinge zu einem geistigen Ganzen. Das Ganze heißt die Menge und die Einzeldinge Elemente.

2) Objekte der Anschauung: Die Elemente, die zu einem Ganzen, zu einer Menge zusammengefügt werden, das können Eier oder Ziegel sein, aber auch Menschen, Flugzeuge, Berge usw. Während Eier und Ziegel in einen Korb gelegt werden können, ist das selbstverständlich für Berge nicht mehr möglich. Doch kön-

nen sie durch bloßes Aufzählen geistig zusammengefaßt werden: Eiger, Mönch und Jungfrau als bekannteste Berggruppe des Berner Oberlandes bilden in unserem Sinn eine Menge mit drei Elementen. Es sind Objekte der Anschauung.

3) Objekte des Denkens: Berge lassen sich nicht leicht verschieben. Deshalb können sie nicht materiell, sondern nur in Gedanken zu Mengen zusammengefaßt werden. Gedanklich kann ich sehr schnell und phantasievoll Mengen bilden. So mag eine Menge aus den folgenden zwei Elementen bestehen: Aus einem Engel und dem Gedanken, den Churchill hatte, als er seine erste Zigarre anzündete. Ein Engel ist nicht sichtbar, auch die Gedanken von Churchill nicht. Beides sind Objekte des Denkens.

4) Bestimmte, wohlunterschiedene Objekte: Für die Zusammenfassung zu einer Menge wird von den Elementen weder verlangt, daß sie materiell sind noch daß sie geistig sind; aber sie müssen bestimmt und wohlunterschieden sein. Das besagt, es muß genau abgrenzbar sein, was noch zum Element gehört. Ein Ei ist ziemlich klar abgegrenzt durch die Schale, und ich kann auch deutlich erkennen, ob es im Korb oder außerhalb liegt. Wenn ich aber als Element die Farbe Grün habe, dann können Zweifel entstehen, ob ein bestimmtes Kleid noch darunter fällt oder ob es bereits blau sei. Die Forderung nach klarer Unterscheidbarkeit stellt sich beispielsweise auch für Wünsche. Ein Wunsch ist ein geistiges Gebilde, ein Objekt des Denkens und kann laut 3) ebenfalls als Element dienen. Doch muß auch hier wieder die Fähigkeit vorausgesetzt werden, daß man entscheiden kann, ob es sich noch um den gleichen Wunsch oder bereits um einen zweiten handelt.

In der Definition enthalten, wenn auch nicht explizit ausgesprochen, ist die Erlaubnis, Elemente verschiedener Objektbereiche, nämlich aus 2) und 3) zu einer Menge zusammenzufassen. Eine Menge kann deshalb aus den beiden Elementen „Apfel“ und „7“ bestehen.

Der Mengenbegriff von Cantor deckt sich nicht vollständig mit dem alltäglichen Sprachgebrauch, wo von einer „Menge“ Menschen auf der Straße die Rede ist oder von einer „Menge“ Arbeit, die auf mich wartet. Hier steht „Menge“ als Synonym zu „viel“, vielleicht auch zu „relativ viel“. „Viel“ ist jedoch keine Menge, weil nicht genau bekannt ist, wie viele Elemente darin enthalten sind. Ebensowenig bilden die „guten Politiker“ eine Menge, solange nicht präzisiert ist, was unter „gut“ zu verstehen ist.

1.0.1 Abkürzungen, Gleichheiten und Arten von Mengen

Eine Menge bestehe aus den drei Elementen: Nelke, Ferienprojekt, Tonika. Zur Bezeichnung der Mengen wählen wir große Buchstaben, für die Elemente kleine. Die Elemente werden in geschweifte Klammern gesetzt.

$$M = \{n, f, t\}$$

Sobald wir es mit Mengen zu tun haben, deren Elementenzahl 26 überschreitet, gelangen wir mit der Benennung in Schwierigkeiten, weil der Vorrat des Alphabetes aufgebraucht ist. Wir wollen uns zwar nicht mit so großen Mengen herumschlagen, doch dürfen wir uns den Weg dazu nicht einschränken lassen, falls wir aus irgend einem Grund eben doch mal eine ganz große Menge etwas genauer untersuchen möchten. Deshalb wählen wir Zahlen anstelle der Buchstaben. Wir geben den Elementen Zahlennamen, am besten dem ersten Element den Namen „1“, dem zweiten den Namen „2“ usw. Dann kann die Menge mit den Elementen Nelke, Ferienprojekt und Tonika so geschrieben werden:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

Zu beachten ist, daß die Zahlennamen hier nur eine Ordnungsfunktion haben. Es darf nicht gefolgert werden, das Ferienprojekt sei doppelt so angenehm wie eine Nelke. Es liegt dieselbe Ordnungsfunktion vor, wie bei der Numerierung von Theaterplätzen, wo Platz Nr. 24 nicht besagt, der Platz sei viermal besser als der Platz 6, ja nicht einmal, es seien 23 Plätze besetzt.

Da die Elemente genau unterscheidbar sind, kann deutlich angegeben werden, ob ein bestimmtes Element a zur Menge M gehört, was so geschrieben wird:

$$a \in M$$

oder ob es nicht dazu gehört:

$a \notin M$

Gegeben sei: M: Klasse der Menschen
a: Alfred
f: das Pferd Fortezza

Dann bedeutet: $a \in M$: „Alfred gehört zur Klasse der Menschen", oder vertrauter: „Alfred ist ein Mensch". Analog dazu besagt: $f \notin M$: „Das Pferd Fortezza ist kein Element der Menge M", oder: „Fortezza ist kein Mensch".

Wenn zwei Klassen A und B dieselben Elemente enthalten, dann schreiben wir: $A = B$. Die beiden Mengen sind äquivalent.

Beispiel: R: alle rechtwinkligen, gleichseitigen Rechtecke
Q: alle Quadrate
Es gilt: $R = Q$

Wir sehen auch, daß

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

äquivalent ist, aber auch bei

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$$

soll die Äquivalenz gelten. Die Definition über die Gleichheit oder Äquivalenz von Mengen sagt nichts aus über die Reihenfolge der aufgezählten Elemente. Schließlich soll auch

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

äquivalent sein, denn jedes Element wird nur einmal gezählt.

Nun gibt es verschiedene Arten von Mengen, von denen uns einige noch nicht bekannt sind. Dazu Beispiele:

$M_1 = \{$Alle Buchstaben des Lukasevangelium$\}$
$M_2 = \{$Alle Schuhe, die ich durchlaufen habe$\}$
$M_3 = \{$Die Namen der englischen Königinnen$\}$
$M_4 = \{$Alle Primzahlen$\}$
$M_5 = \{$Die Löwendenkmäler in Luzern$\}$
$M_6 = \{$Die Schaltjahre zwischen 1985–1987$\}$

An die Art der ersten drei Mengen haben wir uns inzwischen gewöhnt. Natürlich muß vorausgesetzt werden, daß die Forderung 4) überall erfüllt ist, daß ich also genau weiß, um welchen Text des Lukasevangeliums es sich handelt. M_2 erfüllt die Forderung 4) nur dann, wenn meine Mutter ein genaues Verzeichnis aller durchlaufenen Schuhe führt oder wenn auf einem andern Weg eindeutig entscheidbar ist, wie viele es sind. M_3 kann mit Hilfe eines Geschichtsbuches ausfindig gemacht werden.

Hingegen scheinen die Mengen M_4, M_5 und M_6 etwas problematisch zu sein. M_4 ist eine Menge mit einer unendlichen Anzahl von Elementen; da es in Luzern ein einziges Löwendenkmal gibt, hat M_5 genau ein Element und die M_6 hat überhaupt keines. M_6 ist leer. Solche Mengen sollen zugelassen werden, obwohl sie unserem Empfinden ungewohnt erscheinen mögen. Sie kommen uns seltsam vor, weil die Alltagssprache unendliche Mengen nicht berücksichtigt und Mengen mit einem einzigen Element nicht Mengen nennt. Die deutlichste Abweichung finden wir bei der Menge M_6, bei der leeren Menge. Statt uns darüber zu wundern, führen wir für sie einen eigenen Namen ein und schreiben sie so: $\emptyset$ oder auch $\{ \}$

Der Begriff der leeren Menge ist eine äußerst praktische Erfindung. Denn damit kann man über Mengen korrekt sprechen, ohne daß zum vornherein entschieden sein muß, ob es solche Dinge gibt oder nicht. Die philosophischen Konsequenzen, die sich daraus ergeben, werden uns später noch beschäftigen.

Die Mengen M_5 und M_6 lassen sich so schreiben:

$$M_5 = \{\text{Löwendenkmal}\} \quad \text{oder} \quad M_5 = \{1\}$$
$$M_6 = \emptyset \quad \text{oder} \quad M_6 = \{ \}$$

Übung 1.0.1

1) Übersetzen Sie die folgenden Ausdrücke in die Schreibweise der Mengenlehre:
   1. Meine Onkeln und Tanten
   2. Die heute im Amt befindlichen Präsidenten von Amerika
   3. Die Könige der Schweiz
   4. Die ehrlichen Redner der UNO

2) Welche Mengen sind äquivalent?

1. $\{1, 2\} = \{$Anzahl natürlicher Erdmonde$\}$
2. $\{$Cantor$\} = \{$Begründer der Mengenlehre$\}$
3. $\{47\} = \{$größte Primzahl zwischen 1–50$\}$
4. $\{126\} = \{$Seiten des Neuen Brockhaus, Bd. 1$\}$

1.0.2 Teilmengen oder Potenzmengen

Eine Menge A heißt Teilmenge oder Untermenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Das wird so geschrieben: $A \subset B$. Nach dieser Erklärung ist jede Menge Teilmenge von sich selber. Damit weicht die mathematische Terminologie einmal mehr vom alltäglichen Sprachgebrauch ab. Diese Abweichung hat unter anderem zur Folge, daß der Jahrhunderte alte Satz, der Teil sei stets kleiner als das Ganze, nicht mehr als absolut gültig angenommen werden muß.

A heißt eine echte Teilmenge von B, wenn B wenigstens ein Element mehr enthält als A. Die echte Teilmenge wird so geschrieben: $A \subseteq B$. Stimmt die Teilmenge mit der Grundmenge überein, so heißt sie unechte Teilmenge. Sie stimmt mit ihr dann überein, wenn sie die gleichen Elemente enthält wie die Teilmenge.

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$
$$C = \{1, 2\}$$

Dann ist A eine echte Teilmenge von B. Ebenfalls ist C eine echte Teilmenge von B. Hingegen ist A eine unechte Teilmenge von C.

Nun stellen wir uns die Frage, wie die Teilmengen einer Menge aufzufinden sind. Gegeben sei eine Menge M mit drei Elementen a, b, c, also $M = \{a, b, c\}$. Wenn diese Menge M ebenfalls 3 Teilmengen besäße, dann wären die Begriffe Teilmenge und Element identisch. Die beiden gelten jedoch nicht als synonym. Wie läßt sich ihre gegenseitige Beziehung präzisieren?

Während die Elemente in den geschweiften Klammern direkt ab-

gezählt werden können, muß die Anzahl der Teilmengen berechnet werden. Das Verfahren wird uns durch einen andern Namen nahegelegt. Anstelle von Teilmengen spricht man auch von Potenzmengen. Zur Berechnung der Teilmengen geht man so vor, daß zuerst die Elemente abgezählt werden; die so erhaltene Zahl wird als Potenz von 2 geschrieben, also:
$2^{\text{Anzahl Elemente}}$ = Teilmengen. Bei der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ haben wir 5 Elemente, folglich 2^5 Teilmengen. Entsprechend kommen wir bei 23 Elementen auf 2^{23} Teilmengen und bei n Elementen auf 2^n Teilmengen. Die Potenz- oder Teilmenge von M schreiben wir P (M). Wir zeigen, daß die Mengen mit 0 bis 3 Elementen 2^0 bis 2^3 Teilmengen enthalten, wobei die entsprechenden Teilmengen aufgezählt werden.

Elemente	Teilmengen	
$A = \{\ \}$	$P(A) = \{\emptyset\}$	$2^0 = 1$
$B = \{a\}$	$P(B) = \{\{a\}, \emptyset\}$	$2^1 = 2$
$C = \{a, b\}$	$P(C) = \{\{a\}, \{b\}, \{ab\}, \emptyset\}$	$2^2 = 4$
$D = \{a, b, c\}$	$P(D) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ab\}, \{bc\}, \{ac\}, \{abc\}, \emptyset\}$	$2^3 = 8$

Als ungewohnt fallen uns zwei Mengen auf. Jede Menge ist eine (unechte) Teilmenge von sich selber, und die leere Menge ist eine echte Teilmenge einer jeden Menge. Deshalb gelten immer

$$M \subseteq M \quad \text{und} \quad \emptyset \subset M$$

Es sind dies die beiden Mengen, die bei der Aufzählung der Teilmengen am leichtesten übersehen werden.

Übung 1.0.2

Gegeben seien die drei Mengen:

$A = \{\text{Sieb}\}$
$B = \{\text{Eis, Musik, Ida}\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1. Wie viele Elemente hat die Menge A?
2. Ist „Sie“ eine Teilmenge von A?

3. Ist „Akkord“ eine Teilmenge von B?
4. Wieviel Elemente hat die Menge C?
5. Geben Sie die Teilmengen von A an
6. Geben Sie die Teilmengen von B an
7. Geben Sie die Teilmengen von C an

Diese Überlegungen gehen über mathematische Spielereien hinaus. Deshalb wollen wir zwei Punkte daraus noch etwas eingehender betrachten. Der erste betrifft das Verhältnis zwischen Teilmenge und Elementbeziehung ($\subset$, $\in$), der zweite den Unterschied zwischen Null und der leeren Menge ($0, \emptyset$).

1.0.2.1 Inklusion und Elementbeziehung

Die Teilmengenbeziehung wird auch Inklusion genannt. Dieser Name empfiehlt sich, weil er die Gefahr vermindert, den höchst bedeutsamen Unterschied zur Elementbeziehung zu übersehen. In der Umgangssprache werden beide unterschiedslos mit „ist“ wiedergegeben.

(1) Alfred ist Lehrer

Hier besagt das „ist“, daß ein Gegenstand, nämlich Alfred, unter einen Begriff fällt. Wir sagen einfacher: „Alfred ist ein Element der Klasse Lehrer“ und schreiben diese Aussage so: $a \in L$.

(2) Die Schwalbe ist ein Vogel

In dieser Aussage (2) geht es nicht darum, eine bestimmte Schwalbe wiederum als Gegenstand zur Klasse der Vögel zu zählen. Obgleich der bestimmte Artikel verwendet wird (die Schwalbe), ist sinngemäß nicht eine einzelne Schwalbe gemeint, sondern die ganze Schwalbenklasse. Das „ist“ bedeutet demnach, daß die Klasse der Schwalben in der Klasse der Vögel eingeschlossen ist.

Der Unterschied zwischen Elementbeziehung und Inklusion besteht darin, daß im ersten Fall eine Beziehung von einem oder mehreren Gegenständen zu Klassen ausgesprochen wird, im andern Fall eine Beziehung von Klassen zu Klassen.

Die beiden „ist“ haben unterschiedliche Eigenschaften, die sich logisch exakt beschreiben lassen. Die Inklusion ist nämlich transitiv, nicht aber die Elementbeziehung. Was Transitivität bedeutet, das wird später ausführlich erklärt. Vorderhand mag die Andeutung anhand zweier Beispiele genügen.

A ist größer als B	„größer als" ist transitiv
B ist größer als C	
Also ist A größer als C .	

A ist Vater von B	„Vater sein von" ist nicht transitiv
B ist Vater von C	
Also ist A nicht Vater von C	

Zunächst wollen wir das Verhältnis zwischen Elementbeziehung und Inklusion noch etwas vertiefen. Das sei an zwei Mengen F und G gezeigt.

$$F = \{2, 4, 6\}$$
$$G = \{3, \{2, 4, 6\}\}$$

Die Menge F enthält 3 Elemente, folglich $2^3 = 8$ Teilmengen. Die Menge G enthält jedoch nur 2 Elemente, wovon freilich eines selber eine Menge ist. Also $2^2 = 4$ Teilmengen.

Übung 1.0.2.1

1) Zählen Sie die Elemente und die Teilmengen von F und G auf.

An dieser Aufzählung können Sie unmittelbar ablesen:

Für die Menge

$F = \{2, 4, 6\}$ gilt: $2 \in F$; $4 \in F$; und $\{2\} \subset F$; $\{4\} \subset F$
hingegen: $2 \not\subset F$; $4 \not\subset F$;

Für die Menge

$G = \{3, \{2, 4, 6\}\}$ gilt: $3 \in G$; $\{2, 4, 6\} \in G$; und $\{3\} \notin G$;
hingegen: $3 \not\subset G$; $\{2\} \not\subset G$

Nun können wir uns die Transitivität der Inklusion verdeutlichen. Gegeben seien die beiden Mengen

$$H = \{1, 2\}$$
$$I = \{1, 2, 3\}$$

Dann gilt: Wenn $\{2\} \subset H$ ist und $H \subset I$, dann ist auch $\{2\} \subset I$. Demgegenüber ist die Elementbeziehung nicht transitiv. Gegeben seien die beiden Mengen

$$H = \{1, 2\}$$
$$K = \{7, 9, \{1, 2\}\}$$

Wenn nun $2 \in H$ ist und $H \in K$, dann braucht 2 nicht ein Element von K zu sein, was es in diesem Beispiel tatsächlich auch nicht ist.

An einem falschen Syllogismus lassen sich diese Beziehungen philosophisch verwerten:

Menschen sind zahlreich
Sokrates ist ein Mensch
Also ist Sokrates zahlreich

Hier fällt uns die Mehrdeutigkeit des Wortes „ist" auf. In der ersten Prämisse wird „ist" im Sinne der Inklusion aufgefaßt, in der zweiten als Elementbeziehung. Wenn wir die Prämissen korrekt formalisieren, dann erkennen wir sofort, daß ein Schluß unerlaubt ist, weil wir es nicht mit zwei Inklusionen zu tun haben

$$M \subset Z$$
$$S \in M$$

Es folgt

$$S \notin Z$$

Wir können die Ursache des Fehlschlusses auch anders formulieren: Der Mittelterm „Mensch" ist zweideutig. In der 1. Prämisse ist er als Klasse einer Menge – d.h. Menge einer Menge oder Klasse einer Klasse – aufgefaßt, in der 2. hingegen als gewöhnliche Menge. Deshalb läßt sich der gleiche Syllogismus auch so formalisieren:

$$\{M\} \in Z$$
$$S \in M$$

Also $S \notin Z$

Wir haben es hier mit zwei Mengen zu tun, die genauer zu unter-

scheiden sind, die Menge der Menschen und die Menge der Zahlreichen.
Die Menge oder Klasse der Menschen enthält Individuen.

$$M = \{\text{Albert, Brigitte, Claudia} \ldots\}$$

Deshalb läßt sich in aller Strenge behaupten: Sokrates ist ein Mensch, Brigitte ist ein Mensch usw. Man sagt auch, die Individuen fallen unter den Begriff Mensch.

Anders bei der Menge der Zahlreichen. „Zahlreich" ist ein Begriff; seine Elemente sind nicht Individuen, sondern selber Klassen. Wir nennen nicht den Sand zahlreich oder das Wasser; der Sand ist körnig, das Wasser durchsichtig usw. Aber was ist denn zahlreich? Unter zahlreich fassen wir alle Klassen zusammen, die mehrere Elemente enthalten können, also:

$$Z = \{\{\text{Sandkörner}\}, \{\text{Wassertropfen}\}, \{\text{Bücher}\}, \ldots \{\text{Menschen}\}\}$$

Hier fallen nicht mehr Individuen unter einen Begriff, sondern Begriffe werden einem andern Begriff untergeordnet. Diese äußerst wichtigen Zusammenhänge der Prädikation hat erst Gottlob Frege (1848–1925) systematisch untersucht.

Übung 1.0.2.1

2) Beurteilen sie den folgenden Text

„Die Ist-Verknüpfung unterliegt der Transitivität: wenn A B und B C ist, dann gilt: A ist C: ‚Wenn Pferde Einhufer und Einhufer Wirbeltiere sind, dann sind Pferde Wirbeltiere'. Unter Verwendung des Begriffs ‚Enthalten' kann man also auch sagen: Wenn ein Enthaltenes wieder enthält, ist dieses zweite Enthaltene auch im ersten Enthaltenden." (F. Schmidt, Die symbolisierten Elemente der Leibnizschen Logik. Zeitschrift für Philos. Forschung 20 (1966) 597).

1.0.2.2 Null und leere Menge

Der Unterschied zwischen Null und leerer Menge sei an arithmetischen Beispielen verdeutlicht.

Die Gleichung ‚$3x = 4x$' ist für bestimmte Zahlen erfüllt, die wir die Lösungsmenge nennen. Im vorliegenden Fall schreiben wir die Lösungsmenge so: $\{0\}$. Sie hat also – wenn wir von der Unendlichkeit absehen – ein einziges Element, nämlich 0.

Dagegen ist bei der folgenden Gleichung: ‚$3 + x = 4 + x$' die Lösungsmenge die leere Menge. Die leere Menge hat kein Element. Deshalb ergibt die Lösungsmenge der zweiten Gleichung nicht 0, sondern $\emptyset$, oder was dasselbe ist: $\{\ \}$. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung hat 1 Element, die Zahl 0, die Lösungsmenge der zweiten Gleichung jedoch keines. Verwirrungen können deshalb auftreten, weil in der Umgangssprache beide mit ‚nichts' ausgedrückt werden.

Übung 1.0.2.2

(1) Es regnet und es regnet nicht = 0
(2) $n + (-n) = 0$

Bei (2) sind für „n" beliebige Zahlen einzusetzen. (H.W. Johnstone, The Law of Non-Contradiction. Logique et Analyse 3 (1960) 3–4).

Sind (1) und (2) korrekte Formulierungen?

1.1 Operationen mit Mengen

(1) „Im chemischen Labor sind die Plätze beschränkt. Einigen Studenten macht das Experimentieren Freude, andere ziehen es vor, die Berichte in den Büchern nachzulesen". Dasselbe könnte man auch so ausdrücken:

(2) „Es gibt 32 Laborplätze. 19 Studenten haben Freude am Experimentieren, 7 möchten lieber die Berichte in Büchern nachlesen und 6 wollen sich dazu nicht äußern".

Häufig wird die Ansicht vertreten, die zweite Darstellungsweise sei eine Übersetzung der ersten in Quantitäten. Das ist ein bedauerlicher Irrtum, denn was hier geschehen ist, hat nichts mit einer

Qualitätseinbuße zu tun. Es ist eine Präzisierung. Die Umgangssprache benutzt nur zwei präzise Mengenangaben: einer und alle. Die Zwischenstufen werden mit „einige“, „mehrere“, „viele“, „die meisten“ usw. angegeben. Damit wird vage ausgedrückt, was sich in Zahlen exakt angeben läßt.

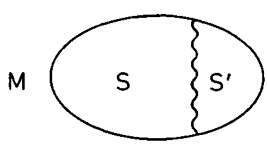
Die Mengenlehre setzt sich zur Aufgabe, Mengen untereinander auf exakte Weise zu vergleichen. Dazu braucht man nicht Zahlen zu benutzen, denn ein präziser Vergleich läßt sich durchführen, sobald die logischen Operationen genau definiert sind. Soweit Zahlen vorkommen, dienen sie nur der Erläuterung. Die Grundoperationen, die hier besprochen werden, stehen der Alltagssprache sehr nahe. Einige der wichtigsten seien kurz aufgezählt.

1.1.1 Das Komplement

Unter dem Komplement oder der Komplementärmenge verstehen wir die Ergänzungsmenge. Da die Ergänzung zu einem Ding aus sämtlichen übrigen Dingen der Anschauung oder des Denkens besteht, könnten wir uns leicht ins Uferlose verlieren. Deshalb schränken wir unsere Rede jeweils auf einen Grundbereich ein.

Als Beispiel bestehe unser Grundbereich aus allen Menschen. Sie lassen sich einteilen nach dem Gesichtspunkt, ob sie am Mittag Suppe essen. Dann bilden jene, die auf die Suppe verzichten das Komplement. Die Menge der Suppenesser wollen wir mit S bezeichnen, das Komplement mit S′. S und S′ bilden zusammen die Menge M des Grundbereiches.

Dieser Sachverhalt läßt sich an einer Zeichnung ablesen



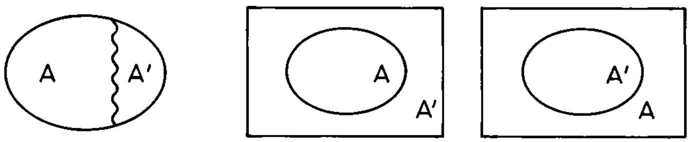
Solche Diagramme werden von Leibniz, Euler und Venn benützt und heißen Eulerkreise oder Venn-Diagramme.

Allgemein gilt: Die Komplementärmenge ist das Komplement oder die Ergänzung zu A, so daß A und A′ zusammen die Menge B ergeben. Drei verschiedene Situationen können entstehen:

1) ist A ein Teil der Menge M, dann ist A′ der ergänzende Teil, so daß A und A′ zusammen die ganze Menge ausmachen.

2) Ist $A = M$, dann ist $A' = \emptyset$

3) Ist $A = \emptyset$, dann ist $A' = M$



1) 2) 3)

Den Grundbereich bezeichnet man mit 1. Dann lassen sich 2) und 3) auch so ausdrücken: Wenn $A = 1$, dann ist $A' = \emptyset$, und wenn $A = \emptyset$, dann ist $A' = 1$.

Übung 1.1.1

1) 1 = {Tonleiter der ganzen Töne}
A = {f, g, a, h}
A′ = ?

2) 1 = {Familie}
B = {Vater}
B′ = ?

3) 1 = {Zweibeiner}
C = {Mensch}
C′ = ?

4) 1 = {Regenbogenfarben}
D = {orange, gelb, grün, blau, indigo, violett}
D′ = ?

5) 1 = {Tiere im Zirkus Knie}
E = ∅
E′ = ?

6) 1 = {Großbritannien}
F = {England, Schottland, Wales}
F′ = ?

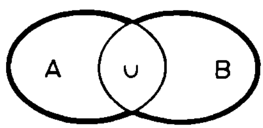
1.1.2 Die Vereinigungsmenge

Die Vereinigung zweier Mengen umfaßt alle Elemente der beiden Mengen. Alle Andalusier mögen in der Menge A zusammengefaßt werden, alle Männer, die Bariton singen in der Menge B. Dann umfaßt die Vereinigungsmenge V von A und B alle Andalusier, alle Baritonsänger und erst recht die andalusischen Baritone. Symbolisch schreiben wir

$$V = A \cup B \text{ (sprich: „A zu B" oder „A vereinigt mit B").}$$

Der Funktor „∪" heißt Summator. Mit den Eulerkreisen läßt sich die Vereinigungsmenge von A und B so darstellen:

$V = A \cup B$

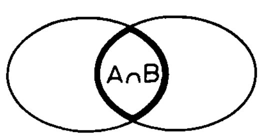


1.1.3 Die Durchschnittsmenge

Unter Durchschnittsmenge – auch Intersektion oder Schnittmenge – von A und B verstehen wir jene Menge, die aus den Elementen besteht, die den beiden Mengen A und B gemeinsam sind. Wenn wir das vorige Beispiel übernehmen, dann gehören zum Durchschnitt I alle Andalusier, die Bariton singen. Wenn alle Andalusier nur Bass, Sopran oder Alt sängen, dann wäre die Durchschnittsmenge die leere Menge. Durchschnitt heißt hier natürlich nicht Mittelbildung.

$I = A \cap B$ (sprich „A mit B" oder „A geschnitten B"). Der Funktor „∩" heißt Produktor. Im Diagramm:

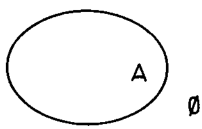
$I = A \cap B$

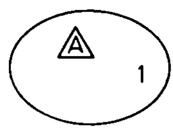


Aus der Definition der Vereinigung und dem Durchschnitt ergeben sich folgende Überlegungen: Für jede beliebige Menge A gilt:

$$A \cup A' = 1$$
$$A \cap A' = \emptyset$$

Ferner lassen sich folgende Zusammenhänge an den Diagrammen ablesen:





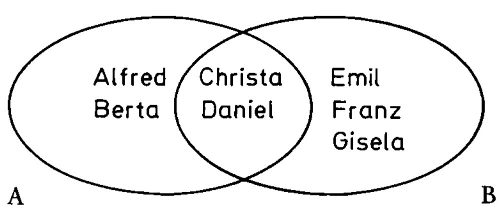
1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cap 1 = 1$
4. $A \cup 1 = 1$

Die Ähnlichkeit mit der traditionellen Arithmetik ist bemerkenswert; die Parallele bricht erst ab bei der Gegenüberstellung von 4. und 4a).

1a) $a \cdot 0 = 0$ 3a) $a \cdot 1 = a$
2a) $a + 0 = a$ 4a) $a + 1 = a + 1$

Übung 1.1.3

Gegeben sind die beiden Mengen A und B



1) Welche Behauptungen sind richtig?
1. Alfred ist ein Element von $A \cup B$
2. Alfred ist ein Element von $A \cap B$.

3. $A \cap B = 4$ Elemente.
4. $\{$Berta, Daniel$\} \subset (A \cup B)$
5. $\{$Christa$\} \in (A \cup B)$
6. $\{\{$Gisela$\}\} \subset (A \cup B)$
7. $\{$Gisela$\} \subset (A \cup B)$

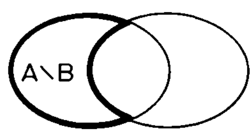
2) Zählen Sie auf:
1. Die Elemente von $A \cup B$
2. Die Teilmengen von $A \cap B$.

1.1.4 Die Differenzmenge

Unter der Differenzmenge $A \setminus B$ verstehen wir die Menge derjenigen Elemente von A, die nicht zur Menge B gehören. Wenn die Menge A alle Andalusier umfaßt und die Menge B die Baritonsänger, dann bedeutet $A \setminus B$ alle Andalusier abzüglich der Baritonsänger. Symbolisch schreiben wir:

$D = A \setminus B$ (sprich: „A ohne B"). Der Funktor „\" heißt Differenziator. Im Diagramm dargestellt:

$D = A \setminus B$



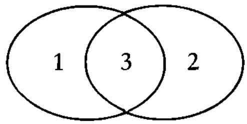
Hier gelten die folgenden Beziehungen für alle Mengen:
ist $B = \emptyset$, dann ist $A \setminus B = A$
Ist $B = A$, dann ist $A \setminus B = \emptyset$

1.2 Die Auswertung

Mit diesen Operationen lassen sich bereits einige elementare Beziehungen überprüfen. Wir wollen dies anhand von zwei und drei Mengen zeigen.

1.2.1 Die Überprüfung zweier Mengen

Zunächst numerieren wir die Felder zweier überschneidender Mengen auf folgende Weise:



Nun können wir für die Buchstaben die entsprechenden Zahlenwerte einsetzen und anschließend die vorgesehenen Operationen ausführen. Dazu einige Beispiele:

Beispiel 1: $A \cup B$

Die Menge A hat zwei Elemente, nämlich 1 und 3. So schreiben wir:

$$A = \{1, 3\}$$

Für B: $B = \{3, 2\}$ oder in der Reihenfolge: $B = \{2, 3\}$

Nun lautet die Aufgabe, A und B zu vereinigen, also $A \cup B$: $\{1, 3\} \cup \{2, 3\}$. Die Vereinigung umfaßt alle Elemente, die sowohl zu A oder zu B gehören, folglich $\{1, 3, 2, 3\}$. Wir ordnen die Elemente und schreiben das zweimal erwähnte Element 3 nur einmal. Dann erhalten wir: $\{1, 2, 3\}$. Unsere Lösung lautet somit:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

Beispiel 2: $A \cap B$

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch für den Durchschnitt zweier Mengen stellen, nämlich für $A \cap B$. Die entsprechenden Zahlenwerte sind wieder den Eulerkreisen zu entnehmen und ergeben eingesetzt: $\{1, 3\} \cap \{2, 3\}$. Der Durchschnitt besteht aus jenen Elementen, die sowohl zur Menge A als auch zur Menge B gehören. 3 ist das einzige Element, das diese Bedingung erfüllt. Daher: $A \cap B = \{3\}$.

Beispiel 3: $A \setminus B$

Schließlich wollen wir noch die Differenz $A \setminus B$ ausrechnen. Wir setzen ein: $\{1, 3\} \setminus \{2, 3\}$. Die Differenz besagt, die Elemente der Menge B sollen von denjenigen aus A abgezogen werden. Wir haben deshalb von der Menge A $\{2, 3\}$ abzuzählen. Da jedoch in der Menge A das Element 2 nicht enthalten ist, bleibt uns nur das Element 3 abzuzählen. Daher erhalten wir: $A \setminus B = \{1\}$.

Beispiel 4: $A \cup B'$

Für A setzen wir wieder ein: $\{1, 3\}$. B' ist das Komplement von B. B ist $\{2, 3\}$, also ist $B' = \{1\}$. Somit lautet unsere Aufgabe: $\{1, 3\} \cup \{1\} = \{1, 3\}$. Der Zeichnung entnehmen wir, daß die Elemente 1 und 3 zusammen genau die Menge A ausmachen. Deshalb dürfen wir schreiben: $\{1, 3\} = A$. Damit haben wir einen komplizierten Ausdruck vereinfacht, da wir nachweisen konnten, daß $A \cup B' = A$ ist. Die vier Zeichen $A \cup B'$ sind durch ein einziges ersetzt worden, durch A. Vereinfachen heißt hier, die Anzahl der Zeichen verringern.

Beispiel 5: $A' \cap B'$

Da $A = \{1, 3\}$ ist und $A' = \{2\}$, $B = \{2,3\}$ und folglich $B' = \{1\}$, so bekommen wir: $\{2\} \cap \{1\} = \emptyset$.

Natürlich kann auch der umgekehrte Weg beschritten werden. $\{1, 2, 3\}$ läßt sich in algebraische Form übersetzen, z. B. als $A \cup B$.

Beispiel 6: $(A \cup B) \cap B'$

Hinsichtlich der Klammern gilt die in der Algebra übliche Regel: Vom Innern der Klammern her auflösen.

1. Schritt: $(A \cup B) = \{1, 2, 3\}$
2. Schritt: $B' = \{1\}$
3. Schritt: $\{1, 2, 3\} \cap \{1\} = \{1\}$

Es wäre unerlaubt, die Klammern zu mißachten und von $B \cap B'$ auszugehen.

Beispiel 7: $A \cup B = B \cup A$

Ist die Kommutativität für die Operation $\cup$ gültig?

$$A \cup B = \{1, 3\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$
$$B \cup A = \{2, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Also ist $A \cup B = B \cup A$, d. h. die Vereinigung ist kommutativ.

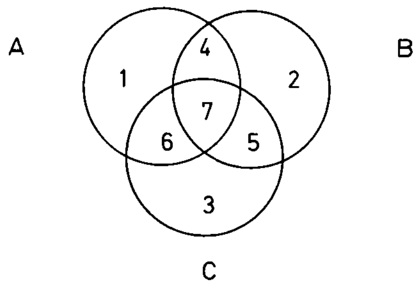
Übung 1.2.1

1) Prüfen Sie die Kommutativität für Durchschnitt und Differenz:
   1. $A \cap B = B \cap A$
   2. $A \setminus B = B \setminus A$
2) Zeigen Sie, daß die Mißachtung der Klammerfolge beim Beispiel 6 zu einem Fehler führt.
3) Beweisen Sie die Gültigkeit der Gesetze von De Morgan:
   1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
   2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
4) Welche der folgenden Gleichungen sind gültig?
   1. $A \cap (A \cup B) = A$
   2. $A \cup (A \cap B) = A$
   3. $(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = 1$
   4. $(A' \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = 1$
5) Drücken Sie die folgenden Mengen in je zwei algebraischen Formeln aus, wobei die eine möglichst kurz sein soll:
   1. $\{3\}$
   2. $\{2\}$
   3. $\{1,2\}$
6) Vereinfachen Sie:
   1. $(A \cup B') \cap (B' \cup A)$
   2. $(A \cap B) \cup (A' \cup B)$
   3. $B \setminus (A \cap B)$
   4. $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
   5. $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$
   6. $((A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B'))$.

1.2.2 Die Überprüfung dreier Mengen

Zur Überprüfung weiterer Gesetzmäßigkeiten, etwa der Assoziativität, benötigen wir eine zusätzliche Menge. Dadurch wird der

Aufwand etwas mühsamer, aber grundsätzlich ändert sich nichts. Anhand der Diagramme erkennen wir, daß eine dritte Menge vier zusätzliche Überschneidungsmöglichkeiten mit sich bringt, was eine neue Numerierung der Felder verlangt.



Wenn wir etwa die Assoziativität prüfen wollen, so steht zur Frage, ob $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ sei oder nicht.

Wir beginnen mit dem linken Klammerausdruck:

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{und}$$
$$C = \{3, 5, 6, 7\}. \quad \text{Die ganze linke Seite ergibt:}$$
$$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Für den rechten Klammerausdruck erhalten wir:

$$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{und}$$
$$A = \{1, 4, 6, 7\}. \quad \text{Dann ergibt die ganze rechte Seite}$$
$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{1, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Die linke Seite des Gleichheitszeichens ergibt gleich viel wie die rechte. Das besagt, daß also $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ist und daß die Vereinigung assoziativ ist.

Übung 1.2.2

1) Wie steht es mit der Assoziativität von Durchschnitt und Differenz?

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

2) Gilt das distributive Gesetz?

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

3) Gilt die Antidistributivität?

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

4) Wieviel gibt in Zahlen ausgedrückt?

1. $A \cup (A' \cap B \cap C)$
2. $(A \cup B') \cap (B' \cup C)$
3. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

5) Vereinfachen Sie

1. $((A \cap A') \cap (B \cup C)) \cup (A \cap B)$
2. $(A \cup B') \cap (A' \cup C) \cap (B \cup C')$

6) Welche der folgenden Gleichungen sind gültig?

1. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (A \cup B)$
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
3. $(B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
4. $(A \cap B) = A \setminus ((A \cup B) \setminus B)$
5. $((A \cup B) \cap C) \setminus B = (B \cup C)'$

7) Drücken Sie algebraisch aus

1. $\{3, 6\}$
2. $\{2, 4\}$
3. $\{2, 4, 5\}$
4. $\{1, 3, 5\}$

8) Gegeben seien die drei Mengen A, B, C:

A = {Mathematik, Physik, Philosophie, Deutsch}

B = {Englisch, Geschichte, Deutsch, Philosophie}
C = {Philosophie, Griechisch, Latein, Französisch}

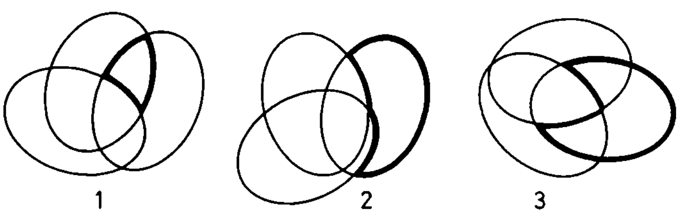
Was bedeuten dann:

1. $(A \cup B) \cap C$
2. $A \cup (B \cup C)$
3. $(A \cup B') \cap C$
4. $A \cap A'$
5. {Philosophie, Deutsch, Griechisch, Latein, Französisch}
6. Vereinfachen Sie: $A \setminus (B \cup C)$

9) Zeichnen Sie

1. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
2. $B \cup (((A \cup (B \cap A)) \setminus A) \cup ((C \cap A) \setminus (A \cap B \cap C))$
3. $((A \cup B)' \cup (A \cap B \cap C))$

10) Drücken Sie die hervorgehobenen Felder algebraisch aus:



11) An einem internationalen Kongreß haben sich Teilnehmer aus den Sprachregionen der ganzen Welt zusammengefunden. Das überträgt sich auf die Kommissionen. In einer solchen Kommission ist ein Sprachengewirr von drei verschiedenen Idiomen zu hören. 8 Teilnehmer reden arabisch, 6 baskisch und 4 chinesisch. Wäre dabei kein Polyglott, so bestünde die Kommission aus 18 Mitgliedern. Nun können sich aber drei arabisch Sprechende auch baskisch unterhalten, zwei baskisch Sprechende chinesisch und ein Mitglied sogar in allen drei Sprachen. Wie viele Teilnehmer hat die Kommission?

2. Die Aussagenlogik

Die Aussagenlogik befaßt sich mit Aussagen. Unter einer Aussage verstehen wir einen Satz, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch sei. Für gewöhnlich stehen die Aussagen im Indikativ. Frage-, Wunsch-, Befehls- oder Ausrufesätze werden nicht als Aussagen angesehen. Das Verhältnis zwischen Sätzen und Aussagen ist so, daß unter den vielen Sätzen nur ein Ausschnitt als Aussagen gilt, nämlich jene, die beschreibend behaupten. Es ist beinahe einfacher aufzuzählen, welche Sätze keine Aussagen sind. Das gilt für die folgenden:

1) Frage-, Wunsch-, Befehlssätze usw.
2) Modalsätze: Sätze mit „möglich", „notwendig", „unbedingt" usw.
3) Nichtwohlformulierte Sätze: Dann und so traf.
4) Sinnlose Sätze: Die Bücher weinen gefiederte Felsen.
5) Aussageformen: Die kluge Hausfrau benutzt x für saubere Wäsche.

Mit den nichtwohlformulierten und den sinnlosen Sätzen können wir gar nichts anfangen. Die Aussageformen hingegen gehen sofort in eine Aussage über, sobald die Variable ‚x' – die Unbekannte – ersetzt wird. Auf die Besonderheiten von 1) gehen wir nicht ein, auf 2) später.

Übung 2

Welche Sätze sind Aussagen? Geben Sie den Grund an für die Nichtaussagen

1. Die Milch ist sauer.
2. Haben Sie 5 Minuten Zeit für mich?
3. Am Samstag ist das „Rössli" immer besetzt.
4. $2 + 2 = 7$.
5. Kauf dir doch einen Volvo!
6. Die Stadt x ist berühmt wegen des Bärengrabens.

7. Er spricht dauernd über die Dollarkrise.
8. 4^2.
9. David besiegte Goliath mit einer Steinschleuder.
10. Vermutlich ist das Dampfschiff.
11. Gut, daß der Regen wieder aufgehört hat!
12. Bis ins 17. Jahrhundert glaubte man an einen Zusammenhang zwischen Mondphasen und Krankheiten.
13. Der Schulanfang ist auf den 15. Oktober angesetzt.
14. Die Waage ist ungenau.
15. Wenn ein Mensch denkt, arbeitet er dann?
16. Es regnet.
17. Es ist unmöglich, aus einer Krähe eine Amsel zu machen.
18. Wir fahren mit der SBB im schönen Schweizerland.

2.1 Die Formalisierung von Aussagen

Da wir fortwährend mit einzelnen Aussagen umgehen, dürfte es vorteilhaft sein, eine Abkürzung zu verabreden, oder wie die Logiker sagen, eine Formalisierung vorzunehmen. Die Mathematiker drücken ihre Unbekannten mit ‚x', ‚y' usw. aus. Analog wählen wir ‚p', ‚q' usw. als Variable. Doch stellen wir mit ‚p', ‚q' usw. nicht Zahlen und auch nicht einzelne Worte dar, sondern ganze Sätze, genauer gesagt: Aussagen. Weil die Buchstaben die Stelle von Aussagen einnehmen, nennen wir sie Aussagenvariable. Liegt eine konkrete Aussage vor, dann mag sie als Konstante durch einen großen Buchstaben symbolisiert werden. Bevorzugt wird der Anfangsbuchstabe des Substantivs, des Verbs oder des Adjektivs. Beispiel:

Der Hahn kräht symbolisch: H

Die Aussage ist also durch ‚H' dargestellt. Die Buchstabenwahl ist belanglos, man hätte ebenso gut ‚K' schreiben können. Wichtig ist, daß jede Aussage durch einen einzigen Buchstaben vertreten wird, mag der sprachliche Ausdruck kurz oder lang sein. Deshalb kann ein harmloses ‚H' etwa bedeuten:

H Der Hahn kräht

H	Der Hahn kräht am frühen Morgen
H	Der Hahn kräht am frühen Morgen unaufhörlich zum Entsetzen aller schlechtgelaunten Nachbarn.

Verboten ist jedoch, zwei Aussagen innerhalb des gleichen Kontextes mit demselben Buchstaben darzustellen. Also:

Der Hahn kräht und Hans wacht auf

H und H	falsch
H und W	richtig

Eine Aussage, die sich durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen läßt, nennt man Atomsatz. Die Negation eines Atomsatzes ist selber ein Atomsatz. Sätze, die nicht Aussagen in unserem Sinne sind, werden nicht symbolisiert.

Übung 2.1

Formalisieren Sie:

1. Othmar ist Organist.
2. Am Freitag gibt es Fisch.
3. Endlich kommt der Mai!
4. Die Edelsteine sind beleidigt.
5. Er drückt sich ständig um die Übungen.
6. Vorgestern traf ich sie wieder am Bahnhof.
7. Soll ich das nochmals wiederholen?
8. Er sang fröhlich inmitten seiner Freunde beim dritten Glas.
9. Die Anschrift ist gänzlich unleserlich.
10. Der letzte Sommer hat.
11. Globi kann alles.
12. Keine Rosen ohne Dornen.
13. Wie nett, daß der Onkel Fritz doch noch eine Frau gefunden hat!
14. Alice ist mißmutig, weil die Spaghetti verkocht sind.
15. O du lieber Augustin, alles ist hin!
16. Radetzki litt chronisch unter Geldmangel.
17. „Handtuch“ heißt auf englisch „towel“.
18. Vorsicht beim Schließen!

19. Wollen wir wetten, daß der Stadtpräsident eine Rede hält?
20. Der Kodex 914 von St. Gallen ist die bedeutendste Quelle für die kritische Ausgabe der Benediktsregel.

2.2 Die Formalisierung von Aussagenverknüpfungen

In der Sprache scheint es zwei Arten von Wörter zu geben, solche, die etwas bedeuten, wie „Elefant", „Konfitüre", „beten", „stolpern" usw. und daneben Wörter ohne Bedeutung wie „aber", „zwar", „weil", „so" usw. Das Mittelalter hat die letzteren Synkategoremata genannt. Unter ihnen sind zwei Gruppen zu unterscheiden und zwar:

1) „zwischen", „indessen", „nun", usw.
2) „und", „oder", „nicht" usw.

Es ist nicht unmittelbar einsichtig, wodurch sich die Synkategoremata der ersten Gruppe von denen der zweite abheben sollen. Doch ist der Unterschied sehr bedeutsam. Die zweite Gruppe hat einen engen Zusammenhang mit der Wahrheit der Sätze, während die erste in dieser Beziehung bestenfalls neutral ist und von uns nicht weiter beachtet werden muß.

Aus der zweiten Gruppe werden wir fünf Synkategoremata auswählen. Sie werden auch Funktoren genannt, genauer Wahrheitswertfunktoren, weil sie die Gesamtwahrheit verknüpfter Atomsätze bestimmen.

Bei der Darstellung wollen wir mit dem Negator beginnen. Er entspricht ziemlich genau dem umgangsprachlichen „nicht". Als Abkürzung wählen wir „$\neg$". Mit diesem Negationszeichen, das vor die Aussage gesetzt wird, stellen wir den Negator dar. Es handelt sich dabei um einen einstelligen Funktor. Einstellig heißt er deshalb, weil auf ihn eine einzige Aussage folgt. Wenn „O" bedeutet „Ostern ist 1985 im April", dann bedeutet „$\neg$ 0" soviel wie „Ostern ist 1985 nicht im April". Die Negation verneint die auf sie folgende Aussage.

Bei den zweistelligen Funktoren wollen wir mit dem „und" beginnen, in Symbolschrift „ $\wedge$ “. Dieser Funktor ist deshalb zweistellig, weil vor dem „und“ wie auch nachher je eine Aussage zu stehen hat, um den Bedingungen wohlformulierter Aussagenverknüpfungen zu genügen.

Der zweite zweistellige Funktor ist das „oder“, das symbolisch mit „ $\vee$ “ wiedergegeben wird.

Als dritter Funktor der zweistelligen Gruppe gilt die Implikation, die mit einem Pfeil „$\rightarrow$“ geschrieben wird. Umgangssprachlich entspricht die Implikation ungefähr der sprachlichen Wendung „wenn ... dann ...“.

Der vierte zweistellige Funktor, der mit dem Zeichen „$\leftrightarrow$“ wiedergegeben wird, kann als „dann nur nur dann, wenn ...“ oder „genau dann, wenn ...“ gedeutet werden.

Wir wollen die fünf Funktoren zusammenstellen:

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\rightarrow$	wenn ... dann ...
$\leftrightarrow$	dann und nur dann, wenn ...

Diese Funktoren sind logische Konstanten. Sie dienen dazu, Aussagen oder Aussagenvariable zu verknüpfen. Eine Aussagenverknüpfung ist ein Molekularsatz. Jede Funktorenverknüpfung – außer der Negation – macht Atomsätze zu Molekularsätzen.

Nun können wir uns mit der Formalisierung der Aussagenverknüpfungen vertraut machen. Das soll anhand zweier Aussagen geschehen, nämlich „Die Sonne scheint“ und „Josef geht in den Wald“. Die Symbolisierung lautet:

S	Die Sonne scheint
J	Josef geht in den Wald
$\neg$ S	Die Sonne scheint nicht
$\neg$ J	Josef geht nicht in den Wald

Entsprechend werden die Aussagenverknüpfungen gebildet:

S $\wedge$ J	Die Sonne scheint und Josef geht in den Wald

$S \vee J$	Die Sonne scheint oder Josef geht in den Wald
$S \rightarrow J$	Wenn die Sonne scheint, dann geht Josef in den Wald
$S \leftrightarrow J$	Genau dann, wenn die Sonne scheint, geht Josef in den Wald

Übung 2.2

1) Formalisieren Sie:

1. Herodot war nicht Musiker.
2. Rauchen ist ungesund und Schokolade macht dick.
3. Wenn die Feuerwehr rechtzeitig eintrifft, dann wird das alte Haus gerettet.
4. Er bezahlt die Steuern genau dann voraus, wenn ihm der Zins gutgeschrieben wird.
5. Er bleibt zu Hause oder seine Frau spielt nicht Bridge.
6. Wenn sich der Hund nicht wohlfühlt, dann wedelt er nicht.

Das Prinzip der Formalisierung ist höchst einfach: Die Aussagen müssen mit dem dafür vorgesehenen Funktor verknüpft werden. Freilich treten in der Praxis manchmal Unsicherheiten auf. Sie können dadurch verursacht sein, weil die Umgangssprache reichhaltig ist und für einen Ausdruck, den wir durch einen einzigen Funktor darstellen, mehrere Wörter benutzt. Einige damit verbundene Formalisierungsschwierigkeiten sollen erwähnt werden.

2.2.1 Die Und-Verknüpfung

„Die Sonne scheint und Josef geht in den Wald" ist eine problemlose Aussagenverknüpfung durch Konjunktion. Zwischen die beiden Aussagen wird ein „und" gestellt und damit ist die Verknüpfung vollzogen. Leider sind nicht alle Konjunktionen so leicht durchschaubar. Sehen wir uns einige Beispiele an.

(1) Das Schachspiel ist aufregend und unterhaltsam

Das linke Argument des „und" ist zweifellos eine Aussage. Hingegen ist „unterhaltsam" anscheinend ein Einzelwort und folglich keine Aussage. In Wirklichkeit profitiert jedoch die Umgangssprache von der Tatsache, daß in jenen Fällen, in denen einem Ding zwei, drei oder noch mehr Eigenschaften zugeschrieben werden, der Name des Dinges nicht jedesmal wiederholt werden muß. Beim vorliegenden Beispiel handelt es sich tatsächlich um zwei Aussagen, die explizit so auszudrücken wären: „Das Schachspiel ist aufregend und das Schachspiel ist unterhaltsam". Nun erkennen wir, daß auch das vermeintliche Einzelwort eine abgekürzte, aber korrekte Aussage ist; entsprechend lautet die ganze Formalisierung so:

(1) $A \wedge U$

Die Umgangssprache – und das gilt von jeder sogenannten wissenschaftlichen Fachsprache in gleicher Weise – darf nicht gedankenlos in die Symbolschrift übertragen werden. Bevor mit der Formalisierung eingesetzt wird, müssen die logisch relevanten Satzstrukturen erfaßt sein. Ein solches Verständnis ist nicht identisch mit dem Begreifen des Inhaltes, ist jedoch eine notwendige Bedingung dazu. An Vertrautheit mit der Sprache ist soviel vorausgesetzt, daß Strukturgleichheiten und -verschiedenheiten erkannt werden, selbst wenn sie durch den Buchstaben nicht angedeutet sind. Es geht hier um die irritierende Tatsache:

- Nicht überall deutet das „und" auf eine konjunktive Aussagenverknüpfung hin.
- Ab und zu liegt eine Aussagenverknüpfung durch Konjunktion vor, ohne daß dieser Sachverhalt am „und" abzulesen wäre.

Diese beiden Arten sollen kurz besprochen werden.

2.2.1.1 Vermeintliche Konjunktion

Die deutsche Sprache kennt mindestens zwei Scheinkonjunktionen. Die eine ist ein harmloses Stilmittel, die andere eine Falle für traditionelle Sprachanalyse.

Wenn das Stilmittel konzentriert wiederholt wird, ist es leicht durchschaubar wie etwa in der Zwingliübersetzung des Markusevangeliums. Abgesehen vom Einführungssatz werden nicht nur bis in die Mitte des Kapitels 7 alle Kapitel, sondern auch alle Abschnitte mit dem Wort „und“ eingeleitet in der Absicht, den griechischen Text möglichst wortgetreu wiederzugeben. Indessen hat das „und“ an diesen Stellen durchaus nicht die Bedeutung konjunktiver Satzverknüpfungen; es ist eine bloß rhetorische Anknüpfung an das Vorhergegangene. Dieses „und“ gehört somit der 1. Klasse der Synkategoremata an. Daraus entnehmen wir die erstaunliche Tatsache, daß selbst Synkategoremata mehrdeutig sein können, auch wenn sie uns als bedeutungslos erscheinen.

Der zweite Fall ist für die Logik folgenreicher. Wir gehen von den beiden Sätzen aus:

(1) Franz und Othmar sind Sänger
(2) Franz und Othmar sind Nachbarn

Die beiden Aussagenverknüpfungen scheinen grammatikalisch gleich gebaut zu sein. In Wirklichkeit schreibt jedoch der Satz (1) zwei Menschen eine Eigenschaft zu, die beiden zukommt. Dazu erlaubt die Umgangssprache, wie wir bereits gesehen haben, eine Abkürzung. Ausführlich dargestellt bedeutet die Aussage (1) folgendes: „Franz ist ein Sänger und Othmar ist ein Sänger.“ Hingegen läßt sich (2) nicht in dieser Weise deuten; denn „Franz ist ein Nachbar“ ist kein wohlformulierter Satz; er muß lauten: „Franz ist ein Nachbar von Othmar“ oder es muß mindestens implizit ergänzt werden: „Franz ist ein Nachbar von jemandem“. Was hier vorliegt ist nicht eine Konjunktion aus zwei einfachen Aussagen, vielmehr eine elementare Relation. Aus der Relationslehre, die wir später darstellen werden, geht hervor, daß unter der Bedingung, wie sie (2) ausspricht, auch Othmar ein Nachbar von Franz ist. Es handelt sich aber um eine einzige Aussage und deshalb lautet die Formalisierung von (1) und (2) so:

(1) $F \wedge 0$
(2) N

Selbstverständlich dürfte (2) auch durch „F“ dargestellt werden, nur muß man sich darüber klar sein, daß dieses „F“ mit dem „F“ aus (1) nicht identisch ist. Es ist deshalb ratsam, einen andern Buchstaben für (2) zu wählen.

2.2.1.2 Konjunktive Aussagenverknüpfungen ohne „und"

Eine Formalisierung ist immer eine Abstraktion. Bei unseren Formalisierungen dürfen jene Nuancen weggelassen werden, die logisch nicht relavant sind. Die Umgangssprache benutzt nämlich eine reiche Wortpalette, um mit der konjunktiven Verknüpfung von Sätzen auch noch bestimmte Schattierungen sichtbar zu machen. So sagt man etwa, „Er kommt zum Mittagessen, aber bleibt nicht lange". Hier handelt es sich um zwei Aussagen, die statt durch ein „und" durch ein „aber" verknüpft sind. Im „aber" steckt ein leichter Gegensatz, eine Nuance, die im „und" nicht mehr enthalten ist. Da sie jedoch rhetorischen und nicht wahrheitsbestimmenden Wert hat, verzichtet der auf Wahrheit ausgerichtete Logiker auf ihre Berücksichtigung. Derartige Schattierungen gibt es noch weitere. So könnte das „aber" gegebenenfalls durch „doch", „obwohl", „während" usw. ersetzt werden. Die Schriftsprache kennt überdies die Möglichkeit, die Und-Funktion durch ein Komma anzudeuten, etwa: „Er hat sich lange, eingehend und erfolgreich darum bemüht". Überdies kann das „und" sogar aus der sprachlichen Darstellung verschwinden, wenn die Konjunktion verneint wird.

Die Verneinung einer durch „und" gebildeten Satzverknüpfung mag auf verschiedene Art wiedergegeben werden. Verständlich, aber ungebräuchlich ist:

(3) Franz geht nicht schwimmen, und Othmar geht nicht schwimmen

An Stelle von (3) wird man eher sagen:

(4) Franz und Othmar gehen nicht schwimmen

oder

(5) Weder Franz noch Othmar geht schwimmen

Zweifellos ist (3) so schwerfällig, daß es in der deutschen Sprache nicht ausgesprochen wird. Statt (4) kann jederzeit auch (5) eingesetzt werden, wobei das „und" auf den ersten Blick verschwunden ist, jedoch bei genauerer Analyse im „weder – noch" als Verneinung zu finden ist.

Eine andere Situation liegt im folgenden Beispiel vor:

(6) Er raucht und trinkt nicht

Die Zweideutigkeit wird uns bewußt beim Versuch der Formalisierung:

(6a) $R \wedge \neg T$

(6b) $\neg R \wedge \neg T$

(6a) besagt, daß er raucht, aber nicht Trinker ist, hingegen behauptet (6b), er sei Totalabstinent. Meistens wird aus dem Kontext ersichtlich, ob (6a) oder (6b) gemeint sei. Man mag auch wünschen, daß die Aussage (6), wenn sie im Sinne von (6a) beabsichtigt ist, umgangssprachlich eindeutig formuliert werde, nämlich: „Er raucht, aber er trinkt nicht". Auf jeden Fall, wenn wir die Aussage (6), wie man pathetisch so gerne sagt, „beim Wort nehmen", ist sie mehrdeutig.

Der Reichtum der Umgangssprache bringt es mit sich, daß allerhand Nuancen auch bei den übrigen Funktoren anzutreffen sind. Sie zu erfassen gehört zu den bekanntesten Anfängerschwierigkeiten in der Formalisierung, weil der durchschnittliche Sprecher mit seiner Sprache umzugehen weiß, ohne jedoch mit ihren logischen Strukturen explizit vertraut zu sein. Mit etwas Vorsicht und Übung lassen sich hier verhältnismäßig leicht die bestehenden Lükken ausbessern. Etwas kürzer als beim „und" sei noch auf einige schwierige Zusammenhänge der übrigen Funktoren aufmerksam gemacht.

2.2.2 Die übrigen Funktoren

Die Disjunktion: Das „oder" wird in drei verschiedenen Bedeutungen verwendet, wobei eine davon vernachlässigt werden kann, weil sie äußerst selten vorkommt. Die beiden übrigen nennen wir das inklusive und das exklusive „oder". Die Erklärung ihrer Unterschiede folgt später. Für die Formalisierung bereitet das „oder" geringfügige Schwierigkeiten verglichen mit dem „und", weil unsere Umgangssprache weniger Umschreibungen für „oder" kennt. Täuschen läßt man sich oft von einigen alltäglichen Redewendungen, wie etwa „Kinder und Rentner zahlen halben Preis". Hier

wird das „und" offensichtlich als „oder" aufgefaßt. Deshalb darf nicht das formalisiert werden, was gesagt wird, sondern das Gemeinte.
Die Implikation: Statt „wenn ... dann ..." können ebenfalls Ersatzwendungen in der Umgangssprache benutzt werden, etwa „falls", „es sei denn ...", „... ist eine hinreichende Bedingung für ...", „wenn immer ..." usw. Wichtig ist festzuhalten, daß das „weil" trotz seiner scheinbaren Ähnlichkeit kein ebenbürtiger Ausdruck ist, denn es hat eine wesentlich verschiedene Aufgabe zu erfüllen. Ebenfalls ist auch die konditionale Implikation keine Wahrheitsfunktion. „Wenn Hitler 1935 gestorben wäre, dann wäre Österreich nicht heimgeholt worden." Dieser irreale Satz soll nicht als Wahrheitsfunktion der Implikation gelten.

Daneben ist auf die asymmetrische Funktion der Implikation aufmerksam zu machen. Das Argument vor dem Implikationszeichen nennen wir „Antezedens" oder „Vordersatz", jenes, das auf das Implikationszeichen folgt „Konsequens" oder „Nachsatz". Antezedens und Konsequens sind die beiden Argumente der Implikation. Die Asymmetrie hat zur Folge, daß Vordersatz und Nachsatz nicht gegeneinander ausgetauscht werden dürfen. Bei den übrigen Funktoren ist dieser Austausch erlaubt aufgrund einer Regel, die wir später kennen lernen.

Wird bei der Implikation der Vordersatz mit dem Nachsatz vertauscht, so geht damit eine Sinnänderung einher. Das machen wir uns zunutze, um mit Hilfe des gleichen Funktors eine weitere Aussagenverknüpfung auszudrücken. Die Umstellung von Antezedens und Konsequens entspricht dem alltagsprachlichen „*nur* dann ... wenn ...". Das soll an Beispielen verdeutlicht werden:

(7) Wenn die Sonne scheint, dann geht Josef in den Wald $S \rightarrow W$
(8) Nur wenn die Sonne scheint, geht Josef in den Wald $W \rightarrow S$

Diesen Sachverhalt können wir uns inhaltlich plausibel machen, denn (8) ist gleichbedeutend mit „Wenn Josef in den Wald geht, dann scheint die Sonne". Dieses „nur wenn ... dann ..." wird in der Alltagssprache durch mehrere verschiedene Wendungen wiedergegeben: „... ist eine notwendige Bedingung ...", „... vorausgesetzt, daß ...", „... insofern als ..." usw.

Die Äquivalenz: Die Äquivalenz kann ebenfalls unter verschiedener Gestalt in der Umgangssprache auftreten. Sie hat die gleiche Bedeutung wie „wenn p, dann q und wenn q, dann p", so daß wir schreiben: $p \leftrightarrow q$. Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit „p ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für q". Die Grundform der Äquivalenz ist „dann und nur dann, wenn ..." oder „genau dann, wenn ..." Statt dieser umständlichen Ausdrucksweise kann oft auch kurz „muß" stehen, etwa „Wenn ein Pferd ein Schimmel ist, dann muß es weiß sein". Das dürfte die geläufigere Redeweise sein als „dann und nur dann, wenn ein Pferd ein Schimmel ist, ist es weiß", obwohl dies korrekt wäre.

Übung 2.2.2

1) Formalisieren Sie:

1. Hans studiert Biologie oder Chemie.
2. Im Anfang schuf Gott Himmel und Erde.
3. Das Bier ist trinkbar, aber nicht kalt.
4. Wenn das Konzert öffentlich ist, dann spielt der Solist gut.
5. Nur wenn das Konzert öffentlich ist, spielt der Solist gut.
6. Weder Napoleon noch de Gaulle waren Engländer.
7. Die höchste Steigung der Gotthardbahn beträgt 27 Promille, jene der Engelbergerbahn jedoch 246 Promille.
8. Nur wenn eine Zahl ungerade ist, läßt sie sich nicht durch 2 teilen.
9. Heidi und Bruno haben am 14. Juli geheiratet, obwohl sie nicht Franzosen sind.
10. Die Türe ist offen oder zu.
11. Der Millionär befürchtet, daß sein Vermögen kleiner wird, der Philosoph, daß sein Unvermögen größer wird.
12. Die Katze fängt Vögel statt Mäuse.
13. Es genügt nicht, daß Hans kommt, damit Alice bleibt.

14. Er geht in die Oper, falls nicht Wagner auf dem Programm steht.
15. Carl spielt Klavier und Orgel, Praxedis hingegen Klavier und Harfe.
16. Ein erfolgreicher Witz muß eine Pointe haben.

2) Formalisieren Sie weiter

1. Nicht p, sondern q
2. Weder p noch q
3. p, falls q
4. Nur p, wenn q.
5. p ist eine hinreichende Bedingung für q.
6. p ist eine notwendige Bedingung für q.

3) Übersetzen Sie die Aussagenverknüpfungen in Worte mit dem Vokabular:

T = Die Temperatur steigt
R = Es hat geregnet
K = Der Kirschbaum blüht

1. $(T \wedge R) \rightarrow K$
2. $(T \rightarrow R) \leftrightarrow (\neg T \vee R)$
3. $\neg (K \rightarrow R)$
4. $\neg T \vee (K \rightarrow R)$
5. $T \leftrightarrow \neg K$
6. $K \rightarrow (R \wedge \neg T)$

4) „‚$p \leftrightarrow q$' soll stehen für: ‚Sokrates ist der Philosoph, welcher den Giftbecher nahm'" E. Walther, Kleiner Abriß der Mathematischen Logik (Kevelaer 1950). zit. J. v. Kempski, Max Bense als Philosoph. Archiv f. Philos. 4 (1952) 280.

Wie beurteilen Sie diese Behauptung?

2.3 Klammerregeln

Da nicht bloß zwei, sondern beliebig viele Aussagen miteinander verknüpft werden dürfen, können sich bei Unachtsamkeit Mehrdeutigkeiten einschleichen, wie etwa in der folgenden Aussagenverbindung:

(1) $A \vee B \rightarrow C$

Dieser Ausdruck kann auf zwei Arten interpretiert werden:

(1a) $(A \vee B) \rightarrow C$ oder
(1b) $A \vee (B \rightarrow C)$

(1a) Wenn Albert oder Brigitte ins Kino geht, dann bleibt Claudia zu Hause.
(1b) Albert geht ins Kino, oder, wenn Brigitte geht, dann bleibt Claudia zu Hause.

(1a) und (1b) sind offensichtlich nicht identisch. Wir werden später eine einfache Methode kennen lernen, um den Unterschied zwischen den beiden genau auszudrücken.

Beachtung verdient auch die Negation.

(2) Es ist nicht der Fall, daß Emil raucht oder trinkt

Die Negation bezieht sich hier auf die ganze Aussagenverknüpfung, so daß sich folgende Formalisierung aufdrängt:

(2a) $\neg (R \vee T)$

Wenn man die Klammern wegließe, dann würde sich die Negation auf die erste Konstante beschränken

(2b) $\neg R \vee T$

was der etwas sonderbaren Behauptung entspräche: „Emil raucht nicht oder er trinkt". Das Sonderbare liegt aber nur am zufällig gewählten Beispiel. Die Struktur von (2b) kann sinnvoll etwa so gedeutet werden:

(3) Emil geht nicht weg oder er nimmt das Auto

Das heißt: Er beabsichtigt hier zu bleiben; falls er es sich gleichwohl anders überlegen sollte, dann nimmt er das Auto.

(3a) $\neg W \vee A$

Wenn keine Klammern vorhanden sind, dann gilt die Konvention, daß „$\wedge$" und „$\vee$" stärker binden als „$\rightarrow$" und „$\leftrightarrow$". Gemäß dieser Konvention müßte (1) als (1a) gedeutet werden. Wir werden jedoch auch bei (1a) Klammern zulassen, auch wenn sie, streng genommen, überflüssig wären. Reicht die Konvention hingegen nicht aus wie bei der Formel (1b), dann werden Klammern unerlässlich. Daher ist der Ausdruck ‚$A \rightarrow B \rightarrow C$' nicht wohlformuliert; je nachdem, ob er ‚$(A \rightarrow B) \rightarrow C$' oder ‚$A \rightarrow (B \rightarrow C)$' bedeuten soll, behauptet er etwas Verschiedenes.

Übung 2.3

Formalisieren Sie

1. Entweder gehen wir schwimmen, oder wenn wir nicht schwimmen gehen, dann machen wir Musik.
2. Er ist nur dann mutig, wenn er im Wirtshaus sitzt und die Frau nicht bei ihm ist.
3. Wir können nicht beides haben, den Fünfer und das Weggli.
4. Er hat nicht Wein getrunken, oder wenn er Wein getrunken hat, dann fährt er nicht mit dem Auto.
5. Es ist nicht der Fall, daß er Wein getrunken hat und Auto fährt.
6. Wenn der Dirigent einen falschen Einsatz gibt oder der Pianist zwei Seiten gleichzeitig dreht, dann stimmt die Harmonie nicht.
7. Die Versammlung ist beschlußfähig, oder wenn sie es nicht ist, dann heben wir sie auf.
8. Bei Einbruch, Brand und Diebstahl zahlt die Versicherung, jedoch nicht bei Hagel.
9. Nur bei Einbruch und Brand zahlt die Versicherung, bei Diebstahl nicht.
10. Der Computer unterbricht den Schüler nicht, es sei denn, um Fehler anzuzeigen oder den Stromausfall zu melden.
11. Der Gast ist abgereist ohne die Rechnung zu bezahlen, oder er hat einen Spaziergang gemacht und kommt jeden Augenblick zurück.
12. Wenn Verena weder ein Streich- noch ein Schlaginstrument spielt, jedoch sicher singt, dann spielt sie ein Holzinstrument oder Orgel und komponiert.

Eine Bemerkung zu den uneinheitlichen Symbolzeichen der Logiker: Meistens bestehen die Unterschiede in geringfügigen Nebensächlichkeiten, etwa wenn die Konjunktion mit „ . “ oder „&“ geschrieben wird. Eine einzige Schreibweise macht eine Ausnahme, die deshalb gesondert erlernt werden muß. Es handelt sich um die polnische Notation. Sie hat den Vorteil, keine Klammern zu benötigen und gleichwohl immer eindeutig zu bleiben. In dieser Hinsicht ist sie allen andern Schreibweisen überlegen. Darauf gehen wir später ein.

Zusammenstellung einiger wichtiger Fachausdrücke

$p, q, r \ldots$	Aussagenvariable
$A, B, C \ldots$	Aussagenkonstante
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	Logische Konstante
p	
$\neg p$	Atomsätze
A	
$\neg\neg C$	
$p \vee q$	
$A \rightarrow B$	Molekularsätze oder Formeln
$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	
p	1 Argument, 1 Variable
$p \vee p$	2 Argumente, 1 Variable
$(p \vee p) \rightarrow p$	3 Argumente, 1 Variable
$(p \vee q) \rightarrow r$	3 Argumente, 3 Variable
$A \rightarrow B$	A = Antezedens, Vordersatz;
	B = Konsequens, Nachsatz

2.4 Die Wahrheitsfunktionen

Als Wahrheitswerte seien nur zwei zugelassen: das Wahre und das Falsche. Unter dieser Voraussetzung kann ein Einzelargument nur wahr oder falsch sein. Die Wahrheit oder Falschheit einer Satzverknüpfung hängt von der Wahrheit oder Falschheit der einzelnen Argumente ab. Wir wollen die Leistung für die bereits bekannten Funktoren im Hinblick auf die Wahrheitswerte untersuchen.

2.4.1 Die Negation

Die Negation ist jene Funktion, die einem Argument den entgegengesetzten Wahrheitswert zuschreibt. Die Aussage „Die Lampe brennt" kann für eine bestimmte Lampe wahr oder falsch sein. Ist sie wahr, dann ist die Verneinung „Die Lampe brennt nicht" falsch; ist hingegen die Aussage „Die Lampe brennt nicht" für eine bestimmte Lampe wahr, dann ist bei diesem Zustand ihre Verneinung „Die Lampe brennt" falsch. Daraus folgt, daß wir mit der Bejahung eines Satzes gleichzeitig das kontradiktorische Gegenteil verneinen. Das läßt sich verallgemeinert in einer Wahrheitstafel darstellen:

p	$\neg p$
wahr	falsch
falsch	wahr

F	1) Blau ist eine Farbe
I	2) Hirsche sind Insekten
B	3) Belgien ist kleiner als Luxemburg
V	4) San Marco ist in Venedig

Welche Aussagen sind wahr?

Blau ist tatsächlich eine Farbe, also ist ‚F' wahr. Hingegen sind Hirsche keine Insekten, sodaß ‚I' falsch und folglich ‚$\neg$ I' wahr ist. Belgien übertrifft Luxemburg flächenmäßig um mehr als das elffache. Die Aussage ‚B' ist falsch und daher ‚$\neg$ B' wahr. Alle Besucher von Venedig wissen, daß San Marco die Hauptkirche ist. ‚V' ist also wahr.

Man hätte die Frage auch so stellen können: Welche Aussagen sind falsch
Antwort: $\neg$ F, I, B, $\neg$ V.

Eine einzelne Variable ist also wahr oder falsch. Die Übersicht wird erschwert, sobald zwei ($p \wedge q$), drei ($p \wedge q \wedge r$) oder noch mehr Variable gegeben sind. Wir reden hier absichtlich von Variablen und nicht von Argumenten, weil etwa bei den Argumenten ($p \vee p \vee p$) der Wahrheitswert von der einzigen Variable ‚p' abhängig ist. Ist ‚p' wahr, dann ist der ganze Ausdruck wahr; ist ‚p' falsch, dann überträgt sich das wieder auf den ganzen Ausdruck;

denn eine Behauptung, die dreimal ausgesprochen wird, hat nicht mehr Wahrheit oder Falschheit als eine einmalige Aufzählung. Wenn jedoch ‚p ∨ q' vorliegt und ‚p' falsch ist, dann steht der Wahrheitswert von ‚q' noch offen. Daraus ersehen wir: sobald wir es mit zwei oder mehr Variablen zu tun haben, gibt es mehrere Kombinationen zwischen wahr und falsch.

Wie groß die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten bei zwei Variablen ist, das läßt sich an einem Beispiel darstellen. Nehmen wir an, wir hätten einen Sack mit weißen und farbigen Kugeln. Nun greife ich mit beiden Händen hinein und nehme je eine Kugel aus dem Sack heraus. Kurzes Nachdenken belehrt uns, daß nur die folgenden vier Kombinationen zu erwarten sind:

linke Hand	rechte Hand	abgekürzt	
weiß	weiß	w	w
weiß	farbig	w	f
farbig	weiß	f	w
farbig	farbig	f	f

Falls wir nun bei der Abkürzung „w" als „wahr" und „f" als „falsch" deuten, so haben wir die Wahrheitskombinationen wahr–falsch zweier Variablen vor uns. International hat sich dabei eine einheitliche Schreibweise durchgesetzt. Für „wahr" wird „1" geschrieben, für „falsch" „0".

Eine Wahrheitsfunktion mit zwei Variablen ist dann eindeutig definiert, wenn der Wahrheitswert für jeden der vier möglichen Fälle eindeutig festgelegt ist. Das ist gleichbedeutend mit einer strengen Definition unserer bereits bekannten Funktoren. Sie sollen einzeln untersucht werden.

2.4.2 Die Konjunktion

„Der Briefträger bringt die Zeitung und ein Paket". Das sind zwei durch eine Konjunktion verbundene Aussagen, die sich formal so darstellen lassen: ‚Z ∧ P'. Wie bereits bekannt, gibt es für zwei Variable vier Kombinationsmöglichkeiten hinsichtlich der Wahrheit oder Falschheit. Wir schreiben diese vier Fälle unter die Buchstaben ‚Z' und ‚P', was folgende Tabelle ergibt:

P	$\wedge$	Z
1		1
1		0
0		1
0		0

Diese Aussagenverknüpfung ist dann wahr, wenn sowohl die erste Aussage wahr ist wie auch die zweite, also wenn der Briefträger mit der Zeitung auch das Paket abliefert. Wir sagen, sie sei falsch, wenn er ohne Paket ankommt oder wenn er das Paket zustellt ohne Zeitung und erste recht, wenn er weder Zeitung noch Paket bringt. Das deuten wir so an, daß die Spalte unter dem Konjunktionszeichen dort eine „1" erhält, wo beide Variable 1 sind, also in der ersten Zeile. Die übrigen drei Zeilen füllen wir mit „0" aus. Dann lautet die Definition der Konjunktion allgemein so:

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Aus dieser Wahrheitstafel entnehmen wir, daß die Konjunktion gemäß Definition genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind. Statt vertikal können wir unser Resultat aus der $\wedge$-Spalte auch horizontal schreiben: 1000. Das hat nichts mit tausend zu tun; es ist vielmehr die exakte Definition des Funktors „$\wedge$".

Beispiele zur Konjunktion:

$F \wedge V$	1) Blau ist eine Farbe und San Marco ist in Venedig.
$Z \wedge A$	2) 12 ist teilbar durch 2 und Pflaumen sind Aprikosen.
$P \wedge \neg B$	3) Paris ist eine Stadt und Holz brennt nicht.
$\neg I \wedge \neg S$	4) Die Eskimos leben nicht in Italien und die Neger nicht auf dem Südpol.
	Welche Aussagenverknüpfungen sind wahr?

Im Beispiel 1) sind beide Aussagen wahr, deshalb auch die ganze

Aussagenverknüpfung. Bei 2) ist ‚A' falsch, denn Pflaumen sind keine Aprikosen. Deshalb ist 2) als Ganzes falsch, obwohl die Aussage ‚Z' wahr ist. Wir haben es mit der zweiten Zeile unserer Definition zu tun, wo sich aus dem wahren ‚p' und dem falschen ‚q' etwas Falsches ergibt, was als „0" zwischen die beiden gesetzt wird. Da jedermann weiß, daß Holz brennbar ist, also ‚B' wahr und ‚$\neg$B' falsch, so ist auch die Aussage 3) falsch. Den Eskimos wäre es in Italien zu warm, sie wohnen nicht dort. Daher ist ‚$\neg$I' wahr. Entsprechend fänden es die Neger auf dem Südpol zu kalt und so ist auch ‚$\neg$S' wahr. Da beide Argumente der Konjunktion wahr sind, ist die gesamte Aussagenverknüpfung wahr.

2.4.3 Die Disjunktion

Als Beispiel für eine Disjunktion wählen wir den Satz: „Zum Nachtisch gibt es Käse oder Früchte". Unter der Disjunktion verstehen wir jene Funktion mit zwei Argumenten, die nur dann falsch ist, wenn beide Argumente falsch sind, also wenn es weder Käse noch Früchte gibt. Die Wahrheitstafel der Disjunktion lautet demnach verallgemeinert so:

p	$\vee$	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

Auch hier ist das Resultat der Definition aus der Spalte unter dem Funktor „ $\vee$ " abzulesen und kann horizontal übertragen werden: 1110. Der Funktor läßt sich in der Umgangssprache so umschreiben: „Eines von beiden, vielleicht auch beides". Das entspricht genau dem lateinischen „vel", das auf deutsch nicht gerade eindeutig mit „oder" übersetzt wird. Die Formel „und/oder", die man in juristischen Texten und neuerdings wieder vermehrt in theologischen Arbeiten antrifft, ist ein Pleonasmus, wie aus der Definition von „ $\vee$ " hervorgeht. Die Wahrheitstabelle bringt es an den Tag.

Nun kann aber das umgangssprachliche „oder" eine weitere Bedeutung annehmen, die Kontravalenz, die an einem Beispiel erklärt werden soll. „Albert ist Katholik oder Protestant". Da es nicht möglich ist, beiden Konfessionen gleichzeitig anzugehören, nimmt die Wahrheitstabelle den Wahrheitswert 0110 an. Dieses ausschließende „oder" wird lateinisch mit „aut-aut" und deutsch mit „entweder-oder" übersetzt. Die konsequente lateinische Unterscheidung wird von der deutschen Sprache allerdings nicht übernommen, so daß die bedeutsame Abweichung zwischen Disjunktion und Kontravalenz nur vom Kontext her feststellbar wird. Ich muß im voraus wissen, wie Katholiken zu Protestanten stehen, um zu erfassen, daß es sich bei diesem Beispiel um eine Kontravalenz handelt. Weniger zweideutig müßte gesagt werden: „Entweder ist Albert Katholik oder Protestant". Der Logiker hat der Sprache indessen keine Vorschriften über konsequenten Gebrauch zu machen; er stellt nur fest, wie sorglos im Alltag gesprochen wird, eine Tatsache, die sich nur wegen der unerhörten Redundanz nicht chaotisch auswirkt.

Da sich die Kontravalenz, wenn auch etwas umständlich, mit Hilfe der Disjunktion darstellen läßt – Albert ist Katholik oder Protestant, aber nicht Katholik und Protestant – so wollen wir auf die Einführung einer zusätzlichen logischen Konstante für die Kontravalenz (symbolisch: $\rightarrowtail\!\!\!\longleftarrow$) verzichten. Wir begnügen uns mit der Disjunktion, die von einigen Autoren Adjunktion genannt wird.

Beispiele zur Disjunktion:

$F \vee V$	1)	Blau ist eine Farbe oder San Marco ist in Venedig.
$Z \vee A$	2)	12 ist teilbar durch 2 oder Pflaumen sind Aprikosen.
$\neg P \vee B$	3)	Paris ist nicht eine Stadt oder Holz brennt.
$I \vee S$	4)	Die Eskimos leben in Italien oder die Neger auf dem Südpol.

Welche Aussagenverknüpfungen sind wahr?

Im Beispiel 1) sind beide Aussagen wahr, deshalb auch die ganze Aussagenverknüpfung. Bei 2) ist ‚Z' wahr. Da die Disjunktion als ganze wahr ist, wenn mindestens eines ihrer Argumente wahr ist, so vermag auch das falsche ‚A' am Wahrheitswert von 2) nichts mehr zu ändern. Bei 3) haben wir ein wahres ‚B', was ausreicht für die Wahrheit der Aussagenverknüpfung. Hingegen ist bei 4) sowohl ‚I' wie ‚S' falsch, also alle Disjunktionsglieder. Deshalb ist 4) falsch.

2.4.4 Die Implikation

Der Wahrheitswert der Implikation läßt sich nicht mehr so leicht aus einem Beispiel ablesen. Versuchen wir es für den Anfang gleichwohl.

„Wenn Erika die höchste Punktzahl erreicht, so ist sie Siegerin". Daraus kann ohne Zögern entnommen werden, daß wir eine Implikation für richtig halten, wenn Vordersatz und Nachsatz zutreffen. Ebenso einsichtig ist es, daß der Wert der Implikation falsch ist, wenn der Vordersatz wahr, hingegen der Nachsatz falsch ist. Wir müßten es als ungerecht empfinden, wenn Erika trotz der höchsten Punktzahl nicht Siegerin wäre. Aber wie steht es mit den beiden Möglichkeiten in denen der Vordersatz falsch ist? Diese beiden Fälle wollen wir als wahr festsetzen unabhängig davon, ob uns die zur Verdeutlichung beigezogenen Beispiele zu überzeugen vermögen. Danach erhalten wir folgende Wahrheitstabelle für die Implikation:

p	→	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Die Umgangssprache gibt diesen Funktor mit „wenn ... dann ..." wieder. Es ist zweifellos der Funktor, der unter den bisher behandelten von unserem intuitiven Verständnis am meisten abweicht, und dies nicht bloß in den Fällen eines falschen Vordersatzes. Unser schwankender Gebrauch kommt daher, weil wir im täglichen Umgang zwei zusätzliche außerlogische Voraussetzungen annehmen: Erstens deuten wir in eine Wenn-dann-Aussage ein Kausalverhältnis hinein, das mit der Implikation nicht beabsichtigt ist, und zweitens behalten wir uns Wenn-dann-Aussagen vorwiegend für jene Fälle vor, wo der Vordersatz noch nicht eindeutig wahr oder falsch ist. Beispiele:

1) Wenn die Temperatur unter Null Grad sinkt, so gefriert das Wasser.
2) Wenn das Wetter am Sonntag schön ist, dann machen wir einen Ausflug.

Beide Sätze sind echte Implikationen, nur steckt in beiden viel mehr, als durch die Implikation ausgedrückt wird. Das Wenige, das die streng definierte Implikation aussagt, das soll dafür konsequent durchgehalten werden. Welche Schwierigkeiten dabei auftreten mögen, das zeigt der folgende Vergleich:

1. Erika hat die höchste Punktzahl.
2. Erika ist Siegerin.
3. Bonn ist in Deutschland.
4. Das Wasser gefriert bei Null Grad.

Die vier Aussagen seien wahr. Aus ihnen lassen sich die beiden Implikationen bilden:

(1) Wenn Erika die höchste Punktzahl hat, dann ist sie Siegerin
(2) Wenn Bonn in Deutschland ist, dann gefriert Wasser bei Null Grad

Das Beispiel (2) ist befremdlich, weil zwischen Bonn und dem gefrorenen Wasser kein Kausalzusammenhang besteht und weil überdies Vordersatz und Nachsatz zum vornherein als wahr bekannt sind. Bei (1) liegt wohl ein Kausalzusammenhang vor, – die Logik reicht bei weitem nicht aus, die Kausalität zu analysieren, schon gar nicht der elementare Ausschnitt, mit dem wir uns hier befassen – auf jeden Fall kann man sich einen Zeitpunkt ausdenken, wo der Ausgang noch nicht entschieden ist. Aber wenn sich dann Erika tatsächlich die höchste Punktzahl geholt hat, soll dann von diesem Augenblick an der Satz (1) als falsch anzusehen sein? Die Alltagssprache hält ihn weiterhin für richtig, auch wenn es jetzt üblich ist zu sagen: „Erika hat die höchste Punktzahl erlangt und ist Siegerin“. Nuancen zwischen (1) und (2) sollen keineswegs geleugnet werden. Doch sind sie nicht von solcher Tragweite, daß sie den Logiker umzustimmen vermöchten, seine Implikation anders zu definieren.

Was sollen wir ferner von einer Implikation mit falschem Vordersatz halten? Es lassen sich auch hier Beispiele und Gegenbeispiele anführen, die unsere Definition der Implikation als sinnvoll oder als unvernünftig erscheinen lassen. Ein sinnvolles Beispiel wäre etwa das folgende:

(3) Wenn Karajan dirigiert, dann ist das Haus voll

Nehmen wir an, Karajan sei verhindert, so daß der Vordersatz falsch wird. Muß deswegen das Haus leer sein? Das entspricht nicht der Intuition; erfreulicherweise sind Konzerte nicht selten auch unter andern Dirigenten gut besucht. Es ist also nicht zum vornherein abwegig, eine Implikation mit falschem Vordersatz als wahr zu definieren.

Wie steht es schließlich bei der Implikation mit falschem Vordersatz und falschem Nachsatz? Auch hier gibt es umgangssprachliche Rechtfertigungen für das Vorgehen der Logiker. Göbbels soll gesagt haben: „Wenn wir den Krieg verlieren, dann heiße ich Meier". Mit dieser Implikation wollte er etwas Wahres sagen; er hielt es für ausgeschlossen, den Krieg zu verlieren und dachte nicht im entferntesten an eine Namensänderung. Beide Argumente galten in seinen Augen als falsch, die Aussage war als wahr vorgetragen und ist auch so verstanden worden.

Entscheidend für die Definition des Logikers ist letztlich nicht die Tatsache, daß er auf dieser Grundlage Beispiele vernünftig analysieren kann: es gibt genügend beunruhigende Gegenbeispiele. Der tiefste Grund für das strenge Festhalten des Logikers an der Definition seiner Implikation liegt im inneren Zusammenhang mit den andern Funktoren, an der Geschlossenheit des Systems.

Beispiele zur Implikation:

$H \rightarrow M$	1)	Wenn Heu dürres Gras ist, dann hat die Stunde 60 Minuten.
$\neg H \rightarrow M$	2)	Wenn Heu nicht dürres Gras ist, dann hat die Stunde 60 Minuten.
$H \rightarrow \neg M$	3)	Wenn Heu dürres Gras ist, dann hat die Stunde nicht 60 Minuten.
$\neg H \rightarrow \neg M$	4)	Wenn Heu nicht dürres Gras ist, dann hat die Stunde nicht 60 Minuten.

Welche Aussagen sind wahr?

Bei 1) sind ‚H' und ‚M' wahr, also auch die Implikation. Bei 2) ist ‚¬ H' falsch. Eine Implikation mit falschem Antezedens ist zum vornherein wahr, was sich auf 2) überträgt. Bei 3) haben wir einen wahren Vordersatz und einen falschen Nachsatz. Das ist der einzige Fall, bei dem eine Implikation falsch ist. Bei 4) haben wir es wieder mit einer wahren Implikation zu tun, weil Vordersatz und Nachsatz falsch sind.

2.4.5 Die Äquivalenz

Die Äquivalenz ist eine weitere zweistellige Funktion. Sie läßt sich an einem Beispiel etwa so ausdrücken: „Alice geht genau dann zum Ball, wenn sie eingeladen wird". Die Äquivalenz schreiben wir so: ‚A ↔ E'.

Der Wahrheitswert der Äquivalenz läßt sich aus dem Schriftbild ablesen: Der Funktor ist ein nach zwei Seiten gerichteter Pfeil. Für die Implikation haben wir den Wahrheitswert als 1011 definiert. Der Rückkehrpfeil gilt dual dazu als 1101. Zusammen ergibt das 1001, wie wir aus der Tabelle ersehen:

p	↔	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Die Äquivalenz ist also genau dann wahr, wenn beide Aussagen gleich sind, d.h. beide wahr oder beide falsch.

Sprachlich läßt sich die Äquivalenz durch verschiedene Wendungen wiedergeben: „... dann und nur dann, wenn ...", „... genau dann, wenn ...", „wenn ... dann ... und umgekehrt", „... ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für ..." usw. In wissenschaftlichen Texten sind überdies noch folgende Abkürzungen üblich:

deutsch:	gdw = genau dann, wenn ...
frz.:	ssi = si et seulement si ...
engl.:	iff = if and only if ...

Die Umgangssprache empfindet all diese Ausdrücke meist als schwerfällig und sagt kurzerhand: „wenn ... dann ...“. Beispiel: „Wenn heute Montag ist, dann ist morgen Dienstag“. Dem Sachverhalt nach handelt es sich eindeutig um eine Äquivalenz und nicht um eine Implikation, was durchschaut sein muß, bevor die Formalisierung einsetzt.

Beispiele zur Äquivalenz:

$R \leftrightarrow K$	1)	Wenn die Figur rund ist, dann ist es ein Kreis.
$\neg A \leftrightarrow U$	2)	Genau dann, wenn der Hörer nicht aufgelegt wird, ist das Gespräch unterbrochen.

Welche Aussagen sind wahr?

Beispiel 1) ist richtig formalisiert. Die Wenn-dann-Aussage verbirgt eine Äquivalenz. Da beide Aussagen wahr sind, ist die ganze Aussagenverknüpfung wahr. Auch 2) ist richtig formalisiert. Hingegen sind die Wahrheitswerte ungleich, daher ist die Äquivalenz falsch.

Wir haben nun fünf Funktoren definiert und ihnen folgende Werte gegeben:

$\neg$	1	0		
$\wedge$	1	0	0	0
$\vee$	1	1	1	0
$\rightarrow$	1	0	1	1
$\leftrightarrow$	1	0	0	1

Mit dieser Erkenntnis lassen sich die folgenden Aufgaben leicht lösen.

Übung 2.4.5

1) Welche Aussagen sind wahr?

   1. $\neg$ (London liegt am Rhein).
   2. $(4 + 9 = 12) \vee$ (Nelken verbreiten einen angenehmen Duft).
   3. (Der Schnee ist schwarz) $\rightarrow$ (Der Schnee ist weiß).

4. (5 ist eine Primzahl) $\wedge$ (Einige Schweizer lieben Kartenspiele).
5. (Tauben fressen Schlagen) $\rightarrow$ (Paris liegt im Schwarzwald).
6. $\neg$ (Es gibt rote Rosen) $\vee$ (Manchmal regnet es in Luzern).
7. (Die Großmutter geht spazieren) $\vee$ (4 ist eine Quadratzahl).
8. (Franz ist Hausbesitzer) $\leftrightarrow$ (Franz bezahlt hohe Steuern).
9. (Alle Mädchen heißen Rita) $\rightarrow$ (Einstein war ein großer Physiker).

2) Formalisieren Sie die folgenden Aussagenverknüpfungen und geben Sie den Wahrheitswert an:

1. Mücken sind Insekten, und das Tote Meer ist salzig.
2. Einige Offiziere sind Piloten, und auf den Montag folgt der Sonntag.
3. Ein ehemaliger UNO-Generalsekretär heißt Waldheim, oder Salat ist gesund.
4. Tokio ist die Hauptstadt von Japan, oder Schneeglöcklein sind blau.
5. Wenn Mozart ein Musiker war, dann ist $4 + 4 = 8$.
6. Wenn $2 \cdot 3 = 7$ ist, dann war Mozart ein Musiker.
7. Wenn der Jupiter keine Monde hat, dann ist John Amerikaner.
8. Amseln singen melodiös, oder der Fiat ist ein italienisches Auto.
9. Genau dann, wenn wir ein Raumplanungsgesetz haben, wird der Autofriedhof nicht mehr geduldet.
10. Wenn der Computer ein Philips ist, spricht das für Qualität.

3) A und B sind wahr, X, Y, Z falsch. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte

1. $A \wedge B$
2. $A \wedge X$
3. $\neg A \wedge X$
4. $A \wedge \neg Z$
5. $\neg\neg B \wedge \neg Y$

6. $\neg(\neg A \wedge Y)$
7. $\neg(A \wedge Z) \wedge (\neg Y \wedge B)$
8. $A \wedge B \wedge \neg(Y \wedge \neg Z)$
9. $\neg[A \wedge \neg(B \wedge \neg(Y \wedge \neg(Z \wedge \neg A)))]$
10. $A \vee Y$
11. $\neg A \vee Z$
12. $(A \wedge B) \vee \neg X$
13. $\neg A \vee \neg Z \vee \neg(A \wedge B)$
14. $A \rightarrow Y$
15. $Y \rightarrow A$
16. $A \rightarrow (B \vee \neg Z)$
17. $(Z \wedge A) \rightarrow (\neg A \vee B \vee \neg Z)$
18. $B \rightarrow [Y \rightarrow (Z \rightarrow \neg B)]$

4) Wie steht es mit der Wahrheit der folgenden Satzverknüpfungen, wenn die vier Aussagen eingesetzt werden:

P: Platon war Grieche	(wahr)
A: Aristoteles war der Lehrer von Alexander	(wahr)
K: Kant hat im Mittelalter gelebt	(falsch)
R: Russel war ein Freund von Hegel	(falsch)

a) 1. $(\neg R \vee K) \rightarrow P$
2. $\neg[\neg(K \rightarrow \neg A)]$
3. $(A \wedge \neg K) \rightarrow (P \wedge \neg R)$
4. $\neg P \vee (\neg A \rightarrow K)$
5. $\neg K \rightarrow \neg R$
6. $(\neg P \vee K) \rightarrow (A \wedge \neg R)$
7. $\neg(\neg P \vee \neg A) \vee R$
8. $\neg A \rightarrow (\neg K \wedge \neg R)$

b) Ändert sich der Wahrheitswert, wenn in 2, 4, 7, 8 ‚$\neg A$‘ durch ‚A‘ ersetzt wird, wenn in 3, 6 ‚A‘ durch ‚$\neg A$‘ ersetzt wird? Beantworten Sie die Fragen mit ja oder nein.

5) Wer sich nicht für mathematische Beweise interessiert, der mag 5) übergehen und gleich bei 2.5 weiterlesen. Für die andern wird hier nicht eine Aufgabe gestellt, sondern ein Beweis für die Einzigkeit der leeren Menge vorgelegt. Den Schlüssel dazu liefert die Implikation.

Es genügt zu zeigen, daß die leere Menge von A = der leeren Menge von B ist, also $\emptyset_A = \emptyset_B$. Das trifft dann und nur dann zu, wenn jedes Element von $\emptyset_A$ auch Element von $\emptyset_B$ ist.

1. a sei ein beliebiges, aber festes Element von A. Dann ist die Aussage „a ist ein Element von $\emptyset_A$“ sicher falsch. Folglich ist

(1) $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{a Element von } \emptyset_A}_{\substack{p\\0}}, \underbrace{\text{dann}}_{\substack{\rightarrow\\1}} \underbrace{\text{ist a Element von } \emptyset_B}_{q}\text{“ wahr.} \qquad \begin{array}{l} p = a \in \emptyset_A \\ q = a \in \emptyset_B \end{array}$$

Da ‚p‘ falsch ist, ist die ganze Implikation zum vornherein wahr, welches auch der Wert von ‚q‘ sein mag.

2. Ist nun b ein beliebiges festes Element der Menge B, so ist die Aussage „b ist Element von $\emptyset_B$“ ebenfalls falsch. Folglich ist die Implikation

(2) $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{b Element von } \emptyset_B}_{\substack{q\\0}}, \underbrace{\text{dann}}_{\substack{\rightarrow\\1}} \underbrace{\text{ist b Element von } \emptyset_A}_{\substack{p\\0}}\text{“ wahr} \qquad \begin{array}{l} q = b \in \emptyset_B \\ p = b \in \emptyset_A \end{array}$$

Da die beiden Implikationen für jedes beliebige $a \in A$ und jedes beliebige $b \in B$ gelten, so ist tatsächlich $\emptyset_A = \emptyset_B$. Es gibt also nur eine Menge, die keine Elemente enthält. Sie heißt die leere Menge und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Das war zu beweisen.

2.5 Die Auswertung der Wahrheitsfunktionen

Die Formalisierung oder Symbolisierung ist kein Ziel, sie ist bloß eine Durchgangsstufe. Sie befähigt uns zu einer exakten Auskunft darüber, wann eine Aussagenverknüpfung wahr oder falsch ist. Wenn uns beispielsweise jemand sagt, im letzten Jahr hätten sich die Autounfälle in unserem Land erhöht, dann nehmen wir eine solche Aussage zunächst als wahr hin, weil wir dem Wissen des Sprechers vertrauen. Wir können keinen logischen Grund geltend machen, nach dem der Satz in Zweifel zu ziehen wäre. Hingegen, wenn der gleiche Sprecher auch noch hinzufügt, im letzten Jahr hätten sich alle Arten von Unfällen in unserem Land verringert, dann greifen wir aus logischen Gründen ein. Dazu ist jeder Hörer berechtigt, selbst wenn der Sprecher ein berühmter Statistiker ist und wir von diesem Gebiet nichts verstehen. Denn die Behauptung „Autounfälle haben zugenommen und alle Arten von Unfällen haben sich verringert" ist widersprüchlich. Der Widerspruch ist aus logischen Gründen unhaltbar. Widerspruch oder Nichtwiderspruch läßt sich am Wahrheitswert der Aussagenverknüpfung ablesen. So bleibt uns zu zeigen, wie man zu diesen Wahrheitswerten kommt.

Für das Aufstellen der Wahrheitstafel wählen wir ein einfaches Beispiel. Wir gehen von einer Satzverknüpfung aus, von der wir zum vornherein wissen, daß sie wahr ist. Das ist sicher der Fall für „Die Sonne scheint genau dann, wenn die Sonne scheint". Zuerst symbolisieren wir diese Behauptung:

$$S \leftrightarrow S$$

Als nächsten Schritt zählen wir die Anzahl der Aussagen(konstanten oder -variablen). In unserem Beispiel ist es eine einzige, nämlich ‚S', die zweimal auftritt, also zwei Einsetzungen hat. Gemäß unserer Annahme hat eine Aussage genau zwei Wahrheitswerte, sie kann wahr oder falsch sein. Deshalb setzen wir unter alle ‚S' eine „1" und eine „0":

S	↔	S
1		1
0		0

Als dritter Schritt folgt die Auswertung der Äquivalenz. Wir vergleichen die Wahrheitswerte in den Spalten von oben nach unten. In unserem Beispiel haben wir in der ersten Zeile zweimal eine „1". Gemäß unserer Äquivalenzdefinition (1001) ergibt die Äquivalenz zwischen zwei „1" selber eine „1". Deshalb schreiben wir unter „↔" zwischen die beiden „1" eine „1". Anschließend erfolgt der Vergleich der zweiten Zeile. Die Definition der Äquivalenz besagt, daß dann, wenn beide Argumente den Nullwert haben (1001), der Gesamtwert wieder „1" ist. Diese „1" setzen wir in die zweite Zeile. Das ergibt folgendes Bild:

S	↔	S
1	1	1
0	1	0

Die Spalte unter dem Funktor „↔“ enthält jetzt zwei „1“. Das ist unser Beweis für die logische Wahrheit des Ausdrucks. Wenn in der Spalte des Hauptfunktors – hier haben wir nur einen Funktor und deshalb nimmt er auch die Stelle eines Hauptfunktors ein – alle Stellen mit „1“ belegt sind, dann ist die Verknüpfung immer wahr, wie im vorliegenden Beispiel. Stehen unter dem Hauptfunktor nur „0“, dann ist der Ausdruck immer falsch. Zeigen sich „1“ und „0“ gemischt, dann können wir die Bedingungen angeben, unter denen die Verknüpfung wahr oder falsch ist.

Bereits komplizierter wird der Nachweis in einem Beispiel mit zwei Variablen:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

Hier liegen zwei Variable vor, ‚p‘ und ‚q‘. Bei zwei Variablen gibt es vier Kombinationsmöglichkeiten von wahr–falsch. Wir schreiben sie gleich unter die entsprechenden Variablen:

(p	∨	q)	↔	(q	∨	p)
1		1		1		1
1		0		0		1
0		1		1		0
0		0		0		0

Der Hauptfunktor ist hier die Äquivalenz. Zuerst müssen die Nebenfunktoren ausgewertet werden. Deshalb beginnen wir sogleich mit ‚p ∨ q‘. Die Definition der Disjunktion besagt, daß die Disjunktion nur dann falsch ist, wenn ihre beiden Argumente falsch sind. Das ist spaltenabwärts in der 4. Zeile der Fall. Wir setzen dort eine „0“ ein. Die übrigen drei Zeilen bekommen eine „1“. Nun gehen wir zur Auswertung des zweiten Funktors über. ‚q ∨ p‘ ist wiederum eine Disjunktion und auch sie bekommt in der letzten Zeile eine „0“. Jetzt sieht unser bisheriges Resultat – um die Übersicht zu erleichtern, lassen wir die ‚p‘ und ‚q‘ Werte weg, die wir jetzt ohnehin nicht mehr brauchen – so aus:

(p	∨	q)	↔	(q	∨	p)
	1		1		1	
	1		1		1	
	1		1		1	
	0		1		0	

Es muß deutlich und eindeutig erkennbar sein, welches der Hauptfunktor ist, der zuletzt auszuwerten ist. Dazu stehen Klammern zur Verfügung. Es sei nochmals daran erinnert, daß die Funktoren enger binden in der Reihenfolge, wie wir sie aufgezählt haben, also $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Das hat zur Folge, daß etwa bei der Formel

$$p \vee \neg q$$

nach dem Anschreiben der Wahrheitswerte unter ‚p' und ‚q' zuerst die Negation auszuwerten ist und erst dann die Disjunktion. Eine allfällige Zweideutigkeit ist durch Klammern zu beheben. Dabei wird die aus der Arithmetik bekannte Regel von der Logik übernommen: Klammern sind von innen her aufzulösen.

Bei den folgenden Beispielen sind die Schritte numeriert, wie sie der Reihe nach auszuführen sind. Die höchste Zahl, also der letzte auszuführende Schritt, gibt jeweils den Hauptfunktor an.

	2		1	
p	→	(p	∨	p)
1	1	1	1	1
0	1	0	0	0

2	1		3	
¬	¬	p	↔	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

	3	2		1	
p	∨	¬	(p	→	q)
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0

5		4		6	1		3	2	
¬	(p	∨	q)	↔	¬	p	∧	¬	q
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Das 3. Beispiel ist falsch, was sich daraus ersehen läßt, daß unter dem Hauptfunktor 3 in der vierten und fünften Zeile je eine „0" steht. Beim letzten Beispiel hätten wir auf der linken Seite beginnen können, also in der Reihenfolge: 4, 5, 1, 2, 3, 6.

Bisher haben wir in unseren Beispielen jeweils eine oder zwei Variable zugelassen. Es gibt keinen Grund für eine solche Beschränkung. Wenn jedoch drei, vier oder noch mehr Variable auftreten, dann nimmt die Kombinationsmöglichkeit der Wahrheitswerte in rascher Folge zu:

1 Variable	$2^1 =$	2 Zeilen
2 Variable	$2^2 =$	4 Zeilen
3 Variable	$2^3 =$	8 Zeilen
4 Variable	$2^4 =$	16 Zeilen
5 Variable	$2^5 =$	32 Zeilen
n Variable	$2^n =$	2^n Zeilen

Bei drei Variablen schreiben wir die Wahrheitswerte analog unter die betreffenden Buchstaben. Es empfiehlt sich dabei, systematisch vorzugehen. Die erste Variable wird zur Hälfte mit „1“ belegt, der Rest, d.h. die andere Hälfte mit „0“. Bei der zweiten Variablen wird jede Hälfte nochmals unterteilt und bei der dritten finden wir fortwährende Abwechslung von „1“ und „0“. Das sieht so aus:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Das gleiche Verfahren wird bei vier und mehr Variablen angewandt. Bei p, q, r, s haben wir $2^4 = 16$ Zeilen. Deshalb wird unter ‚p‘ in den ersten 8 Zeilen „1“ gesetzt, in den übrigen überall „0“. Bei der zweiten Variable ‚q‘ zuerst 4mal „1“, dann 4mal „0“, wieder 4mal „1“ usw. Bei der dritten jeweils mit 2mal „1“, 2mal „0“ usw. und bei der letzten abwechslungsweise „1“ und „0“.

Beispiel mit 3 Variablen:

1			5		2		4		3	
(p	$\leftrightarrow$	q)	$\rightarrow$[(p		$\wedge$	m)	$\rightarrow$	(q	$\wedge$	m)]
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0

Übung 2.5

1) Beweisen Sie mit Hilfe der Wahrheitstabellen die Gültigkeit der folgenden Aussagenverknüpfungen:

1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $q \rightarrow (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
5. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

Das sind die 5 Axiome der *Principia Mathematica* von Whitehead/Russell. Ihre Gültigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, um ein Axiomensystem zu konstituieren. Anstelle von 4. und 5. ist denn auch von Bernays eine Verbesserung vorgeschlagen worden:

4a. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

Beweisen Sie auch die Gültigkeit von 4a.

2) Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Axiome, die Frege seinem System zugrunde legt:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$
3. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

5. $\neg\neg p \rightarrow p$
6. $p \rightarrow \neg\neg p$

3) 1. Wenn Hans spazieren geht, dann nimmt er den Hund mit.
Formalisieren Sie die Aussage 1. und kontrollieren Sie, ob sie dasselbe besagt wie: „Wenn Hans nicht spazieren geht, dann nimmt er den Hund nicht mit".
2. Wenn Werner mit einem Auto fährt und es ein Sportwagen ist, dann ist es ein Jaguar.
Ist 2. identisch mit (a) oder (b)
(a) $(W \wedge S) \rightarrow J$ (b) $W \rightarrow (S \wedge J)$
3. Wenn der Hund bellt, dann fürchte ich mich.
a) Wie lautet diese Aussage verneint?
b) Prüfen Sie das Resultat mit der Wahrheitstabelle nach.
4. Wenn Urs keinen Fehler macht, dann wird er belohnt. Folgt daraus logisch, daß ihm die Belohnung entzogen wird, falls er einen Fehler macht?
5. $[p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q] \leftrightarrow [p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)]$

4) Welche der folgenden Aussagen oder Aussagenverknüpfungen werden impliziert von $p \vee q$?
1. p
2. q
3. $p \vee q$
4. $p \wedge q$
5. $\neg p \vee q$
6. $p \wedge \neg q$
7. $\neg q \rightarrow p$
8. $p \leftrightarrow q$

5) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?
1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)$
2. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
4. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
5. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
6. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

2.5.1 Tautologie, Kontradiktion und Kontingenz

Tautologie und Kontradiktion nehmen in der Logik eine Sonderstellung ein. Es sind zwei Grenzfälle, mit denen wir vorsichtig umzugehen haben. Deshalb ist es nötig, genau zu wissen, was sie besagen.

Tautologie:
Als Beispiel einer Tautologie wollen wir die folgende Aussagenverknüpfung betrachten:

(1) $p \vee \neg p$

Daß es sich hier tatsächlich um eine Tautologie handelt, das läßt sich an der Bewertung erkennen. In der Spalte unter dem Hauptfunktor sind alle auftretenden Werte 1. Die wahren Bewertungen einer Aussagenverknüpfung bilden den Spielraum. Eine Tautologie ist demnach dadurch gekennzeichnet, daß sie den totalen Spielraum hat, während etwa die Aussagenverknüpfung ‚$p \wedge q$' nur den Spielraum der ersten Zeile hat.

Eine Tautologie ist trivialerweise wahr, weil sie den totalen Spielraum hat, denn aufgrund des totalen Spielraumes schließt sie keine Möglichkeit aus, und deshalb nennt man sie auch Leerformel. Eine Tautologie bleibt wahr, welcher konkrete Sachverhalt auch immer vorliegen mag. Deshalb sagt derjenige, der eine Tautologie ausspricht, nicht etwas Falsches, aber er vermittelt keine Information.
Es ist in weiten Kreisen üblich, eine leicht durchschaubare Tautologie zu belächeln. Das gilt etwa für die Behauptung „Es regnet oder es regnet nicht", was eine Einsetzung für das Beispiel (1) ist. Gewiß ist das trivial, aber Trivialität, Tautologie oder Leerformel darf weder mit Lächerlichkeit noch mit Einfalt verwechselt werden. Der tautologische Gehalt kann manchmal übersehen werden, weil er verschleiert ist, wie im Beispiel „Hans schläft oder ist wach". Was der gesunde Menschenverstand bei hinreichender Anstrengung noch zu bewältigen vermag, das gelingt ihm in abnehmendem Maße mit der Steigerung der Komplexität von Aussagenverknüpfungen. Spätestens bei einer Aussagenverknüpfung mit fünf Variablen wird auch für einen denkgewohnten Wissen-

schaftler eine Tautologie völlig undurchschaubar. Er ist dann auf eine Methode für die Wahrheitsauswertung angewiesen.

Der Laie fragt sich erstaunt, zu was Tautologien nützlich sein könnten, wenn sie zugegebenermaßen leer sind. Nun, die Leere bezieht sich einzig auf die Information hinsichtlich der Wirklichkeit. Dadurch werden Tautologien freilich nicht, wie man voreilig vermuten möchte, wertlos. Als immer wahre Aussagenverknüpfungen sind Tautologien logische Gesetze. Da sie die Eigenschaft haben, zum vornherein gültig zu sein, bedeutet das einerseits, daß sie keinen empirischen Sachverhalt hervorbringen, andererseits, daß sie ohne empirische Prüfung auskommen. Was aus logischen Gründen wahr ist, ist immer wahr; oder was dasselbe ist, es ist tautologisch oder trivialerweise wahr.

Kontradiktion:
Die Kontradiktion läßt sich allgemein so formulieren:

(2) $p \wedge \neg p$

Die Auswertung zeigt uns unter dem Hauptfunktor lauter Nullen. Damit haben wir den leeren Spielraum. Der leere Spielraum darf nicht verwechselt werden mit der Leerformel; die Kontradiktion ist die Verneinung einer Leerformel.

Wer eine Kontradiktion ausspricht, der behauptet zum vornherein etwas Unsinniges. Ebensowenig wie für die Tautologie muß für die Kontradiktion eine Auskunft von irgendeinem Sachgebiet eingeholt werden. Eine Kontradiktion ist eine logische Kategorie, der in der Wirklichkeit nichts entspricht. In der materiellen oder geistigen Welt finden wir nur Gegensätze wie hart–weich, gut–bös usw., aber nicht gleichzeitig hart und nicht hart. Eine vermeintliche Kontradiktion in der Wirklichkeit ist ein Anzeichen für eine mangelhafte Beschreibung eines Sachverhaltes.

Manchmal wird Kontradiktion gleichgesetzt mit Absurdität. Wenn etwa einem Politiker vorgeworfen wird, er rechtfertige die Sklaverei, dann mag er antworten: „Das ist absurd". Der Hörer versteht dann „das habe ich nie gesagt", „das kann ich gar nicht gesagt haben" usw. Wer das Wort „absurd" benutzt, der meint für gewöhnlich noch etwas Zusätzliches, nämlich, die Anschuldigung stehe in Widerspruch zu seinen oder zu allgemein anerkannten Prinzipien.

Nur weil Tautologien logische Gesetze und Kontradiktionen die Verneinung von logischen Gesetzen sind, haben sie diese unbeschränkte Gültigkeit. Während die Kontradiktion in der Rede unter allen Umständen zu vermeiden ist, besitzt die Tautologie eine Nützlichkeit, die sich allerdings nicht auf faktische Aussagen bezieht.
Kontingenz:
Unter Kontingenz verstehen wir hier eine Aussagenverknüpfung, die wahr oder falsch sein kann. Beispiel: „Wenn es Mittwoch ist, dann ist die Bäckerei geschlossen".

(3) $M \rightarrow G$

Die Wahrheitstafel würde eine Mischung zwischen „1" und „0" zeigen, nämlich in der zweiten Zeile eine „0", in allen übrigen eine „1". Da unter den vier Zeilen aus logischen Gründen keine einen Vorzug besitzt, so haben wir es mit einer logisch indeterminierten Form zu tun. Ob heute Mittwoch ist oder ein anderer Wochentag, ob die Bäckerei offen oder geschlossen ist, diese beiden Fragen können nicht mit logischen Mitteln entschieden werden. Die vorgängige Bestimmung des Wahrheitswertes der Einzelaussagen ist jedoch Voraussetzung für die Beurteilung der Gesamtwahrheit von Beispiel (3). Darin zeigt sich der Unterschied zu den Tautologien, die zum vornherein wahr, und der Kontradiktionen, die zum vornherein falsch sind, welchen Wahrheitswert auch immer die einzelnen Aussagen tatsächlich annehmen mögen.

Kontingente Aussagen sind logisch nicht eindeutig festgelegt und nur aufgrund weiterer empirischer Informationen entscheidbar. Ihr Wahrheitsgehalt kann nicht durch die Logik allein bestimmt werden.

Wenn in der Philosophiegeschichte von Kontingenz gesprochen wird, so ist darunter etwas anderes zu verstehen. Auf diesen Kontingenzbegriff werden wir in anderem Zusammenhang noch zu sprechen kommen.

Übung 2.5.1

1) Der kleine Prinz

„Der kleine Prinz blieb stehen, und da er müde war, gähnte er. ‚Es verstößt gegen die Etikette in Gegenwart eines Königs zu gähnen', sagt der Monarch. ‚Ich verbiete es dir'. ‚Ich kann es nicht unterdrücken', antwortete der kleine Prinz ganz verwirrt. ‚Ich habe eine weite Reise gemacht und habe nicht geschlafen'. ‚Dann', sagte der König, ‚befehle ich dir zu gähnen. Ich habe seit Jahren niemanden gähnen sehen, das Gähnen ist für mich eine Seltenheit. Los! Gähne noch einmal! Es ist ein Befehl'. ‚Das ängstigt mich, ich kann nicht mehr', stammelte der kleine Prinz und errötete. ‚Hm, hm!' antwortete der König. ‚Also dann befehle ich dir, bald zu gähnen und bald ...' Denn der König hielt in hohem Maße darauf, daß man seine Autorität respektiere. Er duldete keinen Ungehorsam. Er war ein absoluter Monarch. Aber da er sehr gütig war, gab er vernünftige Befehle." A. de Saint-Exupéry, Der kleine Prinz (München 1978) 3, 521.

Weisen Sie nach, daß sich der kleine Prinz strikte an den Befehl des Königs hält. Warum?

2) „Sätze, in denen das ‚x' vorkommt, gelten als Leerformeln. So jedenfalls in einem Wittgensteinischen oder in einem an ein solches sich anlehnenden Sprachspiel". H. Ogiermann, Metaphysik der Zukunft. Festschr. J. B. Lotz. (Hg.) de Vries (J.)/Brugger (W.) (Frankfurt a. M. 1973) 74.

Wie beurteilen Sie diese Behauptung (ohne bei Wittgenstein nachzusehen)?

3) „Das Sein ist nicht unmittelbar in sich widersprüchlich, es begründet jedoch die Möglichkeit des Widerspruchs, die jederzeit eintreten kann. Der Widerspruch selbst ist indessen ausgeschlossen." P.-C. Courtès, Teilhabe und Kontingenz bei Thomas von Aquin. (Hg.) K. Bernath, Thomas von Aquin. Philosophische Fragen (Darmstadt 1981) 2, 275.

1. Was ist von der Möglichkeit eines Widerspruchs zu halten, die jederzeit eintreten kann, während der Widerspruch ausgeschlossen ist?

2. Wie kann der Autor sein Anliegen verständlich formulieren?

4) „(1) Eine ‚Leerformel' von der Form: ‚X ist entweder A oder nicht A' enthält nämlich immerhin insofern eine ‚Information', das heißt, eine bestimmte Aussage über etwas, als in einem solchen Satz zumindest die mögliche Verwirklichung *zweier Fälle*, nämlich ‚A' und ‚nicht A', vorausgesetzt wird. (2) Ein solcher Satz wäre also zumindest insofern keine Leerformel, als er sowohl das Bestehen als auch das Nichtbestehen eines Sachverhalts einkalkuliert. (3) Formallogisch kann zwar der Satz: ‚X ist A oder nicht A' niemals falsch sein, weil er immer dann wahr ist, wenn eins von beiden wahr ist. (4) Empirisch dagegen kann ein Satz gerade dadurch falsch werden, daß er zwei Möglichkeiten unterstellt, von denen empirisch nur eine gegeben ist. (5) So ist der Satz: ‚Der Papst ist entweder katholisch oder er ist nicht katholisch' formal nicht zu beanstanden, empirisch aber falsch, da der Papst nur katholisch sein kann ... (6) Ein Satz, der in seinem ‚oder'-Teil eine andere Möglichkeit auch nur in Betracht zieht, müßte also insofern als falsch bezeichnet werden, als diese Möglichkeit im vorliegenden Fall tatsächlich nicht gegeben ist. (7) An unseren Beispielen läßt sich nun sehr schön zeigen, wie fragwürdig es ist, Sätze von der Form: ‚X ist A oder nicht A' als ‚Leerformeln' zu disqualifizieren." H. Seiffert, Einführung in die Wissenschaftstheorie (München ^{5}1972) *1*, 229–230.

Beurteilen Sie jeden einzelnen Satz ganz genau.

2.5.2 Die teilweisen Wahrheitstafeln

Bei der Auswertung von 2 Variablen bekommen wir in der Wahrheitstafel 4 Zeilen, mit 3 Variablen bereits 8 Zeilen. Sollten wir es gar mit 5 Variablen zu tun haben, dann wird es mühsam, die Wahrheitstafel mit den 32 Zeilen auszufüllen. Eine solche Wahrheitstafel gibt uns eine totale Übersicht über alle Wahrheitswerte. Oft sind wir jedoch gar nicht an solcher Vollständigkeit interessiert; statt dessen möchten wir manchmal mit geringem Aufwand herausbekommen, ob eine Satzverknüpfung tautologisch ist. Das kann indirekt nachgewiesen werden. In der Praxis erleichtern Teilweise-Wahrheitstafeln die Auswertung.

Von einer tautologischen Formel weiß man, daß sie immer wahr ist. Nun gehen wir von der Annahme aus, die zu prüfende Formel sei falsch. Das wird angedeutet, indem unter den Hauptfunktor provisorisch der Wahrheitswert „0" gesetzt wird. Wenn sich aus den Folgerungen ein Widerspruch ergibt, so ist das ein Beweis dafür, daß die Annahme nicht berechtigt war und es sich tatsächlich um eine tautologische Formel handelt. Entsteht jedoch kein Widerspruch, so wird dadurch die falsche Annahme bestätigt und es handelt sich nicht um eine Tautologie.

Beispiel:

$$p \leftrightarrow p$$

Wir nehmen an, die Äquivalenz sei falsch. Daher setzen wir unter das Äquivalenzzeichen eine „0". Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

a) ‚p' sei wahr. Dann wird unter ‚p' eine 1 gesetzt. Das zweite ‚p' ist eine Einsetzung oder eine Wiederholung der gleichen Variable, muß also ebenfalls mit „1" unterstellt werden. Die Äquivalenz zweier wahrer Aussagen ist jedoch wahr, so daß sich die ursprüngliche Annahme „0" als falsch erwiesen hat.

b) ‚p' sei falsch. Dann belegen wir die Variable ‚p' mit „0". Für das zweite ‚p' muß ebenfalls eine 0 gesetzt werden. Die Äquivalenz zweier falscher Aussagen ist aber wahr, so daß wir wiederum 1 bekommen und sich die Annahme als falsch herausgestellt hat. Infolge der gescheiterten Widerlegung hat sich das Beispiel als wahr erwiesen.

Die Widerlegung der falschen Annahme ist auf zwei Arten durchgeführt worden. Zur Überprüfung genügt eine der beiden Kontrollen a) oder b). Hier sollte nur gezeigt werden, daß ein zufälliges Herausgreifen eines Wahrheitswertes die Prüfung nicht beeinflußt.

Weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{cccccccc}
(p & \vee & q) & \rightarrow & \neg & (p & \wedge & q) \\
 & 1 & & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Aufgrund der Annahme, die Aussage sei falsch, setzen wir eine 0 unter die Implikation, unter den Hauptfunktor. Eine Implikation ist nur falsch, wenn der Vordersatz wahr und der Nachsatz falsch ist. Deshalb setzen wir unter den Hauptfunktor des Vordersatzes eine 1, unter den Nachsatz eine 0. Beim Vordersatz hätten wir nun drei verschiedene Fälle zu überprüfen. Daher wenden wir uns dem einfacheren Nachsatz zu. Wenn ‚$\neg (p \wedge q)$' falsch ist, dann muß die Bejahung, also ‚$(p \wedge q)$' wahr sein. Eine Konjunktion ist nur wahr, wenn alle Argumente wahr sind. Folglich sind ‚p' und ‚q' wahr. Dann ist aber die Verneinung dieser Konjunktion, also ‚$\neg (p \wedge q)$' falsch, was mit der ursprünglichen Annahme übereinstimmt. Es ist also nicht gelungen, die Annahme von der Falschheit zu widerlegen. Deshalb ist das Beispiel tatsächlich falsch.

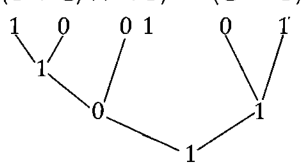
Wenn uns der Wahrheitswert der Aussagen bekannt ist, dann können wir auch den umgekehrten Weg wählen.

Beispiel:

Wilhelm Tell war ein Schweizer	T
Winston Churchill war ein Franzose	C

Falls Tell ein Schweizer oder Churchill ein Franzose, jedoch Tell kein Schweizer war, dann gilt, daß wenn Churchill ein Franzose war, Tell ein Schweizer war.

$$((T \vee C) \wedge \neg T) \rightarrow (C \rightarrow T)$$



Übung 2.5.2

1) Prüfen Sie die Wahrheit der folgenden Aussagenverknüpfung mit Hilfe von teilweisen Wahrheitstafeln

1. $(p \vee p) \rightarrow (p \wedge p)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$

3. $\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \wedge p) \rightarrow (q \wedge r)]$
5. $[p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow \neg q]$
6. $[p \leftrightarrow (\neg q \vee p)] \rightarrow (q \wedge \neg p)$
7. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$
8. $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

2) Wenn Urs und Gabriela in der Schule sind, dann spielt Heidi auf der Flöte, und wenn Othmar auf dem Cembalo spielt, dann ist Gabriela nicht in der Schule, und wenn Franz auf Besuch kommt, dann hört Heidi mit der Flöte auf zu spielen, und wenn alles dies zutrifft, dann spielt Othmar auf dem Cembalo, vorausgesetzt, daß Urs in der Schule ist und Franz auf Besuch kommt. (Ockham, 14. Jahrhundert. Vgl. J. Salamucha, Die Aussagenlogik bei Wilhelm Ockham. Franziskan. Studien 32 (1950) 116.)
Prüfen Sie 2) mit einer teilweisen Wahrheitstafel.

3) Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.
1. Jede Disjunktion, bei der ein Argument eine Tautologie ist, ist tautologisch.
2. Jede Disjunktion, bei der ein Argument eine Kontradiktion ist, ist als ganze kontradiktorisch.
3. Jede Konjunktion mit einer Tautologie ist eine Tautologie.
4. Jede Konjunktion mit einer Kontradiktion ist eine Kontradiktion.
5. Jede Implikation, deren Vordersatz eine Tautologie ist, ist eine Tautologie.
6. Jede Implikation, deren Vordersatz eine Kontradiktion ist, ist eine Kontradiktion.
7. Jede Implikation, deren Nachsatz eine Tautologie ist, ist eine Tautologie.
8. Jede Implikation, deren Nachsatz eine Kontradiktion ist, ist eine Kontradiktion.
9. Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie.
10. Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion.

11. Jede Implikation, deren Vordersatz kontingent ist, ist kontingent.
12. Jede Implikation, deren Nachsatz kontingent ist, ist kontingent.

2.5.3 Zwischenergebnis

Der verständnisvolle Umgang mit den Wahrheitstafeln verschafft uns mindestens drei wertvolle Einsichten:

– Die Aussagenlogik besitzt ein Entscheidungsverfahren. Darunter verstehen wir ein mechanisches Vorgehen, bei dessen Anwendung jede Aussagenverknüpfung nach einer endlichen Anzahl von Schritten auf ihre Gültigkeit hin eindeutig geprüft werden kann. Wahrheit oder Falschheit kann aufgrund einer allgemein anerkannten und überprüfbaren Methode nachgewiesen werden, es bleibt nicht mehr der Einsicht des einzelnen überlassen. Dieses rechnungsähnliche Prüfverfahren, ja schon der ganze Aufbau, hat dazu geführt, von einem Kalkül zu reden.

– Bei Aussagenverknüpfungen kommt dem Spielraum große Bedeutung zu. Liegt der totale Spielraum vor wie bei der Tautologie, dann haben wir eine informationsleere Verknüpfung vor uns. Der leere Spielraum ist gleichbedeutend mit einem Widerspruch. Aus der Gegenüberstellung ergibt sich, daß jene Behauptungen aussagekräftiger sind, die den eingeschränkteren Spielraum haben. Deshalb ist der Informationsgehalt einer Konjunktion wertvoller als derjenige einer Disjunktion.

– Logische Gesetze sind Tautologien oder allgemeingültige Strukturgesetze. Wissenschaftler neigen manchmal dazu, sie und die Folgerungen aus ihnen für notwendig zu halten. Das kann durchaus richtig verstanden werden. Nur bleibt zu beachten, daß es noch einen strengeren Notwendigkeitsbegriff gibt; er steht korrelativ zur Allgemeingültigkeit, die hier nicht absolut behauptet wird. Die Allgemeingültigkeit der Aussagenlogik bezieht sich auf den Rahmen, in dem die Definitionen aufgestellt wurden. Die Abklärung der Frage, wie weit Tautologien Denk- oder gar Seinsgesetze ausdrücken, gehört in den Bereich der Erkenntnistheorie, wozu hier nicht Stellung genommen wird.

2.6 Die Deduktion

„Eine einzelne Aussage ist wahr, wenn sie mit der Wirklichkeit übereinstimmt". Solche Aussagen sind Beschreibungen. Wenn wir argumentieren, dann ist vieles an unserer Rede nicht beschreibend, sondern gefolgert. Eine gültige Folgerung setzt jedoch voraus, daß die logischen Strukturen respektiert werden. Mit Hilfe von Wahrheitstafeln können wir diese Bedingung zwar nachprüfen. Doch bleibt weiterhin offen, welche Regeln wahrheitskonservierend sind, d. h. welche Regeln zu Schlüssen führen ohne den in den Prämissen enthaltenen Wahrheitswert zu ändern.

Die Regeln dienen dazu, aus unseren Behauptungen weitere wahre Behauptungen abzuleiten. Grundsätzlich kommt man mit sehr wenigen Regeln aus. Eine größere Anzahl erlaubt indessen kürzere Ableitungen. Da insbesondere dem Anfänger kürzere Ableitungen durchsichtiger erscheinen, wollen wir uns den Umgang mit verhältnismäßig vielen Regeln aneignen. Wir verzichten also auf Sparsamkeit zugunsten einer verständlicheren Darstellung.

Unsere zwanzig Regeln unterteilen wir in zwei Gruppen: Schluß- und Äquivalenzregeln. Dazu sei noch bemerkt, daß die Kinder in den frühesten Jahren die meisten der hier besprochenen Regeln zusammen mit der Sprache erlernen.

Bei der Darstellung der Regeln wählen wir einen einheitlichen Ablauf. Zuerst wird die Regel in ihrer allgemeinen Formulierung vorgelegt. Daran schließen sich soweit nötig Bemerkungen an, gefolgt von einer unterschiedlichen Anzahl von Beispielen. Schließlich kann der Leser an den Übungen sein Verständnis der Regeln nachprüfen.

Schlußregeln

1. Modus ponens (MP)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \qquad q \end{array}}$$

Oberhalb des Striches stehen die Prämissen, unterhalb alles, was gefolgert werden darf. Wir haben es demnach beim Modus ponens mit zwei Prämissen zu tun, aus denen eine einzige Folgerung abzuleiten ist. In Worten können wir die Regel so ausdrücken: Wenn eine Implikation gegeben ist und zugleich ihr Vordersatz, dann dürfen wir auf ihren Nachsatz schließen. Es handelt sich um Schlüsse der folgenden Art:

1. Wenn Kurt Bundesrat ist, dann wohnt er in Bern
2. Kurt ist Bundesrat
3. Also wohnt er in Bern

Dieser Schluß kommt uns natürlich vor. Der Eindruck der Selbstverständlichkeit rührt daher, weil eine Regel verwendet wird, mit deren Allgemeingültigkeit wir längst vertraut sind, nämlich die Abtrennungsregel oder Regel des Modus ponens.

Zur Überprüfung einer Deduktion wählen wir eine einheitliche Schreibweise. Wir beginnen mit der Formalisierung der Prämissen. Für das genannte Beispiel erhalten wir:

1. $A \rightarrow B$
2. A

Nachdem alle Prämissen aufgezählt sind, wird rechts von der letzten Prämisse das gesuchte Resultat in $\underline{/\quad\quad}$ hingesetzt. Bei unserem Beispiel ist es ‚B'. Das sieht dann so aus:

1. $A \rightarrow B$
2. A $\qquad \underline{/\quad B}$

Die weiteren Schritte werden fortlaufend numeriert. Auf der rechten Seite zeigen die Zahlen und Regelabkürzungen an, aus welchen Zeilen und mit welchen Regeln die betreffende Behauptung erarbeitet wurde. Dann sieht unser Beispiel, vollständig formalisiert, so aus:

1. $A \rightarrow B$
2. A $\qquad \underline{/\therefore B}$
3. B $\qquad$ 1, 2, MP

„MP" bedeutet, daß mit der Regel Modus ponens geschlossen wurde und zwar unter Verwendung der ersten und zweiten Prämisse. Nachdem uns diese Regel tatsächlich zum gesuchten ‚B' geführt hat, setzen wir davor noch drei Punkte, so: .·. Sie bedeuten: Quod erat demonstandum = was zu beweisen war.

Weitere Beispiele:

1. Wenn es nicht regnet, dann besuche ich die Tante
2. Es regnet nicht
3. Also besuche ich die Tante

Formal:

1. $\neg R \rightarrow T$	
2. $\neg R$	/.·. T
3. T	1, 2, MP

Aus diesem Beispiel ersehen wir, daß es unerheblich ist für die Anwendung des Modus ponens, ob der Vordersatz bejaht oder verneint ist. Die Regel darf immer dann angewandt werden, wenn die zusätzliche Prämisse genau dem Vordersatz entspricht. Deshalb gilt auch:

1. Wenn es Samstag oder Sonntag ist, dann geht Gisela ins Konzert
2. Es ist Samstag oder Sonntag
3. Also geht sie ins Konzert.

1. $(S \vee T) \rightarrow K$	
2. $S \vee T$	/.·. K
3. K	1, 2, MP

Falsch wäre jedoch die folgende Ableitung:

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$	
2. A	/ B
3. B	

Mit der einzigen Zusatzprämisse ‚A' darf aus der Implikation in 1. nichts abgeleitet werden.

Übung 2.6.1

1) 1. Wenn das Baby schläft, dann ist es friedlich

2. Das Baby schläft
3. Also ist es friedlich

2) 1. Wenn der Käse Löcher hat, dann ist es Emmentaler
2. Der Käse ist Emmentaler
3. Also hat er Löcher

3) 1. $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (f \vee s)$
2. $(p \wedge q) \vee r$ $\quad$ /______

4) Wie ist die Redeweise logisch zu erklären: „Wer A sagt, muß B sagen"?

2. Modus tollens (MT)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\neg q \quad} \\ \quad \neg p \end{array}}$$

Die Regel des Modus tollens kommt zur Anwendung, wenn außer der Implikation als Zusatzprämisse die Verneinung des Nachsatzes vorliegt. Dann darf auf die Verneinung des Vordersatzes geschlossen werden.

1. Wenn Markus den Zug verpaßt hat, dann ist er in Berlin geblieben
2. Er ist nicht in Berlin geblieben
3. Also hat er den Zug nicht verpaßt

1. $V \rightarrow B$
2. $\neg B$ $\quad$ $\underline{/ \therefore \neg V}$
3. $\neg V$ $\quad$ 1, 2, MT

Der Anfänger unterläßt es oft aus Unachtsamkeit, den mit Hilfe des Modus tollens erschlossenen Vordersatz zu verneinen, insbesondere dann, wenn er in der Implikation schon verneint ist.

Beispiel:
1. Wenn es nicht kalt ist, dann trägt Silvia keinen Pelz.
2. Nun trägt sie einen Pelz.
3. Also ist es kalt.

1. $\neg K \rightarrow \neg P$
2. P $\quad /\therefore K$
3. $\neg\neg K$ $\quad$ 1, 2, MT

Wie wir schon bei der Auswertung der Wahrheitstafeln gesehen haben, so hebt sich auch hier die doppelte Negation auf. Das ist so selbstverständlich, daß man beim inhaltlichen Überlegen des Beispiels die doppelte Negation meistens unterdrückt. Wir wollen uns allgemein merken: eine gerade Anzahl von Negationen hebt sich auf.

Übung 2.6.2

1) Wenn Gabriela weiter spielt, dann kommt sie zu spät. Gabriela kommt nicht zu spät. Also spielt sie nicht weiter.

2) Wenn es schneit, dann reisen die Touristen nicht ins Engadin. Die Touristen reisen ins Engadin. Also?

3) 1. $(p \vee q) \rightarrow \neg (r \wedge \neg s)$

   2. $r \wedge \neg s$ $\quad$ /______

4) Wenn Protagoras gegen die Götter geschrieben hat, dann wurde er gemäß dem Strafgesetz zu Recht verurteilt. Wenn er nicht gegen die Götter geschrieben hat, dann ist seine Einleitung neu zu überdenken. Er ist nicht zu Recht verurteilt worden. Also ist seine Einleitung neu zu überdenken.

Aufgrund der beiden Regeln Modus ponens und Modus tollens ergibt sich bereits eine bedeutsame Einsicht: Aus einer Implikation darf nichts geschlossen werden. Um zu einem gültigen Schluß zu kommen, ist eine Zusatzprämisse unerläßlich. Sofern diese Zusatzprämisse identisch ist mit dem Vordersatz der Implikation, dann schließen wir mit dem Modus ponens; ist sie identisch mit der Negation des Nachsatzes – also nicht mit dem Nachsatz selber – so schließen wir auf die Negation des Vordersatzes. Die übrigen Schlüsse sind nicht gültig.

1. Wenn der Bewerber sich nicht ausweist, bekommt er das Dokument nicht.

2. Er weist sich aus.
3. Also bekommt er das Dokument.

$$\begin{array}{ll} 1.\ \neg A \rightarrow \neg D & \\ 2.\ A & /\ \underline{\ \ D\ \ } \\ 3.\ D & ? \end{array}$$

Dieser Schluß ist falsch, weil die zweite Prämisse nicht identisch ist mit dem Vordersatz der Implikation. Noch weniger ist die 2. Prämisse identisch mit der Verneinung des Nachsatzes. Deshalb darf auch nicht mit Modus tollens geschlossen werden. Modus ponens und Modus tollens – sowie ihre später zu behandelnden Umformungen – sind aber die beiden einzigen gültigen Regeln für eine Implikation. Da die Voraussetzung für keine der beiden gegeben ist, dürfen wir im vorliegenden Fall nicht schließen. Der Verstoß gegen eine der beiden Regeln heißt Rückschluß oder Fallacia consequentis. Es sind die am häufigsten anzutreffenden Logikfehler der elementaren Logik.

Übung 2.6.2

5) Wie muß im letzgenannten Beispiel die 2. Prämisse lauten, damit ein gültiger Schluß zustande kommt?

Sind die folgenden Schlüsse korrekt, oder was folgt aus den Prämissen?

6) Wenn die Katze einen Hund sieht, dann macht sie einen Buckel. Sie macht einen Buckel. Also sieht sie einen Hund.

7) Wenn Isabella Italienerin ist, dann ist sie Europäerin. Isabella ist nicht Italienerin. Also ist sie nicht Europäerin.

8) Wenn $2 \cdot 2$ nicht 4 ist, dann ist der Mond ein Würfel. Nun ist aber $2 \cdot 2 = 4$. Also?

9) Wenn Pythagoras ein Amerikaner war, dann ist im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$. Also?

10) Wenn Thomas die Bibel für göttliche Offenbarung hält,

dann ist er nicht ungläubig. Thomas ist nicht ungläubig. Also hält er die Bibel für geoffenbart.

11) „Der Philosoph, der tritt herein
und beweiset Euch, es müßt so sein:
Das Erst' wär so, das Zweite so,
und drum das Dritt' und Vierte so.
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär,
das Dritt' und Viert' wär nimmermehr."
Goethe, Faust, Szene IV, Auftritt 2; 399–404

3. Simplifikation (Simpl.)

$$\boxed{\frac{p \wedge q \wedge r}{p}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{p \wedge q \wedge r}{q}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\frac{p \wedge q \wedge r}{r}}$$

Aus einer Konjunktion darf ohne Zusatzprämisse geschlossen werden. Überdies dürfen alle Argumente einzeln behauptet werden.

Beispiele:

1. Olbers war Arzt und Hobbyastronom
2. Also war er Arzt

Oder: 2a. Also war er Hobbyastronom

1. $A \wedge H$	$\underline{/\therefore A}$
2. A	1a, Simpl.
oder	
2a. H	1b, Simpl.

1. Gespielt wird die Jupitersinfonie, die Unvollendete und Pacific 231
   Also wird die Pacific 231 gespielt

1. $J \wedge U \wedge P$	$\underline{/\therefore P}$
2. P	1c, Simpl.

Innerhalb einer Deduktion dürfen alle zugelassenen Regeln beliebig oft wiederholt werden.

Beispiel:

1. Wenn es Tag ist, dann gibt es Licht

2. Der Mond ist verschwunden und es ist Tag
3. Also gibt es Licht

$$\begin{array}{ll} 1.\ T \rightarrow L & \\ 2.\ V \wedge T & \underline{/\quad L} \end{array}$$

Um zielstrebig vorzugehen, empfiehlt es sich, gedanklich vom gesuchten Resultat auszugehen. Gesucht wird ‚L'. Es kommt nur in der 1. Prämisse vor. Dort ist es allerdings mit einer Implikation verknüpft. Es ließe sich herausholen, wenn wir ‚T' hätten. In der Prämisse 2. ist ein ‚T' enthalten, das sich aufgrund der Simplifikationsregel erschließen läßt. Bei Anwendung zweier Regeln erhalten wir folgende Deduktion:

$$\begin{array}{ll} 1.\ T \rightarrow L & \\ 2.\ V \wedge T & \underline{/\therefore L} \\ 3.\ T & 2b,\ \text{Simpl.} \\ 4.\ L & 3,1,\ \text{MP} \end{array}$$

Übung 2.6.3

1) Wenn Gebhard zu einem Drink eingeladen wird, dann ist er lustig. Er faucht die Sekretärin an und ist nicht lustig. Also?

2) Wenn der Taxifahrer nicht arbeitet, dann geht er stempeln. Es ist Herbst, kalt, regnerisch und er arbeitet nicht. Also geht er stempeln.

3) Wenn Churchill ein Franzose war, dann trank er Champagner, aber wenn er ein Engländer war, dann trank er Whisky. Er war Engländer. Also trank er Whisky.

4) Die Dachse bohren Höhlen, die Füchse wohnen darin und die Jäger machen sich auf die Jagd. Wenn die Dachse nicht ausgezogen sind, dann wohnen die Füchse nicht in der Höhle. Also sind die Dachse ausgezogen.

5) Wenn ein Fahrgast den halben Preis bezahlt oder eine Ermäßigung bekommt, dann ist er Soldat, Student oder Rentner. Nun ist der Fahrgast weder Soldat noch Student noch

Rentner. Also bezahlt er weder halbe Taxe noch bekommt er eine Ermäßigung.

6) Wenn das nach dem ersten Weltkrieg ausgebrochene Kriegszittern nicht von den Nerven herrührte, dann war die Analyse von Oppenheimer richtig. Nonne ging psychotherapeutisch vor und die Analyse von Oppenheimer bewährte sich nicht. Wenn das Kriegszittern von den Nerven ausging, dann konnte es nicht anatomisch behandelt werden. Folglich konnte das Kriegszittern nicht anatomisch behandelt werden.

4. Konjunktion (Konj.)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \\ \underline{q\qquad} \\ p \wedge q \end{array}}$$

Die Konjunktionsregel erlaubt, Einzelaussagen durch Konjunktionen zu verbinden. Es ist die inverse Regel zur Simplifikation.

Beispiel:

1. Olbers war Arzt
2. Olbers war Hobbyastronom
3. Also war er Arzt und Hobbyastronom

1.	A	
2.	H	$\underline{/.\because\ A \wedge H}$
3.	$A \wedge H$	1, 2, Konj.

Übung 2.6.4

1) Es gibt Kastanien und Unterhaltung. Es gibt belegte Brote und das Nachtessen ist um sieben Uhr. Wenn das Nachtessen um sieben ist und es Kastanien gibt, dann ist es Sauserabend. Also ist es Sauserabend und es gibt Unterhaltung.

2) 1. $\neg t$
   2. $p \wedge q$

3. $r \wedge p$
4. $(r \wedge q) \rightarrow (s \rightarrow t)$ $\quad \underline{/ \quad p \wedge \neg s}$

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben die genauen Schritte und Regeln an:

3)
1. $p \rightarrow q$
2. $((r \vee s) \rightarrow z) \wedge (\neg t \wedge u)$
3. $(v \vee w) \wedge (\neg t \wedge x)$
4. $(v \rightarrow w) \wedge p$
5. $y \rightarrow t$ $\quad \underline{/\therefore\ q \wedge \neg y}$
6. p
7. q
8. $\neg t \wedge u$
9. $\neg t$
10. $\neg y$
11. $q \wedge \neg y$

4)
1. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
2. $(s \wedge t) \rightarrow u$
3. $(v \vee w) \wedge (t \wedge \neg r) \wedge (\neg x \vee y)$
4. $\neg z \wedge s$ $\quad \underline{/\therefore\ u \wedge \neg (p \rightarrow q)}$
5. $t \wedge \neg r$
6. $\neg r$
7. $\neg (p \rightarrow q)$
8. s
9. t
10. $s \wedge t$
11. u
12. $u \wedge \neg (p \rightarrow q)$

5. Hypothetischer Syllogismus (HS)

$$\boxed{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}}$$

Der Hypothetische Syllogismus ist als Kettenschluß bekannt. In der einfachsten Form besteht er aus zwei Implikationen, deren erster Nachsatz von der zweiten Prämisse als Vordersatz aufgenommen wird und dadurch die Verbindung herstellt.

Beispiele:
1. Wenn die Times eingeht, dann fehlt es an Informationen.
2. Wenn die Löhne steigen, dann geht die Times ein.
3. Also, wenn die Löhne steigen, fehlt es an Informationen.

1.	$T \rightarrow I$	
2.	$L \rightarrow T$	$\underline{/ \therefore L \rightarrow I}$
3.	$L \rightarrow I$	2, 1, HS

1. Wenn die Hypothekarzinse steigen, gehen die Mietpreise nicht zurück
2. Wenn die Mietpreise nicht zurückgehen, dann sinkt der Lebensstandard
3. Also wenn die Hypothekarzinse steigen, sinkt der Lebensstandard.

1.	$H \rightarrow \neg M$	
2.	$\neg M \rightarrow L$	$\underline{/ \therefore H \rightarrow L}$
3.	$H \rightarrow L$	1, 2, HS

Übung 2.6.5

1) Wenn es der Pfarrer eilig hat, dann geht er ziellos an die Predigt heran. Wenn er ziellos an die Predigt herangeht, dann wird sie nicht kurz. Also wenn es der Pfarrer eilig hat, dann wird die Predigt nicht kurz.

2) Es ist nicht etwas Farbiges. Nur wenn es etwas Farbiges ist, ist es gelb. Wenn es eine Gelbmeise ist, dann ist es gelb. Also ist es nicht eine Gelbmeise.

3) Wenn der Lord das Haus vergrößert, dann braucht er ein neues Zimmermädchen. Wenn er einen Fahrer einstellt, dann vergrößert er das Haus. Wenn er einen Rolls Royce kauft, dann stellt er einen Fahrer ein. Also wenn er einen Rolls Royce kauft, braucht er ein neues Zimmermädchen.

4) Wenn Hildegard an ihre Blumen und an den Hund denkt,

dann macht sie sich Sorgen. Sie hat am 2. August Geburtstag. Wenn sie Rosen bekommt, dann denkt sie an ihre Blumen und an den Hund. Wenn der 2. August einfällt, dann bekommt sie Rosen. Also macht sich Hildegard Sorgen.

5) Wenn der Lehrling keine Lust hat an der Arbeit, dann wird er entlassen. Er sucht nicht nach einer neuen Stelle. Wenn er entlassen wird, dann sucht er eine neue Stelle. Wenn es heiß ist, dann hat er keine Lust an der Arbeit. Also ist es nicht heiß.

6) Wenn Meyer bei der Wahl anwesend ist, dann wird er Präsident. Er rechnet jeden Monat ab und bezahlt den Vereinsbeitrag pünktlich. Wenn er Mitglied ist, dann ist er bei der Wahl anwesend. Wenn er den Beitrag pünktlich bezahlt, dann ist er Mitglied. Also wird Meyer Präsident.

7) Wo Glaube, da Liebe; wo Liebe, da Frieden; wo Frieden, da Segen; wo Segen, da Gott; wo Gott, keine Not.

a) Was folgt daraus?
b) Darf die Regel HS bei einer Wortkette eingesetzt werden?

8)
1. $p \rightarrow q$
2. $r \wedge s \wedge t$
3. $u \rightarrow p$
4. z
5. $t \rightarrow u$ $\underline{/\quad q}$

Hinweis: Wie schon bei der kurzen Ableitung in 2.6.3, so dürfen wir erst recht bei längeren Deduktionen die Konklusion nicht aus dem Auge verlieren. Gesucht wird ‚q'. Es ist in der 1. Prämisse enthalten, jedoch durch eine Implikation mit ‚p' verknüpft. Aus der 3. Prämisse könnte ‚p' herausgeholt werden, vorausgesetzt, daß noch ‚u' gegeben wäre. ‚u' ist ferner in der 5. Prämisse vorhanden, aber auch wieder herauszuholen nur wenn ‚t' gegeben ist. ‚t' ist aus der zweiten Prämisse herauszuholen. Nun läßt sich der ganze Gedankengang rückwärts durchführen, indem man mit ‚t' beginnt.

9) 1. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $(q \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow s)$
3. $(q \rightarrow s) \rightarrow [t \rightarrow (s \rightarrow u)]$
4. $t \wedge \neg p$ $\qquad / \; q \rightarrow u$

6. Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad} \\ \quad q \end{array}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\quad \neg q} \\ p \end{array}}$$

Wird durch eine Zusatzprämisse das eine Argument einer Disjunktion verneint, dann bleibt das andere übrig.

1. Josef raucht Pfeife oder Zigarren
2. Er raucht nicht Pfeife
3. Also raucht er Zigarren

1. $P \vee Z$	
2. $\neg P$	$/ \therefore Z$
3. Z	2, 1, DS

1. Stephan studiert in Genf oder Luzern.
2. Er studiert nicht in Luzern.
3. Also studiert er in Genf.

1. $G \vee L$	
2. $\neg L$	$/ \therefore G$
3. G	2, 1, DS

Übung 2.6.6

1) Der Beweis ist sophistisch oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft und die Logik versagt nicht. Also ist der Beweis sophistisch.

2) Es regnet oder es regnet nicht. Nun regnet es. Folglich regnet es nicht.

3) Pettenkofer lebte weiter oder seine Hypothese versagte.

Wenn die Hypothese versagte, dann wurde er in der Hygiene abgeschrieben. Er verschluckte öffentlich eine Kultur Cholerabazillen und wurde in der Hygiene nicht abgeschrieben. Also lebte Pettenkofer weiter.

4) Der Fischer trinkt gerne Wein und der Müller singt im Männerchor. Wenn der Metzger Hausbesitzer ist, dann wählt er nicht eine Linkspartei. Der Metzger ist Hausbesitzer oder der Müller singt nicht im Männerchor. Also trinkt der Fischer gern ein Glas Wein und der Metzger wählt nicht eine Linkspartei.

5) Wenn Schopenhauer so früh aufstand wie Kant, dann hat er ihn in dieser Hinsicht gut nachgeahmt. Schopenhauer war eingebildet, liebte die Demokratie nicht und hatte Wutanfälle. In einem Wutausbruch warf er die Näherin die Stiege hinunter. Er stand so früh auf wie Kant oder war nicht eingebildet. Also hat er die Näherin die Stiege hinuntergeworfen und Kant im Frühaufstehen gut nachgeahmt.

6) Dorothea bekommt ein Pferd oder ein Auto. Wenn sie ein Auto bekommt, fährt sie auf der Autobahn. Wenn sie ein Pferd erhält, dann reitet sie im Wald. Sie geht zu Fuß oder mit dem Zug, schwimmt und steigt auf die Berge, aber reitet nicht im Wald. Also fährt sie auf der Autobahn.

7. Addition (Add.)

$$\boxed{\frac{p}{p \vee q}}$$

Zu einer Aussage darf jede beliebige weitere Aussage durch Disjunktion hinzugefügt werden. Die Regel heißt allerdings nicht Disjunktions-, sondern Additionsregel.

1. Hermann trinkt Bier
2. Also trinkt Hermann Bier oder Wein

1. B	$/ \therefore B \vee W$
2. $B \vee W$	1, Add.

1. Der Mond ist rund
2. Also ist der Mond rund oder die Tannen sind aus Holz.

1. R	$/\therefore R \vee T$
2. $R \vee T$	1, Add.

1. Wenn Albert Trompete spielt oder Brigitte auf dem Klavier klimpert, dann ärgert sich Claudia.
2. Albert spielt Trompete.
3. Also ärgert sich Claudia

1. $(A \vee B) \to C$	
2. A	$/\therefore C$
3. $A \vee B$	2, Add.
4. C	3, 1, MP

1. Wenn Alfred und Bernhard ein Geschäft eröffnen, dann, wenn Cäsar auch dabei ist, wird es Konkurs und Verleumdung geben.
2. Alfred, Bernhard und Cäsar eröffnen ein Geschäft.
3. Also gibt es Konkurs oder Verleumdung.

1. $(A \wedge B) \to [C \to (K \wedge V)]$	
2. $A \wedge B \wedge C$	$/\therefore K \vee V$
3. $A \wedge B$	2ab, Simpl.
4. $C \to (K \wedge V)$	3, 1, MP
5. C	2c, Simpl.
6. $K \wedge V$	5, 4, MP
7. K	6a, Simpl.
8. $K \vee V$	7, Add.

Übung 2.6.7

1)	1. $(\neg p \vee q) \to r$	
	2. $(s \wedge r) \to t$	
	3. $t \to u$	
	4. $u \wedge q \wedge s$	$/ q \vee t$
2)	1. $p \to q$	
	2. $p \vee r$	
	3. $r \to (r \to s)$	
	4. $\neg q$	$/ s \vee q$

3) 1. $p \wedge q$
2. $q \rightarrow (r \wedge s)$
3. $(r \vee s) \rightarrow (s \leftrightarrow p)$ $\quad$ $\underline{/\ s \leftrightarrow p}$

4) 1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow s$
3. $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow t)$
4. $s \rightarrow p$ $\quad$ $\underline{/\ s \rightarrow t}$

8. Konstruktives Dilemma (KD)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad q \vee s \end{array}}$$

In der Umgangssprache ist das Konstruktive Dilemma kaum gebräuchlich. Deshalb wirken auch die Beispiele etwas gekünstelt. Immerhin ist diese Regel genau dann nützlich, wenn zwei Implikationen vorliegen und dazu eine Disjunktion, die aus den Vordersätzen der beiden Implikationen besteht.

1. Wenn es regnet, dann wird die Straße naß, und wenn es kalt ist, dann heizen wir.
2. Es regnet oder es ist kalt.
3. Also ist die Straße naß oder wir heizen.

1.	$(R \rightarrow N) \wedge (K \rightarrow H)$	
2.	$R \vee K$	$\underline{/\therefore\ N \vee H}$
3.	$N \vee H$	1, 2, KD

1. Wenn der Vater früh kommt, macht Urs die Hausaufgaben rechtzeitig, und wenn die Mutter spät kommt, spielt Urs mit Gabriela.
2. Urs spielt nicht mit Gabriela
3. Der Vater kommt früh oder die Mutter spät
4. Also macht Urs die Hausaufgaben rechtzeitig

1.	$(V \rightarrow H) \wedge (M \rightarrow S)$	
2.	$\neg S$	
3.	$V \vee M$	$\underline{/\therefore\ H}$
4.	$H \vee S$	3, 1, KD
5.	H	2, 4, DS

Übung 2.6.8

1) Wenn Pia Überstunden macht, dann ist sie müde, und wenn sie in der Stadt wohnt, hat sie zu wenig Sonne. Sie macht Überstunden oder sie wohnt in der Stadt. Also ist sie müde oder hat zu wenig Sonne.

2) Wenn Stephan portugiesisch spricht, dann geht er nach Brasilien. Wenn er englisch spricht, dann geht er in die Wissenschaft. Wenn er türkisch spricht, dann macht er Kaffee. Er spricht englisch oder russisch. Wenn er russisch spricht, dann ist er als Politiker verdächtig. Also geht er in die Wissenschaft oder ist als Politiker verdächtig.

3) Der Logiker ist frei in der Wahl der Regeln oder er benutzt die Simplifikation oder das Konstruktive Dilemma. Wenn er die Simplifikation anwendet, dann ist er frei in der Wahl der Regeln, und wenn er das Konstruktive Dilemma benutzt, dann gelingt ihm die Lösung schneller. Wenn er frei in der Wahl der Regeln ist oder schneller zur richtigen Lösung kommt, dann ist er frei in der Wahl der Regeln oder er benutzt des Konstruktive Dilemma. Er ist nicht frei in der Wahl der Regeln. Also benutzt der klugerweise das Konstruktive Dilemma.

4)
1. $s \rightarrow t$
2. $\neg p \wedge \neg r$
3. $p \vee q \vee r \vee s$
4. $(u \vee t) \rightarrow (p \vee q \vee r)$
5. $q \rightarrow u$ $\quad\quad$ $\underline{/\ q}$

9. Destruktives Dilemma (DD)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \qquad \neg p \vee \neg r \end{array}}$$

Wer die Ähnlichkeit des Konstruktiven Dilemmas mit dem Modus ponens beachtet hat, dem wird auch die Analogie zwischen Destruktivem Dilemma und Modus tollens nicht entgehen.

1. Wenn Johnny schwimmt, dann gibt es Wellen, und wenn er auf den Titlis steigt, dann bekommt er Muskelkater
2. Es gibt nicht Wellen oder er bekommt nicht Muskelkater
3. Also schwimmt Johnny nicht oder er steigt nicht auf den Titlis

1. $(S \rightarrow W) \wedge (T \rightarrow M)$
2. $\neg W \vee \neg M$ $\underline{/ \therefore \neg S \vee \neg T}$
3. $\neg S \vee \neg T$ 2, 1, DD

1. Wenn es die Partei sagt, dann ist es richtig, und wenn es die Bank sagt, dann ist es teuer
2. Es ist nicht richtig oder es ist nicht teuer
3. Also sagt es nicht die Partei oder nicht die Bank

1. $(P \rightarrow R) \wedge (B \rightarrow T)$
2. $\neg R \vee \neg T$ $\underline{/ \therefore \neg P \vee \neg B}$
3. $\neg P \vee \neg B$ 2, 1, DD

Übung 2.6.9

1)
1. $\neg\neg p$
3. $r \rightarrow s$
3. $p \rightarrow q$
4. $\neg q \vee \neg s$
5. $(t \wedge u) \rightarrow r$ $\underline{/ \quad \neg (t \wedge u)}$

2)
1. $(\neg p \vee \neg r \vee t) \rightarrow z$
2. $r \rightarrow q$
3. $\neg s$
4. $p \rightarrow s$ $\underline{/ \; z}$

3) Zu Nr. 2) gibt es einen kürzeren Weg ohne die Regel DD. Wie verläuft er?

4)
1. $t \rightarrow \neg r$
2. $\neg p$
3. $(\neg s \vee \neg t) \rightarrow (p \vee m)$
4. $p \vee q \vee r$
5. $s \rightarrow \neg q$ $\underline{/ \; m}$

Äquivalenzregeln

Die bisher erwähnten 9 Regeln können wir als Schlußregeln bezeichnen, weil sie Vorschriften für die Bedingungen sind, unter denen ein gültiger Schluß erreicht wird. Wir wollen noch 11 weitere Umformungs- oder Äquivalenzregeln beifügen. Sie dienen zur Vereinfachung von Ausdrücken, ohne ihren Wahrheitswert zu verändern.

Eine Äquivalenzregel haben wir bisher öfters wenn auch unerlaubterweise benutzt, nämlich die Regel der doppelten Negation. Unerlaubt war es deshalb, weil diese Regel als einzige nicht ausdrücklich eingeführt wurde. Das soll hier nachgeholt werden.

10. Doppelte Negation (DN)	$p \leftrightarrow \neg\neg p$
11. Kommutation (Komm.)	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
12. Assoziation (Ass.)	$[p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$ $[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
13. Idempotenz (Idemp.)	$(p \vee p) \leftrightarrow p$ $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

Übung 2.6.13

1. $\neg s$
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow q)$
3. $p \vee q \vee s$ $\quad$ $\underline{/\ q}$

14. Kontraposition (Kontr.)	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Übung 2.6.14

1) Wenn das Alphorn ertönt, dann schlafen die Gäste nicht.

Wenn es ruhig ist, dann schlafen die Gäste. Also wenn das Alphorn ertönt, dann ist es nicht ruhig.

2) 1. $(\neg p \vee q \vee \neg r) \rightarrow [\neg s \rightarrow (t \rightarrow u)]$
2. $\neg p$
3. $\neg p \rightarrow [(t \rightarrow u) \rightarrow (u \rightarrow v)]$
4. $(\neg p \vee q) \rightarrow [(u \rightarrow v) \rightarrow \neg w]$ $\underline{/\ w \rightarrow s}$

15. Implikation (Impl.) $\boxed{(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)}$

Übung 2.6.15

1) 1. $p \rightarrow q$
2. $r \vee \neg q$
3. p $\underline{/\ r}$

2) Gustav spielt Trompete oder Klavier. Er spielt Posaune oder nicht Klavier. Also spielt er Trompete oder Posaune.

3) 1. $\neg v \rightarrow (q \rightarrow \neg x)$
2. $(t \wedge u) \rightarrow \neg v$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
4. $\neg s \vee \neg (q \rightarrow \neg x)$
5. $(q \rightarrow r) \rightarrow s$ $\underline{/\ \neg p \vee \neg (t \wedge u)}$

4) Entweder werden die Tarife gesenkt oder die Importe gedrosselt, oder unsere Käseindustrie blüht. Wenn die Tarife gesenkt werden, dann werden die Importe gedrosselt. Also blüht unsere Käseindustrie, oder die Importe werden gedrosselt.

16. Distribution (Distr.)

$$\boxed{\begin{array}{l}[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \\ [p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]\end{array}}$$

Übung 2.6.16

1) 1. $p \rightarrow (q \wedge r)$
2. $r \vee (p \wedge \neg q)$ $\underline{/\ r}$

2) 1. $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$
2. $(\neg p \wedge s) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ $\underline{/ \quad \neg p \wedge r}$

Die Distributionsregeln gelten auch für komplexere Ausdrücke, etwa:

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$
$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

17. Äquivalenz (Äquiv.)

$$\boxed{\begin{array}{l}(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]\end{array}}$$

Übung 2.6.17

1) Die Veilchen duften genau dann, wenn sie blühen. Nun duften sie nicht. Also blühen sie nicht.

2) 1. $(r \rightarrow s) \wedge (t \vee u)$
2. $(\neg q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$
3. $(\neg q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee t)$
4. $\neg p \wedge \neg s$ $\underline{/ \; q \vee u}$

18. Exportation (Exp.)

$$\boxed{[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]}$$

Übung 2.6.18

1) Es ist nicht der Fall, daß die Amerikaner und Belgier ihr Geld aufwerten oder die Deutschen ruhig zusehen. Also wenn die Amerikaner ihr Geld aufwerten, dann werten es die Belgier nicht auf, oder die Deutschen sehen ruhig zu.

19. Absorption (Abs.)

$$\boxed{\begin{array}{l}p \wedge (p \vee q) \rightarrow p \\ p \vee (p \wedge q) \rightarrow p \\ p \rightarrow (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)\end{array}}$$

Übung 2.6.19

1) 1. $\neg p \lor (q \land p)$
2. $\neg q \lor \neg r$
3. $\neg (p \land q) \to r$ $\quad / \ \underline{(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)}$

20. De Morgan (De M)	$\neg (p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$ $\neg (p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$

Die De Morganschen Gesetze sind besonders wichtig, weil es für sie kein Ausweichen auf andere Regeln gibt. Sicherheit im Umgang mit ihnen soll freilich nicht durch Auswendiglernen erworben werden, man muß verstehen, wie diese Gesetze umgeformt werden. Dazu empfiehlt sich die Schreibweise von Hilbert, bei der die Negation als Balken über den zu negierenden Ausdruck gestellt wird.

Beispiele:

Scholz	Hilbert
$\neg p$	$\bar{p}$
$\neg p \lor q$	$\bar{p} \lor q$
$\neg (p \land q)$	$\overline{p \land q}$
$\neg (p \to q)$	$\overline{p \to q}$

Zur Anwendung kommen die De Morganschen Gesetze, wenn ganze Klammerausdrücke negiert sind, also etwa bei ‚$\neg (p \land q)$‘, was in der Schreibweise von Hilbert so lautet: ‚$\overline{p \land q}$‘. Der Balken über dem Ausdruck wird folgendermaßen aufgelöst:

1. In der Mitte wird er „durchschnitten“.
2. Die Konjunktion (bzw. Disjunktion) wird „umgestürzt“, so daß die Konjunktion zur Disjunktion, bzw. die Disjunktion zur Konjunktion wird.

$\overline{p \land q}$	$\overline{p \lor q}$
$\bar{p} \lor \bar{q}$	$\bar{p} \land \bar{q}$

Es bleibt nur noch, das Resultat wieder in die bekannte Schreibweise umzusetzen. Der Ablauf der Schritte läßt sich so zusammenstellen:

1. $\neg(p \wedge q)$		Dual	1. $\neg(p \vee q)$
1a. $\overline{p \wedge q}$			1a. $\overline{p \vee q}$
1b. $\bar{p} \vee \bar{q}$			1b. $\bar{p} \wedge \bar{q}$
2. $\neg p \vee \neg q$			2. $\neg p \wedge \neg q$

Selbstverständlich lassen sich die De Morganschen Regeln auch bei verneinten Implikationen und Äquivalenzen einsetzen, nur müssen diese zuerst umgeformt werden in Disjunktionen bzw. Konjunktionen.

1. $\neg(p \rightarrow q)$		
	2. $\neg(\neg p \vee q)$	Impl.
	2a. $\overline{\bar{p} \vee q}$	
	2b. $\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}$	
	2c. $\neg\neg p \wedge \neg q$	
3. $p \wedge \neg q$		

Übung 2.6.20

1) Es trifft nicht zu, daß eine Schnecke sich nicht zusammenrollen und nicht schwimmen kann. Es stimmt zwar, daß sie nicht schwimmen kann. Also kann sie sich zusammenrollen.

2) Wenn der Abgeordnete die Stimmen der Bauern erhält, dann gewinnt er die Landgegend, und wenn er die Stimmen der Arbeiter hat, dann gewinnt er die Stadt. Wenn er beide, sowohl Stadt und Land auf seiner Seite hat, dann wird er sicher gewählt. Er wird nicht sicher gewählt. Also fehlen ihm die Stimmen der Arbeiter, wenn er jene der Bauern gewinnt.

21. Überflüssige Regeln

Mit der Aufzählung der 20 Regeln sind wird weit über das hinausgegangen, was unbedingt notwendig ist. Man könnte ohne sachliche Einschränkung mit einer weit geringeren Anzahl an Regeln auskommen. Die Kenntnis vieler Regeln erlaubt uns jedoch kürzere Deduktionen und besseres Nachzeichnen unserer intuitiven Argumentationen. An drei Beispielen soll gezeigt werden, wie Schluß- und Äquivalenzregeln untereinander austauschbar sind.

Beispiel 1 Ersetzen der Regel DS

1. $p \vee q$
2. $\neg p$ $\quad /\therefore\ q$

Mit der Regel DS können wir aus den beiden Prämissen unmittelbar auf ‚q' schließen. Wir können diese Regel jedoch auch so umgehen:

3. $\neg p \rightarrow q$ 1, Impl.
4. q 2, 3, MP

Beispiel 2 Ersetzen der Regel MT

1. $p \rightarrow q$
2. $\neg q$ $\quad /\therefore\ \neg p$

Es empfiehlt sich ebenfalls, aus den beiden Prämissen direkt mit MT zu schließen. Derselbe Schluß läßt sich aber auch mittels anderer Regeln erreichen, etwa so:

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ 1, Kontr.
4. $\neg p$ 2, 3, MP

Beispiel 3 Ableitung der Exportation

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $\neg (p \wedge q) \vee r$ 1, Impl.
3. $(\neg p \vee \neg q) \vee r$ 2, De M.
4. $\neg p \vee (\neg q \vee r)$ 3, Ass.
5. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$ 4, Impl.
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 5, Impl.

Wir haben die Exportation abgeleitet; sie müßte folglich nicht notwendig als Regel vorgelegt werden. Diese gegenseitige Austauschbarkeit bei sachlicher Übereinstimmung erlaubt den Logikern, in der Anzahl der zu verwendenden Regeln voneinander abzuweichen.

Übung 2.6.21 Wiederholung aller Regeln

1) Wenn die Olympiade in Davos oder in Zermatt ausgetragen wird, dann freuen sich die Schweizer und der Wirteverband. Der

Wirteverband freut sich nicht. Also wird die Olympiade nicht in Zermatt ausgetragen.

2) $\neg (p \leftrightarrow q)$ Lösen Sie die verneinten Klammerausdrücke auf.

3) Wenn ich arbeite, dann komme ich zu Geld, aber wenn ich faul bin, dann habe ich es gemütlich. Entweder arbeite ich oder bin faul. Aber wenn ich arbeite, dann habe ich es nicht gemütlich, und wenn ich faul bin, dann komme ich nicht zu Geld. Deshalb habe ich es genau dann gemütlich, wenn ich nicht zu Geld komme.

4) Wenn der Nordwind abflaut und der Föhn einsetzt, dann haben wir Sturm. Der Nordwind flaut ab und wir ziehen die Segel ein. Es ist nicht der Fall, daß bei Föhn das Deck trocken bleibt. Wenn wir Sturm haben, dann trifft es nicht zu, daß wir uns über die Warnung hinwegsetzen oder die Segel nicht einziehen. Also setzt der Föhn ein und wir beachten die Warnung.

5) Der Onkel Walter steigt auf das Matterhorn, die Rigi oder den Pilatus. Genau dann, wenn er den Calanda bezwingt, steigt er auf die Bernina. Wenn er auf das Matterhorn klettert, dann steigt er auf den Pilatus. Nur wenn er auf den Pilatus oder die Rigi geht, bezwingt er den Pilatus oder den Eiger. Er steigt nicht auf den Pilatus. Wenn er auf die Rigi geht, dann geht er auf den Calanda. Also steigt er auf die Bernina.

6) Franz liest Goethe und Schiller oder Marcel und Camus. Er liest nicht Goethe. Also liest er Camus.

7)
1. $(p \vee q) \rightarrow r$
2. $s \rightarrow t$
3. $q \wedge \neg t$
4. $p \vee s$
5. $\neg (v \rightarrow \neg w)$ $\underline{/\therefore\ r \wedge w}$
6. q
7. $q \vee p$
8. $p \vee q$
9. r
10. $v \vee w$
11. $v \wedge w$

12. w
13. $r \wedge w$

8)
1. $p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
2. $p \leftrightarrow q$ $\quad$ $/\therefore \underline{\neg p \wedge \neg q}$
3. $\neg p \vee (\neg q \vee \neg p)$
4. $(\neg q \vee \neg p) \vee \neg p$
5. $\neg q \vee (\neg p \vee \neg p)$
6. $\neg q \vee \neg p$
7. $\neg p \vee \neg q$
8. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
9. $\neg (p \wedge q)$
10. $\neg p \wedge \neg q$

9)
1. $s \rightarrow \neg s$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3. $(t \rightarrow p) \wedge (u \rightarrow q)$ $\quad$ $/\therefore \underline{t \rightarrow \neg u}$
4. $\neg s \vee \neg s$
5. $\neg s$
6. $(p \wedge q) \rightarrow s$
7. $\neg (p \wedge q)$
8. $\neg p \vee \neg q$
9. $\neg t \vee \neg u$
10. $t \rightarrow \neg u$

10)
1. $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $t \rightarrow (u \rightarrow v)$
3. $(\neg w \rightarrow \neg s) \wedge (x \rightarrow q)$
4. $(\neg y \wedge \neg t) \rightarrow (\neg p \vee \neg w)$
5. $\neg (u \rightarrow v)$
6. $\neg y \vee (u \rightarrow v)$ $\quad$ $/\therefore \underline{x \rightarrow \neg r}$
7. $x \rightarrow q$
8. $\neg p \rightarrow \neg q$
9. $q \rightarrow p$
10. $\neg (u \rightarrow v) \rightarrow \neg t$
11. $\neg t$
12. $u \wedge \neg v$
13. $\neg y \vee (\neg u \vee v)$
14. $\neg y$

15. $\neg y \wedge \neg t$
16. $\neg p \vee \neg w$
17. $p \rightarrow \neg w$
18. $\neg w \rightarrow \neg s$
19. $r \rightarrow s$
20. $\neg s \rightarrow \neg r$
21. $x \rightarrow \neg r$

11) Ein Text aus 1 Korinther 15, 12–20.

Gibt es aber keine Auferstehung der Toten, so ist auch Christus nicht auferweckt worden (V 13). Ist Christus nicht auferweckt worden, so ist unsere Predigt leer, und auch der Glaube ist leer (V 14).

a) Was läßt sich aus diesen beiden Prämissen ableiten?
Fügen wir die folgende Prämisse hinzu:
Nun ist aber Christus auferweckt worden (V 20)

b) Was folgt jetzt
ba) hinsichtlich der Auferstehung der Toten?
bb) über die Leere des Glaubens?

c) Behauptet Paulus: Es gibt keine Auferstehung der Toten?

d) Ist die Auferstehung der Toten Voraussetzung für die Auferstehung Christi?

e) Thomas von Aquin hat so argumentiert:

1. $\neg A \rightarrow \neg C$ (V 13)
2. C (V 20)
3. $C \rightarrow A$
4. A

Geben Sie die Gesetze an, die Thomas benutzt hat.

12)
1. $(\neg q \vee \neg y) \rightarrow [z \rightarrow (s \wedge \neg t)]$
2. $\neg(\neg p \rightarrow q) \wedge (x \rightarrow z)$
3. $(\neg q \wedge \neg p) \rightarrow ((s \wedge \neg t) \rightarrow x)$ $\underline{/ \ \neg(\neg x \wedge z)}$

13)
1. $\neg p \rightarrow \neg q$
2. $p \vee \neg s$
3. $\neg h \rightarrow s$ $\underline{/ \ \neg(h \vee \neg q) \rightarrow p}$

14) 1. $p \vee \neg(q \wedge \neg r)$
2. $\neg s \vee p$
3. $\neg s \rightarrow \neg(t \wedge \neg q)$
4. $\neg p$
5. $\neg s$ $\quad$ / $\neg(t \wedge \neg r)$

15) 1. $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$
2. $(s \rightarrow \neg t) \rightarrow (\neg t \wedge \neg p)$
3. $(t \vee s) \rightarrow r$ $\quad$ / r

16) 1. $p \vee (\neg q \vee p)$
2. $q \vee (\neg p \vee q)$ $\quad$ / $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

2.7 Konjunktive Normalform

Die Distributionsregeln verhelfen uns zu einem neuen Entscheidungsverfahren. Bisher lernten wir als vollständige Entscheidungsverfahren die Auswertung der Wahrheitstafeln kennen. Mit Hilfe der Distributionsregeln können wir die konjunktive oder die disjunktive Normalform ausführen. Wir beschränken uns auf die Beschreibung der konjunktiven.

Die konjunktive Normalform ist eine Reduktion der Aussagenverknüpfungen von Disjunktionen auf Konjunktionen. Wir wissen, daß eine Konjunktionsverknüpfung genau dann wahr ist, wenn alle Argumente der Konjunktion wahr sind. Die Molekularformeln ihrerseits sind Disjunktionen, etwa von der Form ‚$p \vee \neg p$'. Falls sich ein Gesamtausdruck als Konjunktion solcher Disjunktionen umformen läßt, dann ist er immer gültig.

Beispiel 1

1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $\overline{(p \vee p)} \vee p$ $\quad$ 1, Impl.
3. $(\bar{p} \wedge \bar{p}) \vee p$ $\quad$ 2, De M.
4. $\bar{p} \vee p$ $\quad$ 3, Idemp.

Der Ausdruck ‚$\neg p \vee p$' ist eine Tautologie, folglich immer wahr.

Da zur Bildung der Normalformen häufig De Morgansche Gesetze gebraucht werden, schreiben wir die Negationen nach Hilbert über die Aussagen. Es empfiehlt sich noch eine weitere abkürzende Schreibweise: Die Konjunktionen schreiben wir mit „·“, die Disjunktionen lassen wir ganz weg, was die Übersicht erleichtert.

Beispiel 2

1. $q \rightarrow (p \vee q)$
2. $\bar{q} \vee (p \vee q)$ 1, Impl.
3. $\bar{q}pq$

Beispiel 3

1. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
2. $\overline{p \vee (q \vee r)} \vee (qpr)$ 1, Impl.
3. $(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee qpr$ 2, De M.
4. $\bar{p}qpr \cdot \bar{q}qpr \cdot \bar{r}qpr$ 3, Dist.

Alle drei Konjunktionsargumente bestehen aus Alternativen, von denen jede eine Tautologie darstellt; die erste ‚$\bar{p}p$‘, die zweite ‚$\bar{q}q$‘, die dritte ‚$\bar{r}r$‘.

Beispiel 4

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
2. $\overline{(p \rightarrow q)} \vee (\bar{\bar{p}} \vee \bar{q})$ 1, Impl.
3. $\overline{(\bar{p} \vee q)}\, p\bar{q}$ 2, Impl.
4. $(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q})\, p\bar{q}$ 3, De M.
5. $pp\bar{q} \cdot \bar{q}p\bar{q}$ 4, Distr.

Weder das erste noch das zweite Konjunktionsglied ist eine Tautologie. Folglich ist das Beispiel 4 keine Tautologie.

Wenn es sich im Verlauf einer Distribution herausstellt, daß ein Konjunktionsglied selber schon eine Tautologie ist, dann darf man dieses Argument weglassen. Der Grund ist einleuchtend: bei einer Tautologie bleibt die tautologische Form erhalten, mögen noch so viele Variable daran angehängt werden.

Beispiel 5

1. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$
2. $(q \rightarrow r) \rightarrow [\overline{(p \vee q)} \vee (p \vee r)]$ 1, Impl.
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(\bar{p} \cdot \bar{q})\, pr]$ 2, De M.

4. $(q \to r) \to (\bar{p}pr \cdot \bar{q}pr)$	3, Dist.
5. $(q \to r) \to \bar{q}pr$	4, Weglassen von $\bar{p}pr$
6. $\overline{(q \to r)}\ \bar{q}pr$	5, Impl.
7. $\overline{(\bar{q} \vee r)}\ \bar{q}pr$	6, Impl.
8. $(\bar{\bar{q}} \cdot \bar{r})\ \bar{q}pr$	7, De M.
9. $q\bar{q}pr \cdot \bar{r}\bar{q}pr$	8, Dist.

Die Beispiele, die wir bisher mit Wahrheitstafeln oder Deduktionsregeln nachgeprüft haben, lassen sich ebenfalls durch die disjunktive Normalform kontrollieren. Da bei einer Deduktion die Prämissen die Vordersätze eines Schlusses ausmachen, läßt sich jede Deduktion umschreiben. Sie hat folgende Form:

(1. Prämisse, 2. Prämisse ...) → Konklusion

Beispiel 6

1. $p \to q$
2. $p \qquad \underline{/\therefore q}$

1. $[(p \to q) \wedge p] \to q$	
2. $\overline{[(p \to q) \wedge p]} \vee q$	1, Impl.
3. $[\overline{(p \to q)} \vee \bar{p}] \vee q$	2, De M.
4. $[\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \bar{p}] \vee q$	3, Impl.
5. $(p \cdot \bar{q})\ \bar{p}q$	4, De M.
6. $p\bar{p}q \cdot \bar{q}\bar{p}q$	5, Dist.

Beispiel 7

1. p
2. q
3. $r \quad \underline{/\therefore p \wedge q \wedge r}$

1. $(p \wedge q \wedge r) \to (p \wedge q \wedge r)$	
2. $\overline{(p \wedge q \wedge r)} \vee (p \wedge q \wedge r)$	1, Impl.
3. $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r)$	2, De M.
4. $\bar{p}\bar{q}\bar{r}p \cdot \bar{p}\bar{q}\bar{r}q \cdot \bar{p}\bar{q}\bar{r}r$	3, Dist.

Beispiel 8

1. $p \to q$
2. $\neg p \qquad \underline{/\ \neg q \quad \text{(falsch)}}$

1. $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$	
2. $\overline{[(p \to q) \wedge \bar{p}]} \vee \bar{q}$	1, Impl.

3. $(\overline{\bar{p} \vee q}) \vee \bar{\bar{p}}\bar{q}$	2, Impl.
4. $(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q})\ p\bar{q}$	3, De M.
5. $pp\bar{q} \cdot \bar{q}p\bar{q}$	4, Dist. (keine Tautologie)

Wie mit der Deduktionsmethode, so haben sich aufgrund der disjunktiven Normalform die Beispiele 6 und 7 richtig, hingegen 8 als falsch herausgestellt.

Übung 2.7

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow m)$
3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
5. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
6. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
8. $[q \vee \neg ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))] \rightarrow \neg (p \wedge \neg p)$
9. $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow \neg s)$
10. $(p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

2.8 Annahmen

Bisher haben wir aus bestimmten Prämissen einen Schluß gefolgert. Wir können die Prämissen dabei durch Annahmen erweitern. Dann folgt der Schluß aus den Prämissen und den Annahmen. Eine solche Deduktion scheint auf den ersten Blick weniger kräftig zu sein, weil mit beliebigen Annahmen sich so etwas wie Willkür einzuschleichen droht. Doch können wir je nach Art der Annahmen diesem Vorwurf entgegentreten. Wir wollen uns mit zwei Arten von Annahmen befassen, dem konditionalen Beweis und dem indirekten Beweis.

2.8.1 Der Konditionale Beweis (KB)

Eine beliebig gewählte Annahme braucht nicht zu einem willkürlichen Resultat zu führen, nämlich dann nicht, wenn die Annahme wieder ausgelöst wird. In diesem Fall ist das Schlußresultat letztlich doch wieder nur aus den Prämissen erschlossen worden; die Annahme ist bloß intern zum Zweck einer vereinfachten Deduktion eingeführt worden. Wir kennen dieses Verfahren aus dem Beispiel des reichen Arabers.

Ein Araber hatte 17 wertvolle Pferde. Sie sollten ungleichmäßig auf seine drei Söhne aufgeteilt werden und zwar im folgenden Verhältnis: Der älteste Sohn sollte die Hälfte bekommen, der zweite $^1/_3$ und der jüngste $^1/_9$. Will man nicht den Metzger herbemühen, empfiehlt es sich, ein Pferd auszuleihen. Das entspricht der Annahme, man habe 18 Pferde. Dann bekommt

der 1.	die Hälfte	von 18 Pferden	= 9 Pferde
der 2.	$^1/_3$	von 18 Pferden	= 6 Pferde
der 3.	$^1/_9$	von 18 Pferden	= 2 Pferde
			17 Pferde

Nun wird die Annahme rückgängig gemacht, indem das geliehene Pferd dem früheren Besitzer zurückgegeben wird. Es ist ja nicht geteilt worden, und den Zweck hat es erfüllt, nämlich bei der sonst unausführbaren Rechenaufgabe auszuhelfen.

Der konditionale Beweis erlaubt unter Umständen, eine langwierige Deduktion zu verkürzen. Vorteilhaft wird er eingesetzt, wenn der Schluß eine Implikation ist. Zeigen wir das an einem Beispiel

1. A   / B → A

Aus ‚A‘ läßt sich die Bedingung ‚B → A‘ erschließen.

Übung 2.8.1

1) Zeigen Sie, daß sich diese Deduktion auch mit Hilfe unserer bisherigen Regeln als richtig erweist.

Der Einsatz des konditionalen Beweises geht davon aus, daß das nicht gegebene ‚B‘ angenommen wird. Logisch gesehen ist jede beliebige Annahme vertretbar, sofern sie als solche deutlich gekennzeichnet ist und am Schluß wieder ausgelöst wird. Wir deuten das mit einem Pfeil auf der linken Seite an.

1\. A   / B → A
→ 2. B   KA   KA = konditionale Annahme

Im dritten Schritt wiederholen wir ‚A'. Das heißt jetzt trivialerweise, daß ‚B' und ‚A' gegeben sind. Genauer. Wenn ‚B', dann auch ‚A'. Damit können wir die Annahme auslösen. Das wird durch den heruntergezogenen und quer gerichteten Pfeilschwanz angezeigt. Das Resultat ist der konditionale Beweis, abgekürzt KB:

1\. A   /∴ B → A
→ 2. B   KA
3\. A   1, Rep.   Rep. = Repetition
4\. B → A   2–3 KB

Allgemein gilt:

→ p   KA
...
...
q
p → q   KB

Der konditionale Beweis ist nicht, wie es den Anschein macht, eine ausgefallene logische Spitzfindigkeit. Er entspricht im Gegenteil einer häufig benutzten umgangssprachlichen Argumentation. Man stellt beispielsweise fest, daß das Auto anhält. Dann ist es nicht abwegig, die Überlegung anzustellen, der leere Benzintank könnte die Ursache für das Anhalten sein. Ich überlege so:

1. Das Auto steht still (Tatsachenfeststellung).
2. Wenn der Benzintank leer ist, dann steht das Auto still.

1\. läßt 2. vermuten. Freilich ist damit nicht gesagt, der Benzintank sei wirklich leer. Diese Behauptung wäre ein unerlaubter Rückschluß.

Weiteres Beispiel:

1\. p → q
2\. ¬p → r   /∴ q ∨ r
→ 3. ¬r   KA
4\. p   3, 2, MT
5\. q   4, 1, MP

6. $\neg r \to q$	3–5 KB
7. $r \vee q$	6, Impl.
8. $q \vee r$	7, Komm.

Innerhalb derselben Deduktion dürfen beliebig viele Annahmen gemacht werden. Dabei sind zwei Bedingungen einzuhalten. Erstens müssen die Annahmen der Reihe nach wieder gelöst werden. Die Verletzung dieser Forderung zeigt sich im Überschneiden der Pfeile. Zweitens muß jede Annahme wieder ausgelöst werden. Ein Verstoß gegen die letztere Bedingung ist erkennbar an einem Pfeil ohne Schwanz.

Beispiel mit zwei Annahmen.

1. $p \to (q \to r)$	
2. $r \to (q \to s)$	$/\therefore\ p \to (q \to s)$
3. p	KA $/\therefore\ q \to s$
4. q	KA $/\therefore\ s$
5. $q \to r$	3, 1, MP
6. r	4, 5, MP
7. $q \to s$	6, 2, MP
8. s	4, 7, MP
9. $q \to s$	4–8 KB
10. $p \to (q \to s)$	3–9 KB

Wenn die Annahmen in der Reihenfolge der Konklusion, von links nach rechts, gesetzt werden, so wird dadurch eine Pfeilüberschneidung vermieden. Fehlerhaft kann die Ableitung werden, wenn man sich von den Prämissen verführen läßt. Dazu das gleiche Beispiel mit umgeformter erster Prämisse:

1. $(q \to r) \vee \neg p$	
2. $r \to (q \to s)$	$/\ \ p \to (q \to s)$
3. q	KA
4. p	KA
5. $q \to r$	4, 1, DS
6. r	3, 5, MP
7. $q \to s$	6, 2, MP
8. s	3, 7, MP
9. $q \to s$	3, 8, KB
10. $p \to (q \to s)$	4–9, KB

Pfeilüberschneidungen sind unerlaubt.
Schließlich noch ein Beispiel mit nicht ausgelöster Annahme:

1. $p \rightarrow q$	$/\ p \rightarrow (q \wedge r)$	
2. p	KA	$/\ q \wedge r$
3. q	2, 1, MP	
4. r	KA	
5. $q \wedge r$	3, 4, Konj.	
6. $p \rightarrow (q \wedge r)$		

Übung 2.8.1

2) $p \rightarrow q \quad /\ \neg q \rightarrow \neg p$

3) 1. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
2. $s \vee q$
3. $p \rightarrow \neg s \quad /\ r$

4) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \quad /\ p \rightarrow r$

5) 1. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
2. $s \rightarrow (t \wedge p)$
3. $q \quad /\ r \vee \neg s$

6) – $/\ p \rightarrow (q \rightarrow p)$

7) – $/\ (p \wedge q) \rightarrow p$

8) – $/\ (p \rightarrow r) \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

9) – $/\ (p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$

10) 1. $r \rightarrow (v \rightarrow \neg q)$
2. $w \rightarrow \neg (p \wedge s)$
3. $\neg (w \vee t) \rightarrow v \quad /\ p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))$

2.8.2 Der indirekte Beweis (IB)

In der Wahl der Annahmen unterscheidet sich der indirekte Beweis deutlich vom konditionalen. Der indirekte Beweis zweifelt das Resultat an. Logisch gesehen ist das gleichbedeutend mit seiner Verneinung. Wenn sich dann im Lauf der Deduktion eine

Kontradiktion einstellt, dann ist das ein Anzeichen dafür, daß das verneinte Resultat eine unerlaubte Annahme war. Es ist der klassische Beweis ad absurdum. Der Vorgang läßt sich aus Beispielen deutlich ersehen. Analog zum konditionalen Beweis benutzen wir IA für indirekte Annahme und IB für indirekten Beweis.

1. $p \wedge q$	$/ \therefore q$
2. $\neg q$	IA
3. q	1b, Simpl.
4. $q \wedge \neg q$	3, 2, Konj.
5. $\neg \neg q$	2–4 IB
6. q	5, DN

Da wir bei 4. auf einen Widerspruch gestoßen sind, muß die ursprüngliche Annahme 2. verneint werden.

Der indirekte Beweis kann auch mit einem konditionalen verknüpft werden.

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	
2. $(r \vee s) \rightarrow t$	$/ \therefore p \rightarrow t$
3. p	KA
4. $\neg t$	IA
5. $\neg (r \vee s)$	4, 2, MT
6. $p \vee q$	3, Add.
7. r	6, 1, MP
8. $r \vee s$	7, Add.
9. $(r \vee s) \wedge \neg (r \vee s)$	8, 5, Konj.
10. t	4–9, IB
11. $p \rightarrow t$	3–10, KB

Übung 2.8.2

1) 1. $p \rightarrow (q \vee s)$
   2. $s \vee p$
   3. $(q \vee s) \rightarrow t$ $\quad$ $/ \; t$

2) 1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
   2. $(q \vee s) \rightarrow t$
   3. $\neg t$ $\quad$ $/ \; \neg (p \vee r)$

3) 1. $p \quad \underline{/\ q \vee \neg q}$

4) 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)$
2. $(s \rightarrow t) \rightarrow (p \wedge r) \quad \underline{/\ s}$

5) 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
2. $(r \vee t) \rightarrow (s \rightarrow \neg p) \quad \underline{/\ \neg p}$

6) 1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$
2. $q \rightarrow \neg s \quad \underline{/\ \neg p \vee \neg q}$

7) 1. $\neg s \quad \underline{/\ \neg [((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge ((p \rightarrow r) \rightarrow s)]}$

8) 1. $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg r$
2. $p \rightarrow q \quad \underline{/\ r \rightarrow \neg p}$

2.9 Reduktion von Funktoren

Wir haben uns in der Darstellung der Aussagenlogik auf fünf Funktoren festgelegt. Das entspricht der üblichen Darstellungspraxis. Aus den zahlreichen Umformungsregeln ergibt sich, daß wir sachlich mit weniger auskommen könnten. Es lassen sich alle Aussagenverknüpfungen auf eines der folgenden drei Paare zurückführen:

$\neg, \wedge$
$\neg, \vee$
$\neg, \rightarrow$

Übung 2.9

1) $q \rightarrow (p \vee q)$

2) $p \leftrightarrow q$

Geben Sie für beide Ausdrücke die Umformungen an:

a) Negation und Konjunktion
b) Negation und Disjunktion
c) Negation und Implikation

Nun haben schon Peirce 1880 und Sheffer 1913 herausgefunden, daß es sogar möglich ist, mit einem einzigen Funktor auszukommen. Freilich ist keiner aus dem bisherigen Vorrat dazu geeignet. Deshalb haben die beiden Autoren je einen neuen Funktor definiert, die Peircefunktion und den Shefferstrich:

Peirce			Sheffer		
p	$\downarrow$	q	p	$\mid$	q
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0

Die Peircefunktion hat die gleiche Wahrheitstafel wie der Ausdruck ‚$\neg (p \vee q)$'. Deshalb läßt er sich mit „weder p noch q" wiedergeben. Der Shefferstrich entspricht genau dem Ausdruck ‚$\neg (p \wedge q)$'. Alle Funktoren lassen sich in einen der beiden umschreiben. Das sei nur an der Peircefunktion gezeigt:

$\neg p$	$p \downarrow p$	$p \downarrow p$
$p \wedge q$	$\bar{p} \downarrow \bar{q}$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
$p \vee q$	$\overline{p \downarrow q}$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
$p \rightarrow q$	$\bar{p} \downarrow q$	$((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

Übung 2.9

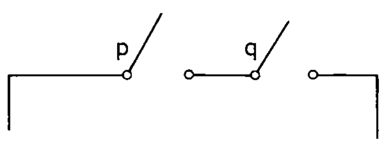
3) a) „Eine weitere Konsequenz ist Whitehead's Überzeugung, daß die Aussagenlogik, wenn sie auf der Inkonsistenz beruht (H. M. Sheffer zeigte, wie das System der ‚Principia Mathematica' auf der Inkonsistenz als der einzigen undefinierten Relation aufgebaut werden kann. Er spricht zwar nicht von der Inkonsistenzrelation, sondern von einer Operation namens „Rejektion" [= Shefferstrich], „Non-Konjunktion") die fundamentale Tatsache einer pluralistischen Prozeßmetaphysik reflektiert." V. Lowe, The Development of Whitehead's Philosophy (Ed.) A. Schilpp. Library of Living Philosophers (New York 1951) 121.

b) Sheffer sagt folgendes: „Schließlich gelang es durch unglaublich geistreiche symbolische Analysen, die Prinzipien der Formalen Logik auf eine kleine Anzahl grundlegender Aussagen zu reduzieren, die in einer äußerst geringen Anzahl von Grundbegriffen ausgedrückt wird. Bei dieser Behandlung der Logik ist die Ökonomie der Basisbegriffe dermaßen bedeutsam, daß die Ersetzung der zwei Aussagenoperatoren Negation und Disjunktion durch einen einzigen Operator der Nicht-Konjunktion von den Autoren für eine kardinale Verbesserung der neuen Auflage angesehen wird." H. M. Sheffer, Rez. A. N. Whitehead/B. Russell, Principia Mathematica. vol. 1 (^{2}1925) Cambridge Univ. Press. Isis 8 (1926) 229.

1. Um was geht es Sheffer (in Text b)?
2. Wie stehen Rejektion oder Nicht-Konjunktion zu einer inkonsistenten Relation?
3. Reflektiert diese Inkonsistenz die Tatsache einer pluralistischen Prozeßmetaphysik?

Bis in die neueste Zeit hinein vermochte man unter dieser Vereinfachung kaum mehr als eine theoretisch bemerkenswerte Tatsache zu vermuten. Inzwischen hat sich eine Verwirklichung in der Praxis auffinden lassen.

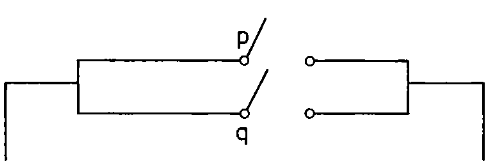
Die Elektronik hat es bei den einfachsten Schaltungen mit Serien- und Parallelschaltung zu tun. Die beiden lassen sich als Und- und Oder-Verknüpfungen realisieren.



Serienschaltung (Und-Verknüpfung)

Hier kann nur Strom durchfließen, wenn der Kreis ganz geschlossen ist, also wenn ‚p' und auch ‚q' geschlossen sind. Das entspricht der Konjunktion.

Anders ist es bei der Parallelschaltung:

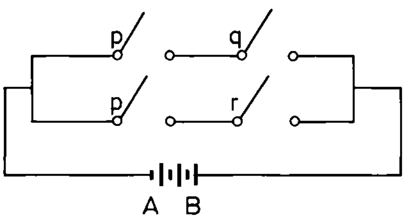


Parallelschaltung (Oder-Verknüpfung)

Für den Stromdurchfluß genügt es, daß ‚p' oder ‚q' geschlossen ist. Selbstverständlich fließt auch Strom, wenn beide geschlossen sind. Das entspricht den Bedingungen unserer Disjunktion.

Beispiele:

1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$



‚p' kommt zweimal vor. Da beide Disjunktionsargumente Konjunktionen sind, brauchen wir zwei Kreise und ‚p' erscheint zweimal.

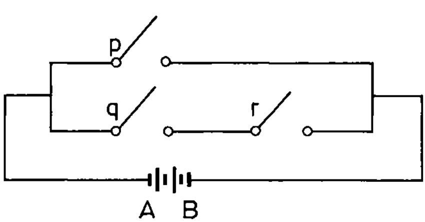
2) $p \vee (q \wedge r)$

Es lassen sich auch kompliziertere Deduktionen darstellen, etwa die folgende:

3) 1. $p \rightarrow q$
2. $\neg q$
3. $p \vee r$ $\underline{/ \; r}$ oder $[((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow r$

oder in der disjunktiven Normalform:

$(p \wedge \neg q) \vee q \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee r$



Die Tautologie von 3) wirkt sich so aus, daß immer Strom fließt, welche Werte die Variablen annehmen mögen.

Zur Realisierung von Schaltsystemen werden aus technischen Gründen Nand- und Nortore bevorzugt. „Nand" ist ein englischer Wortverschnitt aus „not" und „and", beziehungsweise „Nor" aus „not" und „or". Nor entspricht unserer Peircefunktion, Nand dem Shefferstrich. Damit hat einmal mehr eine theoretische Spielerei eine technische Anwendung gefunden.

2.10 Polnische Notation

Der überragende Vorteil der polnischen Schreibweise besteht in einer Anordnung, die auf Klammern verzichten kann und dennoch höchste Präzision erreicht. Das läßt sich an Beispielen aus der Arithmetik erklären:

$(2 + 5) \cdot 7 = 49 \qquad 2 + (5 \cdot 7) = 37$

Analog dazu ließe sich die polnische Notation etwa so einsetzen:

$+ 25 \cdot 7 = 49 \qquad 2 + \cdot 57 = 37$

Wer nicht gerade Hewlett Packard programmiert, dem erscheint diese Umschreibung bestenfalls verwirrend. Doch brauchen sich diese Bedenken nicht auf die Logik zu übertragen.

Die Funktoren werden nicht mit Symbolzeichen, sondern mit großen Buchstaben dargestellt und zwar auf folgende Weise:

N	Negation
K	Konjunktion
A	Disjunktion
C	Implikation
E	Äquivalenz

Der Funktor wird dem Argument vorgestellt. Damit wird seine Reichweite angedeutet.

Beispiele

1. Np	$\neg p$
2. Kpq	$p \wedge q$
3. CApqp	$(p \vee q) \rightarrow p$
5. CCpqCCqrCpr	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Wird die Übersetzung unübersichtlich, dann empfiehlt es sich, auf der rechten Seite der Formel zu beginnen. Bei 5. sehen wir sogleich, daß ‚$p \rightarrow r$‘ impliziert wird von ‚$q \rightarrow r$‘.

Ferner greifen wir für die Negation auf die Vereinfachung von Hilbert zurück. Der Strich über dem Funktor oder der Variable erleichtert die Übersicht. Wir schreiben an Stelle der original polnischen Notation Np, NKpq, KNpNq leichter lesbar

$\bar{p}$	$\neg p$
$\bar{K}pq$	$\neg (p \wedge q)$
$K\bar{p}\bar{q}$	$\neg p \wedge \neg q$

Übung 2.10

Übersetzen Sie in polnische Notation:
1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (p \vee p)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
5. $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg (p \vee q)$

Diese Schreibweise verhilft uns zu einer neuen Beweistechnik. Es ist die Technik der Semantischen Tafeln, die mit der polnischen Notation vereinfacht wird.

Der Zweck solcher Tafeln besteht darin, Folgen von Disjunktionen zu erhalten. In der vorgelegten Schreibweise läßt sich unmittelbar ablesen, ob sie tautologisch sind oder nicht. Tautologien sind erwünscht, weil sie die Tafeln schließen. Ein Blick genügt, um erkennen zu lassen, daß die zwei ersten Reihen geschlossen sind, nicht aber die dritte und vierte:

$p\ \bar{p}$
$p\ \bar{q}\ r\ a\ p\ q\ p\ p\ s\ r$
$q\ q$
$\bar{p}\ q\ \bar{p}\ \bar{p}\ r\ s\ q\ q\ \bar{p}$

Da man sich zwischen den Variablen Disjunktionen zu denken hat, ist ‚p $\bar{p}$' – was dasselbe bedeutet wie ‚p $\vee \neg$ p' – offensichtlich eine Tautologie. Dasselbe gilt von ‚q $\bar{q}$', mag dieser Ausdruck noch von einer beliebigen Anzahl weiterer Variablen gefolgt sein.

Der Grundgedanke besagt nun: Sobald Disjunktionen hergestellt sind, dürfen die Funktoren gestrichen werden. Die Streichungsregeln sind daher Anweisungen, die mit der Streichung der Funktoren durch ausgeklügelte Umformungen Disjunktionen produzieren.

Wir beginnen mit der Streichungsdefinition der Funktoren A, C, $\bar{K}$. Unter ihnen ist die A-Regel die einfachste. Aus ‚$p \vee q$' den Ausdruck ‚p q' herstellen heißt, das Disjunktionszeichen weglassen. Das Streichen des ‚A' bei ‚A p q' führt zum selben Ergebnis: ‚$\cancel{A}$ p q'. Ähnlich führen wir ‚$p \rightarrow q$' mit der Implikationsregel auf ‚$\neg p \vee q$' zurück und wenn wir das Disjunktionszeichen grundsätzlich weglassen, erhalten wir ‚$\bar{p}$ q'. Folglich lautet unsere C-Regel: ‚C p q' gestrichen ergibt ‚$\cancel{C}$ $\bar{p}$ q'. Und schließlich noch die $\bar{K}$-Regel. Wir wissen, daß ‚$\neg (p \wedge q)$' mit De Morgan in ‚$\neg p \vee \neg q$' umzuformen ist, also in ‚$\bar{p}$ $\bar{q}$'. Daher definieren wir die Streichungsregel ‚$\bar{K}$' so: ‚$\bar{K}$ p q' führt zu ‚$\cancel{\bar{K}}$ $\bar{p}$ $\bar{q}$'. Somit gelten zunächst folgende drei Regeln:

$$\begin{array}{lll} A\ p\ q & \qquad & \cancel{A}\ p\ q \\ C\ p\ q & & \cancel{C}\ \bar{p}\ q \\ \bar{K}\ p\ q & & \cancel{\bar{K}}\ \bar{p}\ \bar{q} \end{array}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{lll} 1.\ A\ \underline{p}\ \bar{p} & \qquad & \cancel{A}\ \underline{p}\ \bar{p} \\ 2.\ A\ \bar{K}\ p\ q\ p & & \cancel{A}\ \cancel{\bar{K}}\ \bar{p}\ \bar{q}\ p \\ 3.\ C\ K\ p\ q\ p & & \cancel{C}\ K\ p\ q\ p \end{array}$$

Die Streichungsregel C im 3. Beispiel verlangt, den Vordersatz der Implikation zu verneinen. Der Vordersatz kann aber selber ein komplexer Ausdruck sein, etwa eine Konjunktion wie im vorliegenden Beispiel. Es liegt also folgende Struktur vor:

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow p \\ \qquad\ \ p \rightarrow q \end{array}$$

Daher ist hier aufgrund der C-Regel K zu verneinen. Der Reihe nach ergeben sich folgende Schritte:

$$\begin{array}{lll} C\ K\ p\ q\ p & \qquad & \\ \cancel{C}\ K\ p\ q\ p & & C \\ \cancel{C}\ \cancel{\bar{K}}\ \bar{p}\ \bar{q}\ p & & \bar{K} \end{array}$$

Wir nennen alle drei Formeln geschlossen, weil mindestens eine

Variable mit ihrer Negation auftritt. Die Beispiele sind also allgemeingültig. Diese geschlossenen Zeilen sind disjunktive Normalformen, ein bereits bekanntes Entscheidungsverfahren.

Übung 2.10

6) $p \rightarrow (p \vee q)$
7) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
8) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
9) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
10) Zeigen Sie, daß $Cpq = \bar{K}p\bar{q}$ ist.

Außer den drei Regeln A, C und $\bar{K}$ müssen noch ihre Negationen besprochen werden. In der Aufzählung gehen wir diesmal alphabetisch rückwärts, also nach der Reihenfolge K, $\bar{C}$ und $\bar{A}$. Die Umformung durch De Morgan fördert eine versteckte Konjunktion zutage. Aufgrund dieser Konjunktion ist bei den drei Regeln eine Besonderheit zu beachten.

Eine Konjunktion ist nur dann eine Tautologie, wenn alle Argumente Tautologien sind. Im einfachsten Fall besteht die Konjunktion aus zwei Argumenten, ‚$p \wedge q$', wobei ‚p' getrennt von ‚q' zu untersuchen ist. Selbstverständlich liegt bei diesem Beispiel keine Tautologie vor, denn ‚p' ist sowenig eine Tautologie wie ‚q'. Hingegen wäre etwa die Konjunktion ‚$(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$' eine Tautologie. Da jedes Argument der Konjunktion zu überprüfen ist, ob es tautologisch sei, führt dieser Nachweis zu einer Aufsplitterung entsprechend der Anzahl der Konjunktionsglieder. Jedem Argument der Konjunktion bleibt somit eine eigene Zeile vorbehalten, was so geschrieben wird:

$$\frac{p}{q}; \qquad \frac{p \vee \neg p}{q \vee \neg q} = \frac{p\ \bar{p}}{q\ \bar{q}}.$$

Daran ist unmittelbar abzulesen, ob eine Tautologie vorliegt. Es ist genau dann der Fall, wenn eine Variable und gleichzeitig die Negation dieser Variable in jeder Zeile nachweisbar ist.

Die für die Konjunktion erforderliche Aufsplitterung führt dazu, die Streichung mit einem Zusatz zu belegen:

$$K\ p\ q \qquad \not K\ \underbrace{p\ q}$$

Bei den Regeln ‚$\bar{C}$' und ‚$\bar{A}$' ist analog vorzugehen, weil hinter ihnen gleichfalls eine Konjunktion versteckt ist, wovon man sich mühelos überzeugt. ‚$\bar{C}$ p q' ist dasselbe wie ‚$\neg$ (p $\rightarrow$ q)', was äquivalent ist mit ‚p $\wedge$ $\bar{q}$'; ‚$\bar{A}$ p q' bedeutet ‚$\neg$ (p $\vee$ q)' und das ist wiederum äquivalent mit ‚($\bar{p}$ $\wedge$ $\bar{q}$). Entsprechend lauten die Regeln:

$$\bar{C}\ p\ q \qquad \not{\bar{C}}\ \underbrace{p\ \bar{q}} \quad \text{und} \quad \bar{A}\ p\ q \qquad \not{\bar{A}}\ \underbrace{\bar{p}\ \bar{q}}$$

Die geschweifte Klammer in horizontaler Lage soll andeuten, daß die Variablen in gesonderten Zeilen unterzubringen sind, nämlich so:

$$K\ p\ q \qquad \not K\ \underbrace{p\ q} \qquad \bar{C}\ p\ \bar{q} \qquad \not{\bar{C}}\ \underbrace{p\ \bar{q}}$$
$$\qquad\qquad p \qquad\qquad\qquad\qquad p$$
$$\qquad\qquad q \qquad\qquad\qquad\qquad \bar{q}$$

$$\bar{A}\ p\ q \qquad \not{\bar{A}}\ \underbrace{\bar{p}\ \bar{q}}$$
$$\qquad\qquad \bar{p}$$
$$\qquad\qquad \bar{q}$$

Es sind so viele Zeilen notwendig, wie es Konjunktionsargumente gibt. Alle Variablen, die vor der Aufsplitterung stehen, gelten für alle Zeilen.

Beispiele:

1) $C\ p\ C\ q\ K\ p\ q$

$\not C\ \bar{p}\ \not C\ \bar{q}\ \not K\ \underbrace{p\ q}$

$\qquad \bar{p} \quad \bar{q} \quad p$

$\qquad\qquad\qquad q$

Die erste Zeile lautet: $\bar{p}$ $\bar{q}$ p, die zweite $\bar{p}$ $\bar{q}$ q. Nur wenn alle Zeilen geschlossen (= Tautologien) sind, ist die Formel allgemeingültig.

2) $C\ \bar{p}\ C\ A\ p\ q\ q$

$\not{C}\ \bar{\bar{p}}\ C\ \not{A}\ \bar{p}\ \bar{q}\ q$

p | $\bar{p}\quad q$ / $\bar{q}\ q$

3) $C\ K\ A\ \bar{p}\ q\ p\ q$

$\not{C}\ \not{K}\ \not{A}\ \bar{\bar{p}}\ \bar{q}\ \bar{p}\ q$

$p\quad \bar{p}\ q$ / $\bar{q}\ \bar{p}\ q$

4) $C\ K\ C\ p\ q\ C\ \bar{p}\ q\ q$

$\not{C}\ \bar{\not{K}}\ \bar{\not{C}}\ p\ \bar{q}\ \bar{\not{C}}\ \bar{p}\ \bar{q}\ q$

p | $\bar{p}\quad q$ / $\bar{q}\ q$

$\bar{q}$ | $\bar{p}\quad q$ / $\bar{q}\ q$

Übung 2.10

11) $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
12) $r \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$
13) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \wedge m) \rightarrow q]$
14) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
15) $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

3. Die aristotelische Logik

Die aristotelische Logik gehört zu den bedeutendsten Kulturereignissen der Antike. Bis ins Mittelalter wurde sie, zusammen mit den Anfängen der Aussagenlogik, den Studenten als die wichtigste Grundlage für wissenschaftliches Arbeiten beigebracht. Seit der Renaissance ist die Aussagenlogik ziemlich vollständig in Vergessenheit geraten. Soweit die aristotelische Logik der Abneigung nicht ganz zum Opfer gefallen ist, hat man sie auf einige langweilige Banalitäten eingeschränkt. Die Folge davon war, daß etwa Kant die ihm bekannte Rumpflogik für aristotelisch hielt und damit den Vater der Logik in Mißkredit brachte.

Wenn im 20. Jahrhundert die aristotelische Logik in den Ruf einer bloß historischen Kuriosität gelangt ist, so mag das verständlich sein vom Wunsch praktischer Anwendungen her. Ein mittelmäßig begabter Student löst tatsächlich jeden Syllogismus so schnell wie der Fachmann für aristotelische Logik. Es wäre aber verfehlt, bei der heutigen Darstellung der aristotelischen Logik das Ziel auf diesen Aspekt einzuschränken. Im Vordergrund steht die Absicht, den Begriff eines überschaubaren Systems zu vermitteln. Dazu eignet sich die aristotelische Logik in besonderem Maße, weil sie abgeschlossen und auf ein enges Gebiet begrenzt ist.

Was hier dargestellt wird, müßte eher den Namen „Klassische Logik“ tragen, weil es Systematisierungen und damit zum Teil Abweichungen von Aristoteles sind. Doch die moderne Logik hat die klassische integriert. Von daher ist auch erkennbar, daß die aristotelische Logik als spezielle Theorie kaum auf die Anwendung praktischer Probleme ausgerichtet ist.

3.0 Einige Begriffe der aristotelischen Logik

In der aristotelischen Tradition hat man sich kaum mit der Aussagenlogik befaßt. Dagegen ist eine bemerkenswerte Theorie von Schlußfolgerungen entwickelt worden, bei der die Elemente innerhalb der Aussagen analysiert wurden. Der Anwendungsbereich ist jedoch für die Praxis deswegen ziemlich unbedeutend, weil nur Aussagen mit Subjekt, Kopula und Prädikat zugelassen sind.

Zunächst müssen wir das Zeichen vom Gegenstand unterscheiden. Das Zeichen nennen wir Subjekt und die Sache, auf die es sich bezieht Suppositum. Somit ist das Subjekt einer Prädikataussage dasjenige Wort einer Aussage, das angibt, auf welches Suppositum die Aussage sich bezieht.

Das Prädikat drückt eine gewisse Idee aus, die wir uns vom Suppositum bilden. Nach der traditionellen Philosophie ist es unserem Denken nicht möglich, alle Eigenschaften eines Suppositums auf einmal zu erfassen. Deshalb drückt das Prädikat immer nur eine aus, mag sie auch höchst komplex sein. Das Zu- oder Absprechen geschieht durch die affirmative oder negative Kopula „ist" oder „ist nicht".

Es gibt konkrete und allgemeine Subjekte. Konkrete Subjekte sind „ich", „hier", „dieser" usw. Eine zeigende Gebärde muß das Suppositum begleiten, um keine Verwechslung zu provozieren. Mit den konkreten Subjekten hat sich die traditionelle Logik erst im Mittelalter beschäftigt.

Um über allgemeine Subjekte zu reden, müssen wir zuvor den Begriff des Attributes präzisieren, der seinerseits am besten erklärt wird, wenn wir vom Prädikat ausgehen.

Das Prädikat unterscheidet sich vom Subjekt darin, daß es nur eine bestimmte Eigenschaft ausdrückt und nicht den ganzen Gegenstand der Wirklichkeit. Betrachten wir zwei Aussagen mit demselben konkreten Subjekt:

(1) Dies ist ein Kugelschreiber
(2) Dies ist aus Plastik

Die Prädikate sind verschieden. Aus der Konjunktion der beiden Aussagen erhalten wir:

(3) Dies ist ein Kugelschreiber und dies ist aus Plastik

was beinahe dasselbe scheint wie:

(4) Dieser Kugelschreiber ist aus Plastik

Daß jedoch (3) und (4) nicht mehr dasselbe sind, zeigt sich bei der Verneinung. Denn die verneinte Aussage (3) lautet:

(3′) Es ist nicht der Fall, daß dies ein Kugelschreiber und dies aus Plastik ist.

Für gewöhnlich möchte man jedoch mit der Verneinung nicht bestreiten, daß es ein Kugelschreiber sei, sondern nur, daß er nicht aus Plastik sei. Deshalb sagen wir, „Kugelschreiber“ spielt nicht mehr die Rolle eines Prädikates, sondern ist zu einem Attribut geworden. „Dieser Kugelschreiber ist blau“ besteht aus dem Attribut „Dieser Kugelschreiber“ und dem Prädikat „blau“. Das Attribut ist nicht mehr ein Prädikat; als ehemaliges Prädikat ist es dem Subjekt einverleibt worden. Von der Negation erwartet man lediglich die Verneinung des Prädikates, das Attribut hingegen bleibt von der Negation unberührt. Häufig ist indessen von der Problemstellung her die genaue Unterscheidung zwischen Subjekt, Prädikat und Attribut überflüssig. Dann sprechen wir kurz von Termen.

Wie werden universale und partikuläre Subjekte gebildet?

Das konkrete Subjekt „dieser“ wird weggelassen, an seine Stelle tritt

- für das universale Subjekt: „alle“, „kein“
- für das partikuläre Subjekt: „einige“, „einige ... nicht“

Die Quantität des Subjektes – genauer des Attributes – teilt sich der ganzen Aussage mit. Wenn das Attribut universell genommen ist, dann wird die Aussage eine „universale Aussage“ genannt.

Nun können wir verschiedene Arten von Subjekten unterscheiden:

1) Konkretes, unanalysiertes Subjekt (dieser, du, usw.)
2) Konkretes Subjekt mit Attribut (dieser Kugelschreiber)
3) Allgemeines universales Subjekt (Alle Hunde ...)
4) Allgemeines partikuläres Subjekt (Einige Tiere ...)

Wir befassen uns nur mit den allgemeinen Subjekten.

3.1 Die kategorischen Sätze und das logische Quadrat

Als kategorische Sätze innerhalb der aristotelischen Logik sind nur Atomsätze zugelassen von der Form: Subjekt, Kopula, Prädikat. Sie lassen sich auf die vier folgenden Formen zurückführen:

1)	Universal bejahend	Alle S sind P
2)	Partikulär bejahend	Einige S sind P
3)	Universal verneinend	Kein S ist P
4)	Partikulär verneinend	Einige S sind nicht p

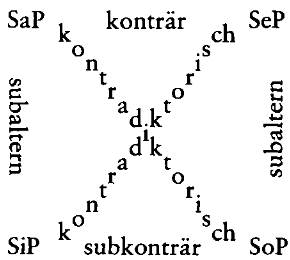
Allgemeine Subjekte	universal	bejahend	Alle S sind P
		verneinend	Kein S ist P
	partikulär	bejahend	Einige S sind P
		verneinend	Einige S sind nicht P

An die Stellen von ‚S' oder ‚P' dürfen wir Namen einsetzen, allerdings mit der Einschränkung, daß sie nicht leer sind, wie „Einhörner", „Nixen", „König der Schweiz" usw.

Die Beziehungen dieser vier Urteilsarten lassen sich am logischen Quadrat veranschaulichen. Dazu wird eine Formalisierung eingeführt mit Hilfe von vier Vokalen a, e, i und o. Sie sind den lateinischen Wörtern „affirmo" und „nego" entnommen, affirmo für die bejahenden und nego für die verneinenden Sätze. In der Symbolsprache werden sie zwischen ‚S' und ‚P' gesetzt.

Alle S sind P	S a P	(affirmo)
Einige S sind P	S i P	(affirmo)
Kein S ist P	S e P	(nego)
Einige S sind nicht P	S o P	(nego)

Das gegenseitige Verhältnis dieser Beziehungen läßt sich am logischen Quadrat ablesen.



- Aus dem Quadrat ersehen wir: SaP – SoP und SiP – SeP bilden je ein Paar kontradiktorischer Aussagen. Beide können nicht wahr, aber auch nicht falsch sein. Wenn die eine Behauptung wahr ist, dann ist die andere falsch und umgekehrt. Weil von der Wahrheit der einen auf die Falschheit der andern geschlossen werden darf, sagt man, die beiden würden sich ergänzen.
- Konträre Sätze können nicht zugleich wahr, jedoch gleichzeitig falsch sein.
- Subkonträre Sätze können zugleich wahr, nicht aber zugleich falsch sein.
- Bei der Subalternation darf von oben nach unten geschlossen werden, nicht umgekehrt.

Daneben gelten noch einige Beziehungen, die aus dem Quadrat nicht ersichtlich sind. Es geht um die Konversionen:

- Unter der Konversion versteht man jene Operation, bei der Attribut und Prädikat vertauscht werden, ohne die Art der Kopula zu verändern. Dabei sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:
- bei der conversio simplex (S a P zu P a S) bleibt die Quantität gleich,
- bei der conversio per accidens (S a P zu P i S) verändert sich auch die Quantität.

Die häufig verwendeten Ausdrücke „Gegensatz“ oder „Gegenteil“ sind mehrdeutig und können anhand des Quadrates präzise gefaßt werden.

Beispiel:

1) weiß – schwarz

2) weiß – nicht weiß
3) weiß – farbig

1) stellt eine konträre Beziehung dar, 2) eine kontradiktorische und 3) eine subalterne. Aristoteles versteht unter dem Widerspruch das kontradiktorische Gegenteil.

3.2 Der klassische Syllogismus

Wird aus zwei Sätzen von der Form Subjekt, Kopula, Prädikat, ein dritter von gleichem Aufbau gefolgert, so sprechen wir von einem Syllogismus. Zwei Grundsätze sind zu beachten, deren Verletzung die Schlußformen ungültig macht:

- Im Schlußsatz darf nie ein Term auftreten, der in keiner der Prämissen vorgekommen ist.
- Prinzip des „latius hos“ (latius hos quam praemissae conclusio non vult). Im Schlußsatz darf kein Term mit einer Quantität vorkommen, die größer wäre als die Quantität, mit der er in den Prämissen vorkommt. Die Verletzung heißt „ein Trugschluß des latius hos“.

Der Syllogismus ist ein Schluß von zwei Prädikataussagen auf eine dritte.

Alle B sind C
Alle A sind B
Also sind alle A C

Prämissen und Schlußsatz enthalten zusammen drei Attribute und drei Prädikate. Attribute und Prädikate des Schlußsatzes müssen in je einer der Prämissen vorkommen. Damit bleibt in beiden Prämissen je eine Stelle übrig für einen weiteren Term. Er muß die Verbindung zwischen den beiden Prämissen herstellen und heißt deshalb Mittelterm. Jener Term, der im Schlußsatz als Prädikat auftritt, soll „größerer Term“ heißen und mit „G“ bezeichnet werden. Er muß auch in einer Prämisse vorkommen, die wir die „größere“ oder „maior“ nennen (Obersatz). Der andere Term heißt „der kleinere Term“; entsprechend reden wir von „kleinerer Prämisse“ oder „minor“ (Untersatz). Dann haben wir folgendes Schema:

Alle M sind G	maior
Alle K sind M	minor
Also sind alle K G	Konklusion

Zur Gültigkeit sind ferner die fünf Regeln zu beachten:

1) Es kommen nur drei verschieden Terme vor, wobei der Mittelterm nicht mehr in der Konklusion auftreten darf.

2) Der Mittelterm muß in beiden Prämissen denselben Inhalt haben und mindestens in einer universell genommen werden. Die Vorschrift der Universalität nennt man „Distributionsregel". Sie ist so zu verstehen:

Aus (1) „Alle Menschen sind Lebewesen" folgt, daß auch dieser Mensch ein Lebewesen ist. Aber es folgt nicht, daß jeder Mensch dieses Lebewesen ist. Wir sagen deshalb, „Mensch" stehe für alle Supposita, das Attribut sei universell genommen, hingegen das Prädikat „Lebewesen" partikulär. Ein negativer Satz supponiert anders. Aus „Kein Mensch ist ein Pferd" darf geschlossen werden „Dieser Mensch ist nicht ein Pferd" und auch „Kein Mensch ist dieses Pferd". Subjekt und Prädikat sind hier universell genommen. Das natürliche Sprachempfinden belehrt uns ausreichend über die universelle Supposition des Subjektes, nämlich „Alle ..." und „Kein ..." Hingegen merke man sich für die universelle Supposition des Prädikates: Sie trifft nur auf negative Sätze zu, also „Kein ... ist P" und „Einige ... sind nicht P". Das führt zu folgender Übersicht:

	Subjekt	Prädikat
A	universell	partikulär
E	universell	universell
I	partikulär	partikulär
O	partikulär	universell

Ferner haben die traditionellen Logiker drei weitere Regeln formuliert, die sich auf die Art der Kopula des Schlußsatzes beziehen:

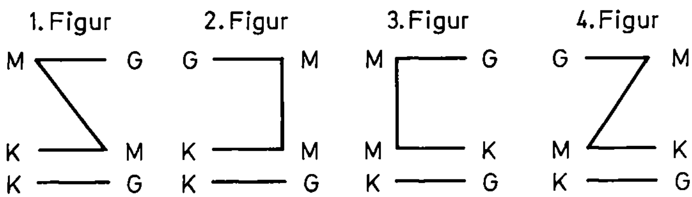
3) Zwei affirmative Prämissen können keinen negativen Schluß ergeben.

4) Wenn eine Prämisse negativ ist, dann muß auch der Schlußsatz negativ sein.

5) Aus zwei negativen Prämissen (EE, EO, OE; OO) läßt sich nichts schließen.

3.3 Die gültigen Figuren und Modi des Syllogismus

Seit dem 14. Jahrhundert haben die Scholastiker vier Figuren unterschieden. Sie heben sich durch die Stellung des Mittelterms voneinander ab.



Die Figuren lassen sich dem Gedächtnis leicht einprägen; sie können als ein stilisiertes „W“ gedeutet werden: \||/

Wenn die Qualität (Bejahung, Verneinung) und die Quantität (alle, einige) der Prädikataussagen bestimmt ist, erhält man für jede Figur die verschiedenen Modi. Daraus ergibt sich, daß wir es mit endlich vielen Syllogismen zu tun haben. Die Anzahl läßt sich genau bestimmen. Es liegen jeweils 2 Prämissen vor, bei denen jede die Möglichkeit hat, eine A, E, I oder O-Prämisse zu sein. Das ergibt 16 Möglichkeiten. Aber auch der Schlußsatz kann eine dieser vier Formen annehmen, also 16.4 = 64 Modi. Wenn wir weiter bedenken, daß diese 64 Modi in vier verschiedenen Figuren aufgestellt werden können, bekommen wir total 64.4 = 256 Syllogismen.
Aufgrund der Regeln werden jedoch die meisten Syllogismen ausgeschlossen. Offensichtlich ist nur ein kleiner Teil aller theoretischen Kombinationen der 256 Syllogismen verwertbar. Die Regel 5) lautet z. B., aus zwei negativen Prämissen dürfe nichts geschlossen werden. Unter den 256 Syllogismen sind aber auch Modi wie EEE, EEI, EEO und sogar EEA enthalten, die auszuscheiden sind. Wenn wir jene zurückbehalten, die mit keiner Regel in Konflikt

geraten, dann bleiben nur noch 24 Syllogismen übrig. Es sind die folgenden:

1. Figur	2. Figur	3. Figur	4. Figur
AAA	AEE	* AAI	* AAI
* AAI	* AEO	AII	AEE
AII	AOO	* EAO	* AEO
EAE	EAE	EIO	* EAO
* EAO	* EAO	IAI	EIO
EIO	EIO	OAO	IAI

Die mit * bezeichneten Modi haben einen abgeschwächten Schlußsatz, der zwar gültig ist, aber weniger schließt als er eigentlich könnte.

Beispiel:

Alle Menschen sind vernunftbegabt
Alle Griechen sind Menschen
Also sind einige Griechen vernunftbegabt

Da aus den Prämissen korrekt zu schließen ist „Alle Griechen sind vernunftbegabt", ist es nicht falsch zu sagen, daß auch einige von ihnen vernunftbegabt sind. Wenn wir jedoch diese abgeschwächten Formen ausscheiden – was in der modernen Logik vorgesehen ist – dann bleiben nur noch 15 Syllogismen übrig.

Um sich die gültigen Syllogismen zu merken, haben die Logiker der Spätscholastik künstliche Wörter gebildet, die die verschiedenen Modi darstellen, wobei die Vokale den Typ der Aussagen angeben; der erste Vokal entspricht dem Modus der ersten Prämisse, der zweite gibt den Modus der zweiten Prämisse an und der dritte Vokal den Modus des Schlußsatzes. Die mnemotechnischen Verse für die vier Figuren lauten

Barbara, Celarent, primae, *Darii, Ferio*que.
Cesare, Camestres, Festino, Baroco, secundae.
Tertia grande sonans recitat (*Darapti*), (*Felapton*),
Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison. Quartae
sunt (*Bamalip*), *Calemes, Dimatis*, (*Fesapo*), *Fresison.*

Fügt man der 1. Figur noch (*Barbari*) und (*Celaront*) bei, der 2. (*Cesarop*) und (*Camestrop*), sowie der 4. (*Calemop*), dann haben wir die 24 gültigen syllogistischen Modi beisammen, wobei die abgeschwächten in ( ) gesetzt sind.

Diese mnemotechnischen Wörter sind sehr rationell zusammengestellt. Sie enthalten alle Regeln der Syllogismen. Das ist der einzige Sinn der kursiv gedruckten Wörter. Die nicht kursiv gedruckten Wörter geben auf Lateinisch an, zu welchen Figuren die Modi gehören, also primae (figurae) usw.

Praktisches Vorgehen:
1. Zuerst werden die Modi der beiden Prämissen bestimmt.
2. Anhand der Mittelterme erkennt man die Figur.
3. Mit Hilfe des Merkverses kann die Konklusion aufgesucht werden, oder, wenn sie schon gegeben ist, ihre Gültigkeit nachgewiesen werden.

Sollten die beiden ersten Bedingungen nicht oder nicht eindeutig zu erfüllen sein, dann ist der Syllogismus verschwommen und logisch unbrauchbar.

Beispiel 1:

Alle Menschen sind vernünftig
Alle Griechen sind Menschen
Also sind alle Griechen vernünftig

1. Bestimmung der Modi: Die 1. Prämisse ist eine A-Prämisse, die zweite ebenfalls und auch die Konklusion. Also liegt ein Syllogismus mit den Modi AAA vor. 2. Bestimmung der Figur: Die Figur wird aus der Stellung des Mitteltermes ersichtlich. Mittelterm ist „Mensch“. In der ersten Prämisse steht er an der Stelle des Subjekts, in der zweiten an derjenigen des Prädikates. Das deutet auf die erste Figur hin.

Das ergibt: 1. Figur, AAA.

3. Für den Nachweis der Gültigkeit haben wir drei Möglichkeiten:

a) Wir gehen sämtliche Regeln durch. Wenn keine verletzt wurde, so ist das ein Beweis, daß der Syllogismus richtig ist. Dieses

Vorgehen ist jedoch viel zu umständlich. Dazu kommt noch die psychologisch begreifliche Neigung, die Kontrolle nachlässig auszuführen, sobald man den Syllogismus als richtig empfindet. Daher ist diese Überprüfung nicht zu empfehlen.

b) Wir schauen auf der Tabelle nach, ob unter der 1. Figur ein AAA zu entdecken ist. Das trifft zu und zwar gleich in der 1. Zeile. Also ist die Gültigkeit des Syllogismus gesichert.

c) Da man nicht immer die Tabelle zur Hand hat, sind die mittelalterlichen Logiker auf den Gedanken verfallen, den Merkvers „*Barbara, Celarent ...*“ auswendig zu lernen. Wir lassen ihn im Geist ablaufen und vernehmen, daß in der ersten Figur 4 gültige Syllogismen zu erschließen sind, nämlich *Barbara, Celarent, Darii* und *Ferio*. Unsere drei gesuchten „a“ sind tatsächlich dabei, nämlich im Wort „*Barbara*“. Deshalb sagen wir: Bei unserem Beispiel handelt es sich um einen gültigen Syllogismus der 1. Figur, *Barbara*.

Beispiel 2:

Alle Schachspieler sind Logiker
Einige Hausfrauen sind nicht Logiker
Also sind einige Hausfrauen nicht Schachspieler

1. Bestimmung der Modi: Die erste Prämisse ist eine A, die zweite eine O und die Konklusion ebenfalls eine O-Aussage. Also: AOO.

2. Figur: Der Mittelterm ist „Logiker“. Gemäß der Stellung wird damit die 2. Figur repräsentiert. Gibt es in der 2. Figur AOO?

3. Der Merkvers enthält in der 2. Figur: *Cesare, Camestres, Festino,* und *Baroco*. Unsere gesuchten drei Vokale finden wir im Wort „*Baroco*“. Deshalb sagen wir: Es handelt sich um einen gültigen Syllogismus der 2. Figur, *Baroco*.

Beispiel 3:

Alle Philosophen sind Denker
Einige Denker sind weltfremd
Also sind einige Philosophen weltfremd

Modi: AII
Fig.: 4.

Am auswendig gelernten Vers könne wir für die 4. Figur aufzählen: (*Bamalip*), *Calemes, Dimatis,* (*Fesapo*) und *Fresison.* Keines dieser Wörter enthält die Vokale AII. Also ist der Syllogismus ungültig.

Übung 3.3

Geben Sie für jeden Syllogismus Figur und Merkwort an (z. B. 1., *Barbara*) wenn er falsch ist nur die Figur und die Vokale (z. B. 1., EEI)

1) Alle Fische sind Wassertiere
Einige Säugetiere sind Fische
Also sind einige Säugetiere Wassertiere

2) Alle Sänger sind fröhlich
Einige Jäger sind nicht fröhlich
Also sind einige Jäger nicht Sänger

3) Alle Kölner sind Menschen
Alle Deutschen sind Menschen
Also sind alle Kölner Deutsche

4) Alle Löwen sind Pflanzenfresser
Alle Kühe sind Löwen
Also?

5) Alle Lügner sind unglaubwürdig
Einige Lügner sind Zeitungsleute
Also?

6) Jedes Huhn ist ein Zweibeiner
Keine Katze ist ein Huhn
Also ist keine Katze ein Zweibeiner

7) Kein Ochse ist ein Vogel
Kein Fisch ist ein Ochse
Also ist kein Fisch ein Vogel

8) Kein Minister ist Polizist
Alle Minister sind Gäste
Also einige Gäste sind nicht Polizisten

9) Einige Preßluftbohrer machen nicht nervös
Alle Preßluftbohrer sind Lärmquellen
Also machen einige Lärmquellen nicht nervös

10) Alle Nichtraucher sparen Geld
Kein Vegetarier ist Raucher
Also sparen alle Vegetarier Geld

11) Alle Armen sind Flüchtlinge
Einige Flüchtlinge sind bemitleidenswert
Also?

12) Kein Fisch ist ein Vierbeiner
Einige Säugetiere sind Fische
Also?

13) Keine Schwierigkeit ist unüberwindbar
Einige unüberwindbare Situationen sind lächerlich
Also sind einige Schwierigkeiten lächerlich

14) Alle Pferde sind Einhufer
Alle Einhufer sind Säugetiere
Also sind alle Säugetiere Pferde

Im Mittelalter sind die Prämissen erweitert worden von Klassen auf Individualnamen. Seither gibt es den Syllogismus vom sterblichen Sokrates:

Alle Menschen sind sterblich
Sokrates ist ein Mensch
Also ist Sokrates sterblich

Die zweite Prämisse läßt sich nur als A- oder I-Prämisse deuten. Beide Vorschläge sind brauchbar. Bei der I-Deutung bekämen wir eine 1. Figur und hätten nach *Darii* zu schließen, bei der A-Deutung 1. Figur nach *Barbara.* Das Mittelalter hat der A-Deutung den Vorzug gegeben mit der Überlegung, Syllogismen der folgenden Art sollen gültig sein:

Sokrates ist weise
Sokrates ist ein Mensch
Also ist ein Mensch weise

Diese 3. Figur ist nach der A-Deutung ein *Darapti,* nach der I-Deutung wird der Schluß (III) unerlaubt.

Übung 3.3

15) Alle Italiener sind Europäer
Galilei war ein Italiener
Also?

16) Gisela ist Pianistin
Alle Pianisten sind Künstler
Also einige Künstler heißen Gisela

17) Kein Hund ist eine Katze
Rex ist ein Hund
Also ist Rex keine Katze

Die traditionellen Schulbücher haben auf die häufigsten Gefahren hingewiesen, die einen Syllogismus zu verfälschen drohen. Freilich haben sie dabei, statt allgemein vor der Verschwommenheit der Sprache zu warnen, die Mehrdeutigkeit der Quaternio terminorum als Sonderfall überschätzt. Es handelt sich dabei um einen Syllogismus, der scheinbar vorschriftsmäßig aufgebaut ist. Eine eingehendere Analyse zeigt indessen eine Mehrdeutigkeit des Mittelterms. Er besitzt zwei verschiedene Bedeutungen, so daß es sich in Wirklichkeit um einen Syllogismus mit vier Termen handelt.

Beispiel:

Alles Geistige ist unkörperlich
Alkoholika sind geistig
Also sind Alkoholika unkörperlich

Die Zweideutigkeit im Wort „geistig“ dürfte schwer zu übersehen sein. In Wirklichkeit ist diese Art Mehrdeutigkeit in der Praxis äußerst selten verglichen mit andern Fehlern.

Die folgende Übung geht auf Texte von Fachleuten ein, die sich für

Logik zuständig halten und deshalb Rat erteilen. Geben Sie eine genaue Beurteilung.

Übung 3.3

18) „Der wichtigste (unter Umständen zur Irreführung bewußt beabsichtigte) Schlußfehler ist die Quaternio terminorum, wo ein M in verschiedener Bedeutung verwendet wird, wodurch vier Begriffe im Syllogismus vorkommen: S, P, M_1, M_2.

Beispiel:

Steine sind billiges Straßenpflaster
Diamanten sind Steine
Daher sind Diamanten billiges Straßenpflaster"
(A. R. Wieser, Philosophie. Einführung und Orientierung. Deuticke (Wien 1969) 41).

19) „Verdeckt wird häufig die quarternio durch Gleichheit des Begriffswortes bei verschiedenem Sinn und Umfang. Es gibt den typischen Gelehrten, der mit Ausnahmen und in verschiedenem Grade gewisse Eigentümlichkeiten hat, aber auch einen Allgemeinbegriff des Gelehrten, dessen Merkmale jeder Gelehrte tragen muß.

Der Gelehrte ist vergeßlich (Typ)
Du bist Gelehrter (Allgemeinbegriff)
Es folgt nicht: Du bist vergeßlich"
(J. Münzhuber, Eine Einführung in die Philosophie. Die Egge (Nürnberg 1948) 50–51).

20) „Die Russen sind Planwirtschafter
Präsident Roosevelt ist ein Planwirtschafter
Also ist Präsident Roosevelt ein Russe – oder wenigstens ein russischer Agent. Dieser falsche Syllogismus würde sogar einen Logiker schockieren".
(St. Chase, The Tyranny of Words (New York 1938) 146).

21) „1. Nicht alle Tiere sind Elephanten
2. Jeder Elephant ist Nicht-Mensch
Also: Nicht alle Tiere sind Nicht-Menschen. ...

Unser Syllogismus ist richtig gebildet. Zweimal steigen wir vom engeren Begriff oder durch eingeengte Begriffe zu Größerem auf. Wir haben also dem Prinzip des Größeren und Kleineren Genüge getan". (E.W. Platzeck, Von der Analogie zum Syllogismus (Paderborn 1954) 94).

3.4 Beweis der Syllogismen

Unter einem Beweis versteht man in der Syllogismentheorie die Rückführung der 2., 3. und 4. Figur auf die 1. Die Gültigkeit der 1. Figur wird dabei vorausgesetzt. Für die Rückführung geben die mnemotechnischen Worte durch die Konsonanten die einzuhaltenden Regeln an.

Alle Wörter beginnen mit den Konsonanten „B", „C", „D" oder „F". Das gilt auch für alle vier Modi der 1. Figur, nämlich *Barbara, Celarent, Darii* und *Ferio*. Sie sind vorausgesetzt. Alle Wörter, die mit „B" beginnen – *Baroco* und *Bocardo* sind die beiden Ausnahmen, so daß nur *Bamalip* übrig bleibt – werden auf *Barbara* zurückgeführt. Ähnlich die mit „C" beginnenden Wörter auf *Celarent* usw. Daneben sind in den mnemotechnischen Wörtern noch Regeln aufgezählt, die durch Konsonanten angedeutet sind:

„s" Der Konsonant „s" gibt an, daß man die durch den vorhergehenden Vokal bezeichnete Aussage vollkommen (simpliciter) konvertieren soll. Das bedeutet, Subjekt und Prädikat sind zu vertauschen, also S a P in P a S zu überführen.

„p" Der Konsonante „p" gibt an, daß man eine unvollkommene Konversion (per accidens) ausführen soll. Sie besteht in der Vertauschung von Subjekt und Prädikat wie bei „s", zusätzlich aber in der Veränderung der Quantität. Aus einer A-Prämisse wird eine I und umgekehrt. Also aus S a P gibt es P i S.

„m" Der Konsonant „m" gibt an, daß die Reihenfolge der Prämissen vertauscht werden soll (mutare).

„c" Der Konsonant „c" besagt, daß der Beweis durch Zurückführen auf einen Widerspruch (per contradictionem) geführt wird. Dieser Fall wird gesondert behandelt.

Die übrigen Konsonanten „r“, „n“, „t“ und „q“, sowie die Vokale, die zuweilen nach dem dritten Vokal auftreten (z.B. Baralipton), haben keine Bedeutung. Der Ablauf der Beweise soll nun an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiel 1:

Kein Pilot ist blind
Einige Blinde sind Musiker
Also sind einige Musiker nicht Piloten

Es handelt sich um eine 4. Figur mit den Modi EIO, d.h. *Fresion*. *Fresion* wird auf *Ferio* zurückgeführt. Dabei sind die beiden Vokale „e“ und „i“ von einem „s“ gefolgt. Damit ist die Vorschrift gegeben, die beiden Prämissen simpliciter zu konvertieren. An der Konklusion haben wir nichts zu ändern, da das auf „o“ folgende „n“ keine Bedeutung hat. Wir schreiben links den ursprünglichen Syllogismus hin, rechts die vorschriftsgemäß umgeformten Aussagen.

Fresion (4. Figur)	*Ferio* (1. Figur)
Kein Pilot ist blind	Kein Blinder ist Pilot
Einige Blinde sind Musiker	Einige Musiker sind blind
Einige Musiker sind nicht Piloten	Einige Musiker sind nicht Piloten

Angesichts dieses Resultates sagen wir: Der Beweis eines *Fresison* der 4. Figur ist geglückt.

Beispiel 2:

Camestres (2. Figur)	*Celarent* (1. Figur)
Alle Hunde sind Vierbeiner	Kein Vierbeiner ist eine Ente
Keine Ente ist ein Vierbeiner	Alle Hunde sind Vierbeiner
Keine Ente ist ein Hund	Kein Hund ist eine Ente

Soll ein *Camestres* bewiesen werden, so kann das nur durch Zurückführung auf *Celarent* geschehen. Als ersten auszuführenden Schritt deutet uns das „m“ zwischen „a“ und „e“ an, daß diese beiden Prämissen zu vertauschen sind. Vertauschen bedeutet hier, die 1. Prämisse als 2. zu betrachten und die 2. an die Stelle der 1. zu setzen. Auf das erste „e“ folgt noch ein „s“, wodurch zusätzlich eine conversio simplex verlangt wird. Das wäre der zweite Schritt. Sollten die Schritte vertauscht werden, also zuerst die conversio simplex an der „e"-Prämisse ausgeführt werden mit anschließender Vertauschung der Prämissen, so wäre das ohne Einfluß. Doch vergessen wir nicht, auch der Schlußsatz ist noch von einem „s" gefolgt, so daß auch er simpliciter konvertiert werden muß.

Beispiel 3:

(*Fesapo*) (4. Figur)	*Ferio* (1. Figur)
Kein Mensch ist ein Tier	Kein Tier ist ein Mensch
Alle Tiere sind Lebewesen	Einige Lebewesen sind Tiere
Also sind einige Lebewesen nicht Menschen	Also sind einige Lebewesen nicht Menschen

(*Fesapo*) steht in Klammern. Dieser Schluß wird von der modernen Logik nicht anerkannt. Hingegen findet der daraus gewonnene *Ferio* ohne Einschränkung die Zustimmung der heutigen Logiker. – Die 1. Prämisse ist simpliciter konvertiert worden, bei der 2. wurde eine conversio per accidens ausgeführt. Neben der Vertauschung von Subjekt und Prädikat verlangt sie auch eine Änderung der Qualität, d.h. daß „alle" in „einige" umzuwandeln ist.

Übung 3.4.

1) Kein Weinbauer ist Mitglied im Blauen Kreuz
Einige Walliser sind Mitglieder im Blauen Kreuz
Also sind einige Walliser nicht Weinbauern

2) Alle Säugetiere atmen durch Lungen
Einige Säugetiere sind Wassertiere
Einige Wassertiere atmen durch Lungen

3) Einige Tiergifte sind Arzneien
Alle Arzneien sind nützliche Substanzen
Also sind einige nützliche Substanzen Tiergifte

4) Kein Auto ist rostfrei
Alle Autos sind teuer
Einige teuren Dinge sind nicht rostfrei

5) Einige Kirchen sind renoviert
Alle Kirchen sind Gotteshäuser
Einige Gotteshäuser sind renoviert

6) Kein Vater ist eine Mutter
Einige Mütter sind Verteranen
Also sind einige Veteranen nicht Väter

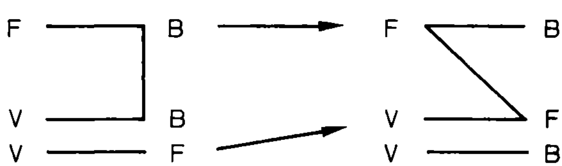
Der Konsonant „c“ nimmt eine Sonderstellung ein. Davon sind nur die beiden Wörter *Baroco* und *Bocardo* betroffen, die per contradictionem auf *Barbara* zurückzuführen sind.

Man geht dabei von der Annahme aus, der Gegner akzeptiere die Prämissen, leugne aber den Schluß. Wer eine Behauptung ablehnt, der muß das kontradiktorische Gegenteil dieser Behauptung anerkennen, weil es implizit mitbehauptet wird. Das kontradiktorische Gegenteil der Konklusion wird als Prämisse eingesetzt, um daraus zusammen mit einer anderen Prämisse einen *Barbara*-Schluß zu folgern, der seinerseits in Widerspruch steht zu einer der Prämissen, die der Gegner gemäß der Anfangsannahme anerkannt hat. Der Vorgang ist identisch mit dem, was wir in der Aussagenlogik einen indirekten Beweis genannt haben.

Beispiel 1:

Baroco	*Barbara*
Alle Filme sind belehrend	Alle Filme sind belehrend
Einige Vorstellungen sind nicht belehrend	Alle Vorstellungen sind Filme
Einige Vorstellungen sind nicht Filme	Alle Vorstellungen sind belehrend

Eine Prämisse bleibt erhalten und wird auf die rechte Seite gesetzt. Es ist jene, die nicht vom „c“ gefolgt ist, also die A-Prämisse. Als weitere Prämisse wird die Konklusion von *Baroco* eingesetzt, jedoch in ihrem kontradiktorischen Gegenteil.



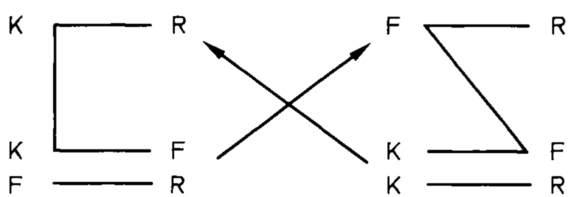
Aus diesen beiden Prämissen läßt sich jetzt nach *Barbara* schließen: „Also sind alle Vorstellungen belehrend". Diese Konklusion steht in kontradiktorischem Gegensatz zur ursprünglich 2. Prämisse, einer Annahme des Gegners.

Der Gegner muß jetzt zugeben, daß der von ihm ursprünglich bestrittene Schluß eben doch gültig ist.

Beispiel 2:

Bocardo	*Barbara*
Einige Kirschen sind nicht rot	Alle Früchte sind rot
Alle Kirschen sind Früchte	Alle Kirschen sind Früchte
Einige Früchte sind nicht rot	Alle Kirschen sind rot

Die A-Prämisse – bei *Bocardo* ist es die zweite – wird als gültig übernommen und auf die rechte Seite gesetzt. Für die fehlende weitere Prämisse wird wieder das kontradiktorische Gegenteil der *Bocardo*-Konklusion eingesetzt. Also aus „Einige Früchte sind nicht rot" ergibt sich kontradiktorisch „Alle Früchte sind rot". Aus diesen beiden Prämissen folgt der *Barbara*-Schluß: „Also sind alle Kirschen rot". Er steht in kontradiktorischem Gegensatz zur 1. Prämisse von *Bocardo*.



7) Alle Quadrate sind viereckig
Einige Figuren sind nicht viereckig
Also sind einige Figuren nicht Quadrate

8) Einige Beamte sind nicht verheiratet
Alle Beamten sind in der Pensionskasse
Einige Mitglieder der Pensionskasse sind nicht verheiratet

9) Alle Lose sind Treffer
Einige Papiere sind keine Treffer
Einige Papiere sind keine Lose

10) Einige Bücher sind nicht gebunden
Alle Bücher sind Kostbarkeiten
Einige Kostbarkeiten sind nicht gebunden

3.5 Sorites

Bisher sind wir bei den aristotelischen Syllogismen immer von zwei Prämissen ausgegangen. Wird ein Schluß aus drei, vier oder beliebig vielen Prämissen abgeleitet, so spricht man von einem Sorites. Ein Sorites (ὁ σωρός = Haufe) ist eine Aufeinanderfolge von Syllogismen, bei denen die Zwischenschlüsse nicht ausgeschrieben sind. Das sei an einem Beispiel gezeigt:

1. Einige Straßenmarkierungen sind Pappeln
2. Alle Pappeln sind Bäume
3. Alle Bäume sind Pflanzen
4. Keine Pflanze ist ein Stein
5. Also sind einige Straßenmarkierungen nicht Steine

Es gibt keine klassische Regel, die erlauben würde, den Schluß direkt aus den vier Prämissen zu folgern. Nur der mühsame Umweg ist vorgesehen: Aus zwei Prämissen wird ein Schluß gefolgert. Die Konklusion kann ihrerseits wieder als Prämisse benutzt werden, aus der zusammen mit der folgenden Prämisse eine zweite Konklusion gefolgert wird usw. Demnach läßt sich unser Beispiel so lösen

1. Einige Straßenmarkierungen sind Pappeln
2. Alle Pappeln sind Bäume
3. Also: Einige Bäume sind Straßenmarkierungen
   3.

4. Alle Bäume sind Pflanzen
5. Also: Einige Pflanzen sind Straßenmarkierungen

   5.
   6. Keine Pflanze ist ein Stein
   7. Also: Einige Straßenmarkierungen sind nicht Steine

Manchmal müssen die Prämissen zuerst wie in einem Puzzle-Spiel in die richtige Reihenfolge gebracht werden, bevor man überhaupt schließen kann. Auf jeden Fall zeigt uns dieser simple Sorites, wie kompliziert die aristotelische Logik bereits in einfachsten Fällen wird.

Übung 3.5 (freiwillig)

1) Alle Diplomaten sind taktvoll
   Einige Regierungsvertreter sind Diplomaten
   Alle Regierungsvertreter sind Leute des öffentlichen Lebens
   Also sind einige Leute des öffentlichen Lebens taktvoll

2) Frauen sind unlogisch
   Niemand ist verachtet, der Autofahren kann
   Unlogische Personen sind verachtet
   Also sind Frauen nicht Autofahrer

3) Jeder geistig Gesunde kann logisch schließen
   Kein Verrückter kann als Richter walten
   Keiner deiner Freund kann logisch schließen
   Also kann keiner deiner Freunde als Richter walten

3.6 Enthymem

Im alltäglichen Leben werden die Prämissen nicht immer so deutlich und vollständig ausgesprochen, wie es ein Logiker wünschen möchte. Selbstverständlichkeiten werden vorausgesetzt, ohne erwähnt zu werden. Eine Prämisse, die nur „im Geist" vorhanden ist und nicht ausgesprochen wird, nennt man seit den Griechen Enthymem (ἐν θυμῷ).

Beispiel:

Hans ist Musiker
Nur Naturwissenschaftler sind zur Tagung eingeladen
Also ist Hans nicht eingeladen

Wer diesen Schluß als richtig empfindet, der hat die Zusatzprämisse unterstellt: Kein Musiker ist Naturwissenschaftler. Auf diese Weise vermag die Logik durch Rückfragen uneingestandene Prämissen aufzudecken.

Ein weiteres Beispiel:

Judith ist die Schwester von Stephan
Also ist Judith ein Mädchen

Für diesen Schluß wird die von niemandem bestrittene Zusatzhypothese verwendet: Alle Schwestern sind Mädchen.

Mit dem letzten Beispiel sind wir einmal mehr an die Grenzen der aristotelischen Logik gestoßen. Der Ausdruck „Schwester von" ist bereits zu komplex, um noch bewältigt werden zu können. Es fehlt der Syllogistik an der Analyse von Relationsausdrücken. Selbst die einfachen Wahrheitswertfunktoren sind nicht systematisch untersucht worden. Deshalb trifft man immer wieder auf Schlüsse, die der gesunde Menschenverstand längst als richtig eingesehen hat, die mit dem Einsatz der traditionellen Logik jedoch unlösbar sind. Es sei das einfache Beispiel erwähnt:

Alle Planeten sind rund oder viereckig
Kein Planet ist viereckig
Also sind die Planeten rund

Bevor wir zeigen, wie die neue Logik solche Beschränkungen übersteigt, sei abschließend auf den Zusammenhang der aristotelischen Logik zur Mengenlehre eingegangen.

3.7 Syllogistik und Mengenlehre

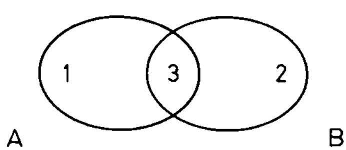
Die traditionelle Sprachanalyse unterscheidet zwischen Subjekt und Prädikat. „Alle Bäume sind Pflanzen" kann als Illustration dienen, wobei „Bäume“ das Subjekt und „Pflanzen“ das Prädikat ist. In der Terminologie der Mengenlehre sind beides Mengen oder Klassen. Demnach haben wir es beim Syllogismusschema

$$\begin{array}{ll} M & P \\ S & M \\ \hline S & P \end{array}$$

mit 6 Klassen zu tun. Genauer sind es drei Klassen, die paarweise auftreten, nämlich zwei „M“, zwei „S“ und zwei „P“. Die aristotelische Logik ist demnach eine Drei-Klassen-Lehre. Deshalb darf diese Logik als Spezialfall der Mengenlehre aufgefaßt werden. Von einem Spezialfall reden wir wegen der zweifachen Einschränkung:

- Während die Mengenlehre zwischen einer bis beliebig viele Mengen zuläßt, müssen es bei Aristoteles immer genau drei sein.
- Die Mengenlehre legt sich keine Beschränkung in den Operationen auf; Aristoteles läßt nur die einfachsten zu.

Diese Einschränkungen erlauben uns, die aristotelischen Aussagen durch einen einzigen Funktor darzustellen und zwar in Gleichungen, die auf Null gelöst sind. Der bevorzugte Funktor ist der Durchschnitt oder die Intersektion.



„Kein A ist B“ besagt nun, der Durchschnitt zwischen A und B enthalte kein Element, d.h. 0 Elemente. Das drücken wir so aus

$$A \cap B = 0$$

Ebenso einfach läßt sich beschreiben, der Durchschnitt sei nicht leer. Es ist die bloße Verneinung der ersten Aussage, also

$$A \cap B \neq 0$$

„Der Durchschnitt von A und B ist nicht leer" ist jedoch eine negative Formulierung für „Einige A sind B".

Wie läßt sich nun „Alle A sind B" ausdrücken? An den Eulerkreisen lesen wir ab, daß dies gleichbedeutend ist mit der Behauptung, außerhalb von B gebe es kein Element, also B′ sei Null. Diese Tatsache können wir als Durchschnitt von A und B so darstellen:

$$A \cap B' = 0$$

Das entspricht genau der Aussage „Alle A sind B".

Wird die Gleichheit verneint, so haben wir die kontradiktorische Aussage dazu:

$$A \cap B' \neq 0$$

Sie ist gleichbedeutend mit der Behauptung, der Durchschnitt von A und B′ sei nicht Null, oder in der Umgangssprache „Einige A sind nicht B".

Damit haben wir alle kategorischen Satzformen in Gleichungen umgeschrieben:

Alle A sind B	$A \cap B' = 0$
Kein A ist B	$A \cap B = 0$
Einige A sind B	$A \cap B \neq 0$
Einige A sind nicht B	$A \cap B' \neq 0$

Die einzige Operation brauchen wir nicht zu schreiben. Überdies wählen wir bei der allgemeinen Darstellung in Anlehnung an Subjekt-Prädikat die kleinen Buchstaben „s" und „p". Das führt zu folgender nützlichen Schreibweise:

S a P	$sp' = 0$
S e P	$sp = 0$
S i P	$sp \neq 0$
S o P	$sp' \neq 0$

Mit diesem Instrumentarium können wir nun die Gültigkeit eines Syllogismus untersuchen. Das Prüfverfahren ist dasselbe, das wir bei *Baroco* und *Bocardo* verwendet haben, nämlich der indirekte Beweis. Den Ablauf wollen wir an konkreten Beispielen zeigen.

Beispiel 1:

Alle Meisen sind Singvögel
Alle Blaumeisen sind Meisen
Also sind alle Blaumeisen Singvögel

$$
\begin{array}{l}
1.\ ms' = 0 \\
2.\ \underline{bm' = 0} \\
3.\ bs' = 0
\end{array}
$$

Der indirekte Beweis geht davon aus, die Konklusion sei falsch. Das ist gleichbedeutend mit der Anerkennung des kontradiktorischen Gegenteils. Daher klammern wir die Konklusion ein und setzen das kontradiktorische Gegenteil als 4. Schritt hin:

$$4.\ bs' \neq 0$$

Von jetzt an werden nur diese neue Konklusion und die beiden Prämissen im Auge behalten. Unter diesen drei Sätzen sind immer 2 Gleichungen und 1 Ungleichung zu finden. Die beiden Gleichungen – im vorliegenden Beispiel sind es die beiden Prämissen – werden addiert. Das ergibt:

$$5.\ ms'bm' = 0$$

Aus der Mengenlehre wissen wir, daß der Durchschnitt einer Menge mit ihrem Komplement die leere Menge ergibt. Daher fällt in unserer Gleichung der Mittelterm mit seinem Komplement weg. Übrig bleibt:

$$6.\ s'b = 0$$

Dieses Resultat steht im Widerspruch zur Annahme 4. Deshalb muß die Hypothese 4. als falsch angesehen werden, folglich war der Schluß 3. korrekt.

Beispiel 2:

Kein Walzer ist ein Bolero
Einige Tänze sind Boleros
Also sind einige Tänze nicht Walzer

$$
\begin{array}{l}
1.\ wb = 0 \\
2.\ \underline{tb \neq 0} \\
3.\ tw' \neq 0
\end{array}
$$

Das kontradiktorische Gegenteil zu 3. lautet:

4. $tw' = 0$

Nun sind wieder die beiden Gleichungen – hier sind es 1. und 4. – zu addieren; das ergibt

5. $wbtw' = 0$

Da sich w mit dem Komplement w' wieder aufhebt, bleiben bt übrig, oder kommutiert tb, also

6. $tb = 0$

Dieses Resultat steht in kontradiktorischem Gegensatz zur 2. Prämisse. Es ist also falsch, folglich auch die in 4. gesetzte Annahme.

Beispiel 3:

1. Alle Autos sind Kraftfahrzeuge
2. Alle Mercedes sind Kraftfahrzeuge
3. Also sind alle Mercedes Autos

$$
\begin{array}{ll}
1. & ak' = 0 \\
2. & \underline{mk' = 0} \\
3. & (ma' = 0) \\
4. & ma' \neq 0 \\
5. & ak'mk' = 0
\end{array}
$$

Weiter kommen wir nicht. In 5. hebt sich der Mittelterm nicht auf und so läßt sich der Widerspruch nicht nachweisen. Folglich ist der Syllogismus ungültig.

Übung 3.7

A) Prüfen Sie die Syllogismen 1) bis 7) aus der Übung 3.3 mit dieser neuen Methode.

Bei allen modernen Prüfverfahren fallen die sogenannten schwachen Syllogismen weg, d. h. sie gelten als falsch. Da die Mengenlehre ebenfalls als modern anzusehen ist in dieser Hinsicht, so hat man sich auf die gleichen Folgen einzustellen.

Beispiel 4:

1. Keine Rose ist eine Enziane
2. Alle Enziane sind blau
3. Also sind einige Rosen nicht blau

$$\begin{array}{l} 1.\ re = 0 \\ 2.\ \underline{eb' = 0} \\ 3.\ rb' \neq 0 \end{array}$$

Es handelt sich um einen (*Fesapo*) der 4. Figur. Wenn wir das kontradiktorische Gegenteil der Konklusion bilden

$$4.\ rb' = 0$$

erhalten wir drei Gleichungen und keine Ungleichung mehr. Dadurch wird die Aufgabe unlösbar und die moderne Logik betrachtet den Syllogismus als falsch. Darin eine Schwäche der modernen Logik sehen zu wollen, dürfte wohl nicht die richtige Antwort sein. Immerhin soll eine etwaige Beurteilung nicht übersehen, wie seltsam die Behauptung der traditionellen Logik ist „Einige Rosen sind nicht blau", obgleich jedermann genau weiß, daß es überhaupt keine blauen Rosen gibt.

Übung 3.7

B) Prüfen Sie die Syllogismen 8) bis 14) aus der Übung 3.3.

C) Kontrollieren Sie in allen Figuren

a) E I O
b) A O O

D) Warum ist AAA nur in der 1. Figur gültig?

4. Der elementare Prädikatenkalkül

Die Beziehung zwischen Aussagen- und Prädikatenkalkül läßt sich mit einem Netz vergleichen. Die Aussagenlogik ist grobmaschig, es bleiben nur ganze Aussagen darin hängen. Die Prädikatenlogik vermag Prädikate und andere Satzteile zu erfassen. Der Vergleich trifft ferner auch in dieser bedeutsamen Hinsicht noch zu, daß mit dem kleinen Netz alle großen Fische – die des Aussagenkalküls – gefangen werden können, aber nicht umgekehrt. Im Alltag haben wir es manchmal auf kleine Fische abgesehen. Die bisher behandelte Aussagenlogik ist eine derart armselige Sprache, daß sie vor einfachsten Argumentationen eines Kleinkindes kapitulieren muß. Wenn es sagt: „Mama ist lieb und gut", dann möchte es zwei Eigenschaften vom gleichen Individuum ausdrükken. Die Formalisierung ‚$L \wedge G$' zeigt nicht an, ob hier von einem oder von zwei Individuen gesprochen wird. Um den einfachen Sachverhalt logisch darzustellen, haben wir die Sprache auf Satzteile auszuweiten.

4.0 Aufbau von Prädikataussagen

Der Prädikatenkalkül übernimmt die gesamte Aussagenlogik von der Symbolik bis zu deren Interpretation. Die Hilfsmittel der Aussagenlogik bestehen aus fünf logischen Konstanten ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) und einer unbeschränkten Anzahl von Buchstaben als Platzhalter für Aussagen (für Variable p, q, r ..., für Konstante A, B, C ...). Um nur schon die Syllogismen zu überprüfen, müssen die Aussagen im aristotelischen Sinn auf eine verfeinerte Analyse vorbereitet werden. Wir haben es deshalb mit Aussagen von der folgenden Art zu tun:

Der Mensch ist vernünftig
Der Bahnhof ist alt
Veilchen sind blau usw.

Es scheint sich da um Aussagen zu handeln, die sich von den in der

Aussagenlogik behandelten gar nicht unterscheiden. Das ist auch richtig. Nur sind wir hier an einem anderen Aspekt interessiert. Wir betrachten sie nicht bloß als wahr oder falsch in ihrer Gesamtheit, vielmehr nach einer inhaltlichen Beziehung. Dabei fällt auf, daß von den Menschen, dem Bahnhof und den Veilchen etwas ausgesagt wird. Die Dinge, von denen etwas ausgesagt wird, sind Individuen, und das, was ausgesagt wird, sind Eigenschaften. Eigenschaften nennen wir Prädikate. Ob nun von einem Individuum etwas mit Hilfe eines Adjektivs oder einer anderen Wortkategorie ausgesagt wird, das ist belanglos. Deshalb sind für uns die folgenden Satzarten identisch:

Brigitte ist eine Schwatzbase
Brigitte ist schwatzhaft
Brigitte schwatzt ununterbrochen usw.

4.1 Individuen- und Prädikatausdrücke

In der Prädikatenlogik stellen wir jedes Individuum mit einem Buchstaben dar, ebenfalls jede Eigenschaft, die von ihm ausgesagt wird. Überdies muß unmittelbar ersichtlich sein, ob es sich um ein Individuum oder um ein Prädikat handelt. Entgegen der Konvention in der deutschen Sprache wählen wir für die Bezeichnung von Individuen kleine und für Prädikate große Buchstaben.

Also:

Individuen	s	Sonne
	m	Mond
	v	Venus
	j	Jupiter
Prädikate	K	kugelförmig
	L	leuchtend
	D	durchsichtig
	G	gummig

Mit diesem Vokabular lassen sich Sätze formen von der Art:

Ks Die Sonne ist kugelförmig

Lv	Die Venus leuchtet
Dm	Der Mond ist durchsichtig

Diese verfeinerte Sprache erlaubt bereits, Beziehungen darzustellen, die wir bisher übergehen mußten.

Beispiel:

(1) Albert singt oder Berta ißt Kuchen
(2) Albert singt oder ißt Kuchen

Aussagenlogik: (1′) $A \vee B$
(2′) $A \vee K$

Die Formalisierung (1′) beschränkt sich auf eine Disjunktion zweier Aussagen. Dabei bleibt unausgesprochen, ob eine inhaltliche Verknüpfung vorliegt. Bei (2′) ist die Beziehung von einer Art, die nicht mehr übergangen werden darf. Die Formalisierung (1′) ist zufriedenstellend, hingegen (2′) keineswegs. Die Prädikatenlogik erlaubt uns folgende Verfeinerung:

Prädikatenlogik: (1″) $Sa \vee Kb$
(2″) $Sa \vee Ka$

(1″) ist zwar gegenüber (1′) unnötig kompliziert, hingegen sagt (2″) eine Beziehung aus, die aus (2′) nicht zu entnehmen ist.

Die Individuen können auch durch Variable x, y, z ... ersetzt werden. Dann bekommen wir Aussageformen von der Art.

(3′)	$Sx \vee Kx$	x singt oder ißt Kuchen
(4′)	$Sx \vee Ky$	x singt oder y ißt Kuchen

In der Alltagssprache reden wir nicht von „x“, sondern von „jemand“. Deshalb dürfen (3′) und (4′) so übersetzt werden:

(3) jemand singt oder ißt Kuchen
(4) jemand singt oder jemand (anders) ißt Kuchen

Übung 4.1

Formalisieren Sie:

1. Der Ofen brennt.

2. Der Ofen brennt nicht.
3. Der Ofen brennt und Alfred friert nicht.
4. Der Ofen brennt und ich friere.
5. Wenn der Ofen brennt, dann frierst du nicht.
6. Francesco ist nicht Italiener, oder er ist musikalisch.
7. Nur wenn es Dohlenfüße sind, sind sie rot oder gelb.
8. Genau dann, wenn die Figur rechtwinklig und gleichseitig ist, ist sie quadratisch.

4.2 Quantoren

Wir sind jetzt in der Lage, Sätze mit konkreten Subjekten zu übersetzen. „Dieser Tisch ist rund" wird mit „Rt" wiedergegeben. Doch hat schon Aristoteles festgehalten, daß wir, um von allgemeinen Subjekten reden zu können, seien sie universal oder partikulär, Quantoren einzuführen haben. Es geht dabei um die aus dem aristotelischen Syllogismus bekannten All- und Existenzquantoren. Bisweilen heißen sie auch Operatoren.

Für das allgemeine universale Subjekt „Alle Dinge sind ..." führen wir die Abkürzung ein: ‚∀'. Dann wären wir geneigt, „alles ist rund" so zu übersetzen: ‚(∀) r'. Diese Übersetzung ist jedoch unzulässig, denn „rund" ist ein Prädikat und Prädikate können nur von Individuen ausgesagt werden. Ein Quantor ist durchaus kein Individuum. Aber von was wird denn „rund" ausgesagt? Von „allem". „Alles" ist eine Abkürzung für „alle Dinge". Mit der Behauptung „Alles ist rund" meinen wir „Alle Dinge sind rund". Die Dinge nennen wir ‚x'. „rund" ist also ein Prädikat, das von ‚x', in unserem Fall von allen ‚x' ausgesagt wird.

(Alle Dinge) sind rund
(∀x)Rx

Wir lesen die Formel so: „Für alle x, die Dinge sind, gilt: diese x sind rund." Der Quantor kann nie allein stehen. Wir haben immer (∀x), (∀y), (∀z) usw. In Worten: Für alle Dinge, die x sind, gilt .... für alle Dinge, die y sind, gilt ... usw. Entsprechend formalisieren wir:

$(\forall x)Gx$	alles ist gut
$(\forall x)Vx$	alles ist verloren
$(\forall x)Fx$	alles fließt

Je nachdem, ob die Negation vor oder hinter den Quantor gesetzt wird, verschiebt sich der Sinn.

(1) $\neg(\forall x)Bx$
Nicht alles ist brauchbar, d.h. einiges ist es nicht.

(2) $(\forall x)\neg Bx$
Alles ist nicht brauchbar, d.h. nichts ist brauchbar.

Der Formulierung (2) ist eine gewisse Mehrdeutigkeit nicht abzusprechen, da die Negation auf „alles" oder auf das Prädikat verweisen kann. Die Verbindung mit dem Prädikat ist zwar häufiger; dennoch gibt es kein radikales Verbot der Umgangssprache, die Negation auf den Quantor zu beziehen. Dann würde die Aussage so zu deuten sein: „Einiges ist doch brauchbar". Um diese Fehldeutung zu vermeiden, genügt es, die Formalisierung in aller Ausführlichkeit in die Umgangssprache zu übertragen. In Worten: „Für alle Dinge, die x sind gilt, sie sind nicht brauchbar". Das ist gleichbedeutend mit „Kein Ding ist brauchbar" oder „alles ist unbrauchbar".

Ein zweiter Quantor wird für das allgemeine partikuläre Subjekt eingeführt „einige Dinge sind ..." Als Abkürzung wählen wir ‚$\exists$'. Manchmal reden wir dabei etwas unbestimmt von „etwas". Analog zum Allquantor formalisieren wir:

(Etwas) ist rund
$(\exists x)Rx$

Die Formel wird so gelesen: „Es gibt ein x, das rund ist". Unter „etwas" oder „es gibt einige" verstehen wir „mindestens ein Ding"; es können auch mehrere sein, jedoch nicht alle.

$(\exists x)Gx$	etwas ist gut
$(\exists x)Vx$	etwas ist verloren usw.

Dieselbe Vorsicht wie beim Allquantor ist auch hier mit den Negationen geboten.

$\neg (\exists x)Fx$
Es gibt nicht etwas, das fließt = Nichts fließt.
$(\exists x)\neg Fx$
Es gibt etwas, das nicht fließt = Einiges fließt nicht.

Mit diesen beiden Quantoren können wir alle Quantitäten und Qualitäten der aristotelischen Syllogismen ausdrücken:

$(\forall x)\,Gx$	Alle Dinge sind gut	Alles ist gut
$(\exists x)\,Gx$	Einige Dinge sind gut	Einiges ist gut
$(\forall x)\neg\,Gx$	Kein Ding ist gut	Nichts ist gut
$(\exists)\neg\,Gx$	Einige Dinge sind nicht gut	Einiges ist nicht gut

Die gegenseitigen Beziehungen lassen sich, wie bei Aristoteles, im logischen Quadrat darstellen:

$(\forall x)Px$	konträr	$\neg (\exists x)Px$
	kontradiktorisch	
	kontradiktorisch	
$(\exists x)Px$	subkonträr	$\neg (\forall x)Px$

Es mag aufgefallen sein, daß sich jede Aussage auf zweifache Weise darstellen läßt, nämlich mit einem All- und mit einem Existenzquantor.

Alles ist gut	$(\forall x)Gx$	und	$\neg (\exists x)\neg\,Gx$
Etwas ist gut	$(\exists x)Gx$	und	$\neg (\forall x)\neg\,Gx$
Nichts ist gut	$(\forall x)\neg\,Gx$	und	$\neg (\exists x)Gx$
Einiges ist nicht gut	$(\exists x)\neg\,Gx$	und	$\neg (\forall x)Gx$

Diese Beziehungen mache man sich inhaltlich klar. Sie sollen nicht auswendig gelernt werden, doch müssen sie bei aufmerksamem Nachdenken korrekt formalisiert werden können.

Übung 4.2

Formalisieren Sie und bezeichnen Sie kontradiktorische und konträre Gegensätze:

1. Alles ist teuer
2. Nichts ist teuer
3. Nicht alles ist teuer
4. Etwas ist teuer

Formalisieren Sie und geben Sie an, welche Aussagen äquivalent sind:

5. Einiges ist nicht käuflich
6. Alles ist nicht käuflich
7. Es gibt nichts, das nicht käuflich ist
8. Alles ist käuflich
9. Nicht alles ist käuflich
10. Nichts ist käuflich

Im allgemeinen reden wir nicht von allen Dingen, sondern von einigen Millionären, von den meisten Unfällen oder von allen Stechmücken. Wir treffen eine Auswahl aus der Gesamtmenge aller Dinge. Wenn behauptet wird „Alle Smaragde sind grün", dann heißt das, daß aus der Grundmenge aller Dinge die Smaragde herausgeholt werden und ihre Farbe als grün bezeichnet wird. Es ist empfehlenswert für den Anfänger, diesen Sachverhalt in der Umgangssprache so vorzubereiten, daß die Formalisierung erleichtert wird. Also: Für alle Dinge gilt, wenn sie Smaragde sind, dann sind sie grün. Diese Formulierung sei an einigen Beispielen mit All- und Existenzquantor verdeutlicht.

Allquantor

Alle Smaragde sind grün

Für alle Dinge gilt, wenn sie Smaragde sind, dann sind sie grün

($\forall$x) (x sind Smaragde $\rightarrow$ x sind grün)

($\forall$x) (Sx $\rightarrow$ Gx)

Alle Kuchen sind frisch

Für alle Dinge gilt, wenn sie Kuchen sind, dann sind sie frisch

$(\forall x)$ (x sind Kuchen $\rightarrow$ x sind frisch)
$(\forall x)$ $(Kx \rightarrow Fx)$

Alles Wasser ist verschmutzt
Für alle Dinge gilt, wenn sie Wasser sind, dann sind sie verschmutzt
$(\forall x)$ (x ist Wasser $\rightarrow$ x ist verschmutzt)
$(\forall x)$ $(Wx \rightarrow Vx)$

Existenzquantor

Einige Smaragde sind grün
Für einige Dinge gilt, daß sie Smaragde sind und grün
$(\exists x)$ (x sind Smaragde $\wedge$ x sind grün)
$(\exists x)$ $(Sx \wedge Gx)$

Einige Kuchen sind frisch
Für einige Dinge gilt, daß sie Kuchen sind und frisch
$(\exists x)$ (x sind Kuchen $\wedge$ x sind frisch)
$(\exists x)$ $(Kx \wedge Fx)$

Einiges Wasser ist verschmutzt
Für einige Dinge gilt, daß sie Wasser sind und verschmutzt
$(\exists x)$ (x ist Wasser $\wedge$ x ist verschmutzt)
$(\exists x)$ $(Wx \wedge Vx)$

Man beachte, daß die Aussagen „Alle A sind B" und „Einige A sind B" neben einem deutlich ausgedrückten Quantorenunterschied noch einen Strukturunterschied verbergen. Er wird formal verdeutlicht, indem die Allaussage mit „$\rightarrow$", die Existenzaussagen mit „$\wedge$" formalisiert werden. Dieser Strukturunterschied kommt nur im ausführlicheren Sprachgebrauch zum Vorschein: „Für alle Dinge, wenn sie A sind, dann sind sie B", nicht aber bei „Alle A sind B".

Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich die kategorischen Aussagen von Aristoteles so wiedergeben:

1)	Alle Schwäne sind weiß	$(\forall x)$ $(Sx \rightarrow Wx)$
2)	Einige Schwäne sind weiß	$(\exists x)$ $(Sx \wedge Wx)$
3)	Kein Schwan ist weiß	$(\forall x)$ $(Sx \rightarrow \neg Wx)$
4)	Einige Schwäne sind nicht weiß	$(\exists x)$ $(Sx \wedge \neg Wx)$

Mit der Formulierung von 1) und 2) sind wir bereits vertraut. Bei

3) müssen wir uns den Inhalt einsichtig machen. Wörtlich sagt die Aussage: Für alle x gilt, wenn sie Schwäne sind, dann sind sie nicht weiß. Ähnlich bei 4): Für einige x gilt, daß sie Schwäne sind und nicht weiß.

Übung 4.2

Formalisieren Sie:

11. Alle Straßen sind krumm
12. Nicht alle Straßen sind krumm
13. Einige Straßen sind krumm
14. Viele Straßen sind nicht krumm
15. Keine Straße ist krumm
16. Einige Tomaten sind grün
17. Keine Münze ist gefälscht
18. Einige Erdbeeren sind nicht reif

Jede kategorische Aussage im Sinne von Aristoteles läßt sich auf zweifache Art ausdrücken, mit Existenz- oder Allquantor. Statt zu sagen „Alle Straßen sind Parkplätze" kann ich gleichwertig behaupten: „Es gibt keine Straße, die nicht ein Parkplatz ist". Gleichbedeutend mit „Einige Straßen sind nicht Parkplätze" ist „Nicht alle Straßen sind Parkplätze".

Die verfügbaren Formalisierungen seien zusammengestellt anhand der folgenden Aussagen:

Alle Straßen sind Parkplätze
Keine Straße ist ein Parkplatz
Einige Straßen sind Parkplätze
Einige Straßen sind nicht Parkplätze

klassisch	Mengenlehre
S a P	$sp' = 0$
S e P	$sp = 0$
S i P	$sp \neq 0$
S o P	$sp' \neq 0$

Prädikatenlogik

$(\forall x)\ (Sx \to Px) \leftrightarrow \neg\, (\exists x)\ (Sx \wedge \neg\, Px)$
$(\forall x)\ (Sx \to \neg\, Px) \leftrightarrow \neg\, (\exists x)\ (Sx \wedge Px)$
$(\exists x)\ (Sx \wedge Px) \leftrightarrow \neg\, (\forall x)\ (Sx \to \neg\, Px)$
$(\exists x)\ (Sx \wedge \neg\, Px) \leftrightarrow \neg\, (\forall x)\ (Sx \to Px)$

Wir müssen beide Schreibweisen der Prädikatenlogik kennen. Der Grund dürfte einleuchtend sein. Bei einer Deduktion müssen nämlich zuerst alle Negationen vor einem Quantor weggeschafft werden. Folglich muß man in der Lage sein, jede Formel der zweiten Gruppe in eine der ersten umzuwandeln. Das ist sehr einfach.

Die Negation vor dem Quantor wird hinter den Quantor gesetzt bei gleichzeitigem Quantorenaustausch. So wird $\neg\, (\forall x)$ zu $(\exists x) \neg$ und $\neg\, (\exists x)$ zu $(\forall x) \neg$. Diese Umformung nennen wir Quantorenaustausch (QA). Die Negation hinter dem Quantor wird nach den Regeln von De Morgan weiter verarbeitet.

Beispiele:

$\neg\, (\exists x)\ (Ax \wedge \neg\, Bx)$		$\neg\, (\forall x)\ (Ax \to \neg\, Bx)$	
$(\forall x) \neg\, (Ax \wedge \neg\, Bx)$	QA	$(\exists x) \neg\, (Ax \to \neg\, Bx)$	QA
$(\forall x)\ (\overline{Ax \wedge \overline{Bx}})$		$(\exists x)\ (\overline{Ax \to \overline{Bx}})$	
$(\forall x)\ (\neg\, Ax \vee Bx)$		$(\exists x)\ (\overline{\overline{Ax} \vee \overline{Bx}})$	
$(\forall x)\ (Ax \to Bx)$		$(\exists x)\ (Ax \wedge Bx)$	

In der Praxis führt das zu keinen nennenswerten Schwierigkeiten. Als Faustregel für die Negationen merke man sich: Die alte Form enthält zusammen mit der umgewandelten genau zwei Negationen.

Übung 4.2

19. Schreiben Sie die Beispiele 11–18 mit dem andern Quantor.
20. Zeichnen Sie alle Formeln an, die korrekt das Sprichwort ausdrücken: „Die Würfel sind gefallen"

a) W	e) Wg	i) $(\forall x)\ (Wx \to Gx)$
b) G	f) Gw	j) $(\forall x)\ (Gx \to Wx)$
c) $\neg G$	g) $(\forall x)\, Wx$	k) $(\exists x)\ (Wx \wedge Gx)$
d) $W \wedge G$	h) $(\exists x)\, Gx$	l) $(\exists x)\ (Gx \wedge Wx)$

21. (i) „Es gibt kein x, das Rabe ist.“ $\neg(\exists x)Rx$
(ii) „Es gibt ein x, das nicht Rabe ist.“ $(\exists x)\neg Rx$
Auch diese beiden Negationen fallen zusammen. Sie behaupten, daß es nicht gäbe, was es – als deiktisch Konstituiertes – doch gibt. Rehfus (W. D.), Didaktik der Philosophie. Grundlage und Praxis (Düsseldorf 1980) 132.

1. Zeigen Sie formal, wie die beiden Sätze zusammenfallen.
2. Was wird mit ihnen genau behauptet?

4.3 Übersetzungen aus der Umgangssprache

Die Alltagssprache hat die Eigenart, einige für die Logik bedeutsame Unklarheiten zu überdecken. Wir haben früher bereits solche Fälle getroffen, etwa „Kinder und Rentner bezahlen halbe Taxe“. Bevor die Formalisierung einsetzt, muß erfaßt werden, daß der Sprecher hier nicht ein „und“, sondern ein „oder“ meint. Wird diese vorlogische, semantische Analyse fehlerhaft ausgeführt, dann reicht selbst die raffinierteste Formalisierung nicht aus, den Fehler wieder auszugleichen, weil die Logik nur wahrheitskonservierend, nicht aber wahrheitsschöpfend ist.

4.3.1 Gattungsnamen

Unter dem Quantor „alle“ verstehen wir wirklich alle Individuen aus der vorgängig bezeichneten Grundmenge. Sind nicht alle gemeint, so ist der Existenzquantor zu benutzen. „Nicht alle“ umfaßt deshalb alles zwischen eins bis beinahe alle, also „einige“, „manche“, „viele“, „die meisten“ usw. Genau wie bei den Prämissen eines aristotelischen Syllogismus Klarheit über die Modi bestehen muß, so muß eindeutig entscheidbar sein, welchen Quantor wir für die Formalisierung zu wählen haben. Vorsicht ist bei den Allaussagen am Platz, die nicht ohne weiteres als solche zu erkennen sind.

Beispiele:

(1) Die Eidechse ist ein Schuppenkriechtier
(2) Die Eidechse ist grün

Die Aussage (1) faßt „Eidechse“ als Gattungsnamen auf und ist deshalb so zu übersetzen: „Für jedes x gilt, wenn x eine Eidechse ist, dann ist es ein Schuppenkriechtier“. Formal:

(1′) $(\forall x)\ (Ex \rightarrow Sx)$

Dagegen scheint sich offensichtlich die Aussage (2) auf eine bestimmte Redesituation zu beziehen. Es ist wohl kaum die falsche Behauptung beabsichtig „Alle Eidechsen sind grün“. Vielmehr scheint von einem Einzelindividuum die Rede zu sein. Daher:

(2′) $(\exists x)\ (Ex \wedge Gx)$

Wenn es sich nur um ein einziges, bestimmtes Exemplar von Eidechsen handelt, dann dürfen wir ihm den konkreten Namen „a“ geben. Dadurch entfällt der Quantor:

(2″) $Ea \wedge Ga$

4.3.2 Personen

„Alles“ deutet auf eine Aussage über alle Dinge, hingegen „alle“ ist eine Einschränkung und meint Menschen oder Personen. Deshalb werden wir, falls es vom Kontext her erforderlich ist, bei „alle“ jeweils „Menschen“ oder „Personen“ ergänzen. Ebenso für „niemand“, „nicht eine Person“, bzw. „keine Person“.

Beispiel:

Alle sind zurück
$(\forall x)\ (Px \rightarrow Zx)$

‚Px‘ bedeutet: die x, die Personen sind. Die Formel $(\forall x)\, Zx$ besagt eher „alles ist zurück“, womit das Ausgeliehene oder sonst etwas gemeint ist.

4.3.3 Erweiterung durch mehrere Prädikate

Die aristotelische Logik schreibt einem Individuum nur eine einzige Eigenschaft zu. Eine Ausnahme bilden jene Fälle, wo zwei Eigenschaften durch eine Konjunktion verbunden sind. Dann lassen sich aber zwei Aussagen daraus herstellen. Sind die beiden Aussagen jedoch durch eine Disjunktion verknüpft, durch Implikation oder Äquivalenz, dann sind sie in der aristotelischen Logik nicht mehr zulässig. Diese Einschränkung ist unnatürlich. Da sich unsere Alltagssprache nicht daran hält, wird sie von der Prädikatenlogik nicht übernommen. Deshalb müssen wir uns auch mit der Formalisierung folgender Aussagen vertraut machen:

Einige Wälder sind Sauerstoff- und Ruhespender
$(\exists x)$ [x sind Wälder $\wedge$ (x sind Sauerstoff- $\wedge$ x sind Ruhespender)]
$(\exists x)\ [Wx \wedge (Sx \wedge Rx)]$

Alle Elefanten sind indischer oder afrikanischer Herkunft
$(\forall x)$ [x sind Elefanten $\rightarrow$ (x sind indisch $\vee$ x sind afrikanisch)]
$(\forall x)\ [Ex \rightarrow (Ix \vee Ax)]$

Einige Häuser sind sonnig, gut isoliert und teuer, oder billig und mehrstöckig
$(\exists x)$ [x sind Häuser $\wedge$ (x sind sonnig $\wedge$ x sind gut isoliert $\wedge$ x sind teuer) $\vee$ (x sind billig $\wedge$ x sind mehrstöckig)]
$(\exists x)\ [Hx \wedge (Sx \wedge Ix \wedge Tx) \vee (Bx \wedge Mx)]$

Jeder Bewerber, der Brillenträger oder farbenblind ist, braucht einen Sonderausweis
$(\forall x)$ (wenn x Bewerber ist $\rightarrow$ (x ist Brillenträger $\vee$ x ist farbenblind) $\rightarrow$ benötigt x einen Sonderausweis)
$(\forall x)\ ((Bx \rightarrow (Cx \vee Fx)) \rightarrow Sx)$

Übung 4.3.3

1) 1. Die Kuh ist schwarz.
2. Die Kuh ist ein Säugetier.
3. Die Tulpe ist eine Blume.
4. Die Tulpe ist gelb.
5. Alles fehlt.
6. Nichts ist unvergänglich.

2) 1. Jeder ist willkommen.
2. Keiner fehlt.

3. Einige sind Verräter.
4. Alle sind zufrieden.
5. Die meisten sind da.
6. Wenige sind Ehrenbürger.

3)
1. Die meisten Italiener sind ehrlich.
2. Schwarze Tulpen gibt es nicht.
3. Alle politischen Einwände sind nicht demagogisch.
4. Viele Verkehrssünder werden nicht bestraft.
5. Die meisten Übungen sind unterhaltsam, aber schwer.
6. Alle Personenwagen sind betriebsbereit.
7. Alle kontrollierten Personenwagen sind betriebsbereit.
8. Nur die kontrollierten Personenwagen sind betriebsbereit.
9. Betriebsbereite Personenwagen müssen kontrolliert sein.
10. Alle jungen sportlichen Schweizer sind militärdienstpflichtig.
11. Der Turner ist frisch, fromm, froh, frei.
12. Äpfel und Birnen sind nahrhaft.
13. Es gibt keine Raben, die nicht schwarz sind.
14. Nicht alle, die reden, haben etwas zu sagen.
15. Einige Medikamente sind nur gefährlich, wenn sie in Überdosis eingenommen werden.
16. Alles, was glänzt, ist nicht Gold.

4) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit beiden Quantoren:
1. Einige Vögel können rückwärts fliegen.
2. Nur die Fische haben Kiemen.
3. Alle Papageien und Kolibri sind bunte Vögel.
4. Manches, was laut und modern ist, ist kein Theaterstück.
5. Kein Auto, das über 10 Jahre alt ist, wird repariert, wenn es ernsthaft beschädigt ist.
6. Es gibt keine elektrische Ladung, die nicht ein ganzzahliges Vielfaches elektrischer Elementarquanten wäre.

5) Formalisieren Sie und geben Sie an, welche Sätze äquivalent sind:

1. Einige Nachbarn sind hilfsbereit und beliebt.
2. Alle Nachbarn sind hilfsbereit und beliebt.
3. Einige hilfsbereite Nachbarn sind beliebt.
4. Nur hilfsbereite Nachbarn sind beliebt.
5. Alle hilfsbereiten Nachbarn und nur sie sind beliebt.
6. Kein Nachbar ist beliebt, wenn er nicht hilfsbereit ist.
7. Einige nichtbeliebte Nachbarn sind nicht hilfsbereit.
8. Kein hilfsbereiter Nachbar ist unbeliebt.
9. Jeder Nachbar ist beliebt, sofern er hilfsbereit ist.
10. Einige Nachbarn sind nur beliebt, wenn sie hilfsbereit sind.

Wer die Beispiele 1) bis 5) korrekt gelöst hat, darf die Aufgabe 6) übergehen.

6) Formalisieren Sie:

1. Nicht jede Geburtstagsparty ist ein Erfolg.
2. Der Hund ist ein Fleischfresser.
3. Alle Raben und Dohlen sind Vögel.
4. Alle Raben und Dohlen sind schwarze Vögel.
5. Die Vögel, die nicht schwarz sind, sind weder Raben noch Dohlen.
6. Der Hund ist braun.
7. Früchte und Gemüse sind vitaminreich.
8. Nicht jeder berühmte Schauspieler ist talentiert.
9. Kein Marsmensch ist Europäer.
10. Nur Polizisten und Feuerwehrleute sind beide unentbehrlich und einsatzbereit.
11. Nur die ETH-Architekten sind diplomierte Architekten.
12. Nicht alle Zeitungen sind lesenswert, aber jene, die es sind, liegen in der Bibliothek auf.
13. Der Bürger, der den Stimmzettel nicht einlegt, vernachlässigt seine Pflicht.
14. Keiner darf die Geleise überschreiten, ausgenommen Bahnangestellte und Ordnungshüter.

4.4 Quantorenregeln und Deduktion

Für die Deduktion in der Prädikatenlogik gilt folgendes:
- In den Prämissen müssen die Quantoren aufgelöst werden.
- Die verbleibenden Formeln werden mit den Regeln der Aussagenlogik bearbeitet.
- Bei der Konklusion müssen die Quantoren wieder eingesetzt werden.

Es gelten folglich bei der Deduktion in der Prädikatenlogik die gleichen Regeln wie im Aussagenkalkül. Neu hinzu kommen nur die Quantorenregeln. Da wir zwei Quantoren aufzulösen und zwei einzuführen haben, werden vier neue Regeln benötigt.

4.4.1 Die ∀-Elimination (Universelle Einsetzung, Universelle Spezialisierung) ist eine Regel, die uns sagt: wenn alle x P sind, dann ist auch ein konkretes Individuum ‚a' ein P.

$$\frac{(\forall x)\, Px}{Pa} - \forall$$

Diese Regel ist in der Tradition unter dem Namen „Dictum de omni et nullo" bekannt.

4.4.2 Die ∀-Einführung (Universelle Verallgemeinerung, Universelle Generalisierung) ist das umgekehrte Verfahren. Wenn wir von einem individuellen Kreis sagen, sein Umfang sei Durchmesser mal Pi, so dient dabei der Kreis als Repräsentant für alle Kreise. Deshalb darf die behauptete Eigenschaft auf alle Kreise ausgedehnt werden.

$$\frac{Pa}{(\forall x)\, Px} + \forall$$

4.4.3 Die ∃-Elimination (Existenzielle Einsetzung, Existenzielle Spezialisierung) ist trivial. Der Existenzquantor behauptet, daß es wenigstens ein Individuum gibt, das bei der Einsetzung zu einer wahren Aussage führt. Die ∃-Elimination gibt diesem Individuum einen Namen.

$$\frac{(\exists x)\,Px}{Pa} - \exists$$

4.4.4 Die ∃-Einführung (Existenzielle Verallgemeinerung, Existenzielle Generalisierung) ist ebenfalls trivial. Denn wenn es wenigstens eine einzige Einsetzungsinstanz gibt, so können wir auch verallgemeinernd darüber sprechen. Verallgemeinern heißt natürlich nicht die Behauptung aufstellen, es gebe mehrere.

$$\frac{Pa}{(\exists x)\,Px} + \exists$$

Einsatz der Quantorenregeln:

– Die ∀-Elimination ist immer durchführbar.

– Die ∀-Einführung darf nur vorgenommen werden, wenn die Deduktion aus einer oder mehreren Allaussagen gewonnen wurde. Das in 4.4.2 erwähnte Beispiel ist ein Sonderfall; es ist eine versteckte Allaussage.

– Die ∃-Elimination kennt eine Einschränkung. Werden innerhalb einer Deduktion mehrere ∃-Eliminationen ausgeführt, so ist für jede neue Prämisse eine andere Einsetzungskonstante zu wählen. Der Grund liegt darin, weil von einem Ding beispielsweise ausgesagt werden kann, es sei eine Kugel; sollte von einem Ding behauptet werden, es sei blau, dann dürfen wir nicht dem Trugschluß verfallen, es sei von einer blauen Kugel die Rede. Möglicherweise wird von einer rostigen Kugel und einer blauen Wappenscheibe gesprochen, also von zwei gänzlich verschiedenen Individuen.
– Die ∃-Einführung ist immer durchführbar.

– Negationen vor einem Quantor müssen immer entfernt werden, bevor eine ∀- oder ∃-Elimination ausgeführt wird.

Diese Regeln sollen an einigen Beispielen erprobt werden.

1) Alle Bäume sind Pflanzen
Alle Fichten sind Bäume
Also sind alle Fichten Pflanzen

1.	$(\forall x)\ (Bx \rightarrow Px)$	
2.	$(\forall x)\ (Fx \rightarrow Bx)$	$\underline{/\therefore\ (\forall x)\ (Fx \rightarrow Px)}$
3.	$Ba \rightarrow Pa$	1, $-\forall$
4.	$Fa \rightarrow Ba$	2, $-\forall$
5.	$Fa \rightarrow Pa$	3, 4, HS
6.	$(\forall x)\ (Fx \rightarrow Px)$	5, $+\forall$

In 3. und 4. wird die ∀-Elimination aus den beiden Prämissen durchgeführt. 5. ist ein Schluß mit aussagenlogischen Mitteln. Bei 6. ist die ∀-Einführung erlaubt, weil 5. aus 3. und 4. erschlossen wurde, die beide aus Allprämissen hervorgegangen sind.

2) Alle Wallonen sind Patrioten
Einige Belgier sind Wallonen
Also sind einige Belgier Patrioten

1.	$(\forall x)\ (Wx \rightarrow Px)$	
2.	$(\exists x)\ (Bx \wedge Wx)$	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Bx \wedge Px)}$
3.	$Wa \rightarrow Pa$	1, $-\forall$
4.	$Ba \wedge Wa$	2, $-\exists$
5.	Ba	4a, Simpl.
6.	Wa	4b, Simpl.
7.	Pa	6, 3, MP
8.	$Ba \wedge Pa$	5, 7, Konj.
9.	$(\exists x)\ (Bx \wedge Px)$	8, $+\exists$

Bei 9. wäre eine ∀-Einführung unerlaubt, weil der 4. Schritt aus einer ∃-Elimination gewonnen wurde.

3) Alle Menschen sind sterblich
Platon ist ein Mensch
Also ist Platon sterblich

1.	$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Sx)$	
2.	Mp	$\underline{/\therefore\ Sp}$
3.	$Mp \rightarrow Sp$	1, $-\forall$
4.	Sp	2, 3, MP

Die 1. Prämisse gilt für alle menschlichen Individuen, also für Albert, Brigitte, Cäsar, Platon usw. Deshalb dürfen wir bei 3. nach ausgeführter ∀-Elimination jeden beliebigen Individuennamen

einsetzen, unter ihnen auch ‚p'. Daraus ergibt sich dann: Platon ist sterblich.

4) Aus den Prämissen von 3) kann auch geschlossen werden: Also ist jemand sterblich, $(\exists x)\, Sx$ oder $(\exists x)\ (Mx \wedge Sx)$. Das ist die existenzielle Verallgemeinerung des Schlusses „Platon ist sterblich". Da die 2. Prämisse nur von einem einzigen Individuum spricht, darf in der Konklusion keine $\forall$-Einführung stattfinden. Freilich wäre sie zufällig beim vorliegenden Beispiel nicht falsch; es wäre nur die triviale Wiederholung der 1. Prämisse.

5) Kein Hund ist ein Elefant
Keine Mücke ist ein Hund
Also ist keine Mücke ein Elefant

1. $\neg\ (\exists x)\ (Hx \wedge Ex)$
2. $\neg\ (\exists x)\ (Mx \wedge Hx)$ $\quad \underline{/\ \ \neg\ (\exists x)\ (Mx \wedge Ex)}$

Wir wissen zwar, daß dieser Syllogismus falsch ist, denn schon Aristoteles stellte das Verbot auf, aus zwei negativen Prämissen zu schließen. Wir wollen sehen, wie sich das in der Deduktion bemerkbar macht.
Zuerst müssen die Prämissen umschrieben werden, um die Negationen vor den Quantoren wegzuschaffen.

3. $(\forall x)\ (Hx \rightarrow \neg\, Ex)$
4. $(\forall x)\ (Mx \rightarrow \neg\, Hx)$ $\quad \underline{/\ (\forall x)\ (Mx \rightarrow \neg\, Ex)}$
5. $\quad Ha \rightarrow \neg\, Ea \quad$ 3, $-\forall$
6. $\quad Ma \rightarrow \neg\, Ha \quad$ 4, $-\forall$

Weiter kommen wir nicht, denn aus 5. und 6. läßt sich nichts schließen.

6) Einige Schwäne sind weiß
Einige Tiere sind weiß
Also sind einige Tiere Schwäne

1. $(\exists x)\ (Sx \wedge Wx)$
2. $(\exists x)\ (Tx \wedge Wx)$ $\quad \underline{/\ (\exists x)\ (Tx \wedge Sx)}$
3. $\quad Sa \wedge Wa \quad$ 1, $-\exists$
4. $\quad Ta \wedge Wa \quad$ 2, $-\exists$ (falsch!)

Hier wurde die Regel der $\exists$-Elimination verletzt. Da bereits in 3.

eine ∃-Elimination ausgeführt wurde, darf beim zweiten Vorkommen nicht mehr die Konstante ‚a' verwendet werden. Die korrekte Ausführung ab 4. wäre so:

4.	$Tb \wedge Wb$	3, $-\exists$
5.	Sa	3a, Simpl.
6.	Tb	4a, Simpl.
7.	$Tb \wedge Sa$	6, 5, Konj.

Solange nicht feststeht, daß $a = b$ ist, dürfen wir keine ∃-Einführung vornehmen. Was uns die korrekte Anwendung der Regel lehrt, ist kaum überraschend: Die traditionelle Logik wußte auch hier, aus zwei individuellen Prämissen darf nicht geschlossen werden.

Die moderne Logik erlaubt, die aristotelischen Syllogismen als formal gültig darzustellen, allerdings einmal mehr mit der Einschränkung, daß die abgeschwächten Syllogismen nicht zugelassen werden. Woran liegt es, daß ein *Barbari* der 1. Figur ungültig sein soll?

Alle Italiener sind Europäer
Alle Napolitaner sind Italiener
Also sind einige Napolitaner Europäer

1.	$(\forall x)\ (Ix \rightarrow Ex)$	
2.	$(\forall x)\ (Nx \rightarrow Ix)$	$\underline{/\ (\exists x)\ (Nx \wedge Ex)}$
3.	$Ia \rightarrow Ea$	1, $-\forall$
4.	$Na \rightarrow Ia$	2, $-\forall$
5.	$Na \rightarrow Ea$	3, 4, Hs

Weiter gelangen wir nicht. Der Grund für das Versagen liegt in der Tatsache, daß $\dfrac{(\forall x)\,Px}{(\exists x)\,Px}$ nicht gültig ist. Das läßt sich an einem Beispiel verdeutlichen.

1. Alle grünen Schwäne sind im Basler-Zoo
2. Also gibt es grüne Schwäne im Basler-Zoo

$(\forall x)\ ((Sx \wedge Gx) \rightarrow Bx)$
$(\exists x)\ ((Sx \wedge Gx) \wedge Bx)$

Der 1. Satz ist zudem wahr. Wer nicht dieser Ansicht ist, mag den

Gegenbeweis antreten, indem er die grünen Schwäne zeigt, die nicht im Basler-Zoo sind. Da niemand auf diesen ausgefallenen Vorschlag eingehen wird, lohnt es sich nochmals zur bekannten und kurzen Begründung der modernen Logiker zurückzukehren. Sie lautet: Eine Allaussage kann die leere Menge enthalten. Das ist in unserem Beispiel tatsächlich der Fall, denn es gibt keine grünen Schwäne. Und das ist der einzige Grund für die Ablehnung der abgeschwächten Syllogismen, also durchaus nicht irgendeine versteckte Abneigung gegen Aristoteles.

Ferner ist zu beachten, daß innerhalb einer konditionalen Annahme keine universelle Verallgemeinerung auszuführen ist.

Beispiel:

→ 1. Pa
  2. $(\forall x)Px$ unerlaubt

  3. $Pa \rightarrow (\forall x)Px$
  4. $(\forall y)\ (Py \rightarrow (\forall x)Px)$

Übung 4.4.4

Deduzieren Sie:

1) Alle Lügner sind unglaubwürdig
Einige Lügner sind Zeitungsleute
Also sind einige Zeitungsleute unglaubwürdig

2) Alle Flüchtlinge sind arm
Einige Arme sind bemitleidenswert
Also sind einige Flüchtlinge bemitleidenswert

3) Kein Käufer wird betrogen
Einige Käufer sind Händler
Also werden einige Händler nicht betrogen

4) Alle Sportler sind gesund
Alfred ist ein Lehrling und Sportler
Also sind einige Lehrlinge gesund

5) Alle Studenten essen Reis oder Fisch
Alle Reisesser sind Japaner

Nicht alle Studenten sind Japaner
Also gibt es einige Studenten, die Fisch essen

6) Nur autoritäre Staaten sind Bürokratien
Autoritäre Staaten sind Diktaturen
Also sind einige Bürokratien Diktaturen

7) Alle Paddler sind ehrgeizig oder faul
Kein Ehrgeiziger ist glücklich
Einige Paddler sind glücklich
Also sind einige Paddler faul

8) Keine Ente tanzt Walzer
Kein Offizier ist dem Walzer abgeneigt
Alle Bewohner meines Hühnerstalles sind Enten
Also ist kein Bewohner meines Hühnerstalles ein Offizier
(Lewis Carroll)

9) Alle Zerstreuten und Alkoholiker sind verkehrsgefährdend
Frau Dupont ist nicht verkehrsgefährdend, obwohl sie Sonntagsfahrerin ist.
Also ist Frau Dupont nicht Alkoholikerin

10) Alle Sterne sind Planeten oder Fixsterne
Einige Sterne gehören zum Sonnensystem
Die Sterne sind genau dann Fixsterne, wenn sie nicht zum Sonnensystem gehören
Einige Sterne gehören nicht zum Sonnensystem
Also sind einige Sterne Fixsterne

Geben Sie bei den beiden folgenden Aufgaben die genauen Schritte an

11)
1. $(\forall x)\,(Ax \rightarrow \neg Bx)$
2. $\neg(\exists x)\,(Cx \wedge \neg Dx)$
3. $(\exists x)\,(Ax \wedge \neg Dx)$ $\quad$ $\underline{/ \therefore\ (\exists x)\neg(Cx \vee Bx)}$
4. $(\forall x)\,(Cx \rightarrow Dx)$
5. $\quad Ca \rightarrow Da$
6. $\quad Aa \rightarrow \neg Ba$
7. $\quad Aa \wedge \neg Da$
8. $\quad Aa$
9. $\neg Ba$

10. $\neg Da$
11. $\neg Ca$
12. $\neg Ca \wedge \neg Ba$
13. $\neg (Ca \vee Ba)$
14. $(\exists x) \neg (Cx \vee Bx)$

12)
1. $(\forall x)\ [(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx]$
2. $\neg (\exists x)\ [(Cx \vee Ex) \wedge \neg Fx]$ $\underline{/ \therefore\ (\forall x)\ (Ax \rightarrow Fx)}$
3. $(\forall x)\ [(Cx \vee Ex) \rightarrow Fx]$
4. $(Aa \vee Ba) \rightarrow Ca$
5. $\neg (Aa \vee Ba) \vee Ca$
6. $(\neg Aa \wedge \neg Ba) \vee Ca$
7. $Ca \vee (\neg Aa \wedge \neg Ba)$
8. $(Ca \vee \neg Aa) \wedge (Ca \vee \neg Ba)$
9. $Ca \vee \neg Aa$
10. $\neg Aa \vee Ca$
11. $(\neg Aa \vee Ca) \vee Ea$
12. $\neg Aa \vee (Ca \vee Ea)$
13. $Aa \rightarrow (Ca \vee Ea)$
14. $(Ca \vee Ea) \rightarrow Fa$
15. $Aa \rightarrow Fa$
16. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow Fx)$

Deduzieren Sie:

13)
1. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$
2. $\neg (\forall x)\, Qx$ $\underline{/\ (\exists x) \neg Px}$

14)
1. $\neg (\exists x)\ (Px \rightarrow Mx)$
2. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow Mx)$ $\underline{/\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg Px)}$

15)
1. $\neg (\exists x)\ (Ax \wedge \neg Bx)$
2. $\neg (\exists x)\ (Cx \wedge Bx)$ $\underline{/ \neg (\exists x)\ (Ax \wedge Cx)}$

16)
1. $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge (\exists x)\ (Fx \wedge Hx)$
2. $(\forall x)\ ((Fx \wedge Jx) \rightarrow \neg Hx)$
3. $(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$ $\underline{/\ (\exists x)\ (Fx \wedge \neg Jx)}$

17)
1. $(\forall x)\ [(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (Hx \rightarrow \neg Fx)]$
2. $(\forall x)\ (Hx \rightarrow Jx)$
3. $(\forall x)\ (Jx \rightarrow Fx)$
4. $(\exists x)\ (Gx \wedge Jx)$ $\underline{/\ (\exists x) \neg Hx}$

18) 1. $(\forall x)\ [(Ax \wedge (Ux \vee Ix)) \rightarrow \neg (Hx \vee Cx)]$
2. $(\exists x)\ [Ax \wedge (Ix \wedge Bx)]$
3. $(\forall x)\ [(Ax \wedge Wx) \rightarrow (\neg Hx \rightarrow Dx)]$
4. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow Wx)$
5. $(\exists x)\ (Wx \wedge Dx)$ $\quad\underline{/\ (\exists x)\ (Ax \wedge Dx)}$

19) Der Mensch lebt nicht vom Brot allein.
Der Arme lebt vom Brot allein.
Also ist der Arme kein Mensch.

20) Einige Photographen sind geschickt, aber nicht einfallsreich.
Nur Künstler sind Photographen.
Einige Photographen sind nicht geschickt.
Jeder Handwerker ist geschickt.
Also ist nicht jeder Künstler ein Handwerker.

21) Alle Musiker und Handwerker sind geachtet.
Radiotechniker und Automechaniker sind Handwerker.
Nur Persönlichkeiten mit Fachkenntnissen sind geachtet.
Also sind die Radiotechniker Persönlichkeiten mit Fachkenntnissen.

22) Alle Mitglieder, die den Beitrag nicht bezahlt haben, sind anwesend.
Alle Auswärtigen sind Mitglieder.
Einige Auswärtige sind nicht anwesend.
Also gibt es einige Mitglieder, die den Beitrag bezahlt haben.

23) 1. In diesem Haus sind außer Katzen keine Tiere.
2. Tiere, die gern den Mond anschauen, eignen sich als Schoßtiere.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, so gehe ich ihm aus dem Weg.
4. Es gibt kein fleischfressendes Tier, das nachts nicht heult.
5. Jede Katze fängt Mäuse.
6. Nur die Tiere in diesem Haus mögen mich gut leiden.
7. Känguruhs eignen sich nicht als Schoßtiere.

8. Nur Fleischfresser fangen Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht leiden mögen.
10. Tiere, die nachts heulen, schauen gern den Mond an.
Also gehe ich Känguruhs aus dem Weg. (Lewis Carroll)

Vokabular:
Tx: x ist ein Tier in diesem Haus.
Kx: ist ein Katze.
Ax: ist ein Tier, das gern den Mond anschaut.
Sx: x ist ein Tier, das sich als Schoßtier eignet.
Vx: x ist ein Tier, das ich verabscheue.
Wx: x ist ein Tier, dem ich aus dem Weg gehe.
Fx: x ist ein Fleischfresser.
Nx: x ist ein Tier, das nachts heult.
Mx: x ist ein Tier, das Mäuse fängt.
Gx: x ist ein Tier, das mich leiden mag.
Px: x ist ein Känguruh

24) Alle unschädlichen Spione reden
Nicht alle Spione werden nicht ausgetauscht
Alle Spione, die nicht reden, sind unschädlich, wenn sie ausgetauscht sind.
Also gibt es einige Spione, die reden.

25) 1. $(\forall x)\ [\neg Px \rightarrow \neg (Qx \vee Rx)]$
2. $\neg (\exists x) \neg [(Px \wedge Tx) \rightarrow Sx]$
3. $(\forall x)\ (Px \leftrightarrow Tx)$
4. $(\forall x)\, Qx$ $\quad\quad / \underline{\ (\forall x)\, Sx\ }$

26) 1. $(\forall x)\ [Ax \rightarrow \neg (Bx \wedge \neg Cx)]$
2. $\neg (\forall x)\ (Ax \rightarrow Dx)$
3. $(\forall x)\ [(Cx \rightarrow Ex) \wedge Bx]$ $\quad\quad / \underline{\ (\exists x)\, Ex\ }$

27) 1. $(\forall x)\ [Wx \rightarrow (Xx \rightarrow Yx)]$
2. $(\exists x)\ [Xx \wedge (Zx \wedge \neg Ax)]$
3. $(\forall x)\ [(Wx \rightarrow Yx) \rightarrow (Bx \rightarrow Ax)]$
$/ \underline{\ (\exists x)\ (Zx \wedge \neg Bx)\ }$

28)
1. $(\forall x)\ [(Lx \vee Mx) \rightarrow [(Nx \wedge Ox) \vee Px] \rightarrow Qx]$
2. $(\exists x)\ (Mx \wedge \neg Lx)$
3. $(\forall x)\ [((Ox \rightarrow Qx) \wedge \neg Rx) \rightarrow Mx]$
4. $(\exists x)\ (Lx \wedge \neg Mx)$

$$\underline{/\ (\exists x)\ (Nx \rightarrow \rightarrow Rx)}$$

29)
1. Alle Einbrecher, die nicht Linkshänder sind, werden überprüft.
2. Alle überprüften Gäste sind Linkshänder oder es gibt keinen, der überprüft wird und nicht Linkshänder und nicht Gast ist.
3. Rudolf wird überprüft, obwohl er kein Gast und kein Linkshänder ist. Also sind alle einbrechenden Gäste Linkshänder.

30)
1. Alle Urner oder Luzerner sind Innerschweizer und Steuerzahler.
2. Alle Innerschweizer oder Engländer, falls sie Frauen oder über 20 Jahre alt sind, sind stimmberechtigt.
   Also sind alle Urner, falls sie Frauen sind, stimmberechtigt.

31) „Und es gibt folgewidrige Schlüsse aus wahren Prämissen. Beispiel:
1. Wer mordet, übertritt das Gesetz.
2. Schopenhauer hat nie gemordet.
3. Also hat er nie das Gesetz übertreten. Daher genügt es auch nie, zur Widerlegung einer Ansicht die Folgewidrigkeit ihrer Ableitung aufzuweisen: Jene Ansicht kann dennoch zutreffen, weil Inkonsequenz mit Wahrheit vereinbar ist.“ (E. Schneider, Logik für Juristen. Die Grundlagen der Denklehre und der Rechtsanwendung. (München ^{2}1972) 111–112)

1) Prüfen Sie die Gültigkeit des Schlusses nach.
2) Was braucht es zur Widerlegung einer Ansicht?
3) Wie ist der Satz zu verstehen „Inkonsequenz ist mit Wahrheit vereinbar“?
4) Woran ist der Verfasser gescheitert?

32) „Der folgende Schluß gleicht dem Modus Barbara.

Wenn jemand eine Sache kauft, wird er zur Zahlung des Kaufpreises verpflichtet.
A hat eine Sache gekauft.
Also ist A zur Zahlung des Kaufpreises verpflichtet worden.

Die Bedingung ‚wenn jemand eine Sache kauft' kann als Mittelbegriff behandelt werden. Die Zahlungsverpflichtung wäre dann Prädikat und A Subjekt. Alle drei Urteile des Syllogismus sind allgemein bejahend.“ (E. Schneider, Logik für Juristen [siehe Beispiel 31)] 149)

1. Was heißt, der Schluß „gleicht“ einem Modus *Barbara* und was versteht der Autor darunter?
2. Zeigen Sie, was unser Autor an diesem *Barbara* für Subjekt, Prädikat und Kopula hält.
3. Bilden Sie den Syllogismus mit dem vom Autor vorgeschlagenen Mittelterm und zeigen Sie, daß es kein *Barbara* ist.

4.5 Die Verwendung mehrerer Quantoren

Bisher wurde in allen Beispielen von einem Individuum jeweils eine oder mehrere Eigenschaften ausgesagt. Nicht selten könnte es wünschenswert sein, die gleiche Eigenschaft mehreren Individuen zuzuschreiben, etwa „Einige Katzen und Vögel sind Haustiere“. Daher wollen wir uns mit den Grundzügen vertraut machen, die bei der Formalisierung mehrerer Individuen zu beachten sind.

4.5.1 Der Bereich der Quantoren

Aussagen von der Art „Wenn alle Wolkenkratzer versichert sind, dann sind einige Häuser versichert“ beruhen auf der Voraussetzung, Wolkenkratzer seien Häuser. Das läßt sich so formalisieren:

$$(\forall x)\ (Wx \rightarrow Vx) \rightarrow (\exists x)\ (Hx \wedge Vx)$$

Diese Formalisierung ist zwar korrekt. Da es sich jedoch um eine Satzverknüpfung mit verschiedenen Subjekten handelt, ist es vorteilhaft, unterschiedliche Quantoren zu wählen. Verständlicher wäre demnach:

$$(\forall x)\ (Wx \rightarrow Vx) \rightarrow (\exists y)\ (Hy \wedge Vy)$$

Weitere Beispiele:

Wenn alle Straßen vereist sind, dann sind die Autobahnen vereist.

$$(\forall x)\ (Sx \rightarrow Vx) \rightarrow (\forall y)\ (Ay \rightarrow Vy)$$

Wenn alle Bewohner abwesend sind, dann brechen die Diebe ein

$$(\forall x)\ (Bx \rightarrow Ax) \rightarrow (\exists y)\ (Dy \wedge Ey)$$

Einige Blätter sind grün, andere gelb

$$(\exists x)\ (Bx \wedge Gx) \wedge (\exists y)\ (By \wedge Hy)$$

Wenn nicht alle Seile reißfest sind, dann sind einige Fasern nicht aus Nylon

$$\neg\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow Rx) \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge \neg\ Ny)$$

Übung 4.5.1

1) Wenn alle Lehrer musikalisch sind, dann sind es auch die Kindergärtnerinnen.

2) Wenn ein Tanker versinkt, dann ist (ein Teil der) Natur zerstört.

3) Wenn einige Vierbeiner langohrig sind, dann sind einige Langohrige Vierbeiner.

4) Wenn kein Zug verspätet ist, dann verspäten sich nicht alle Reisenden.

Bei der Formalisierung ist genau auf den Bereich der Quantoren zu achten. Quantoren haben die Aufgabe, Variable zu binden. Da müssen wir zunächst zeigen, was unter gebundenen und freien Variablen zu verstehen ist.

In den Aussagen ‚$(\forall x)\,Px$', ‚$(\exists x)\,Px$', ‚$(\forall y)\,Py$' ‚$(\exists z)\,Pz$', ‚$(\forall z)\,Pz$' usw. sind die Variablen durch den jeweiligen Quantor gebunden. Hingegen nennen wir in ‚$(\forall x)\,Pa$', $(\exists z)\,Px$', $(\forall z)\,Af$' usw. die Variablen ‚a', ‚x', ‚f' frei.

Der Wirkungsbereich eines Quantors ist beschränkt. Ein Quantor bindet nur den unmittelbar auf ihn folgenden Ausdruck bis zum nächsten logischen Zeichen.

(1) $(\exists x)\, Ax \wedge Bx \wedge Cx$

In (1) ist nur das ‚x' bei ‚A' gebunden, die beiden übrigen sind frei. Deshalb sollte die Formel weniger irreführend so geschrieben werden:

(2) $(\exists x)\, Ax \wedge Ba \wedge Ca$

Sollte jedoch mit (1) beabsichtigt sein, alle Konjunktionsglieder zu binden, dann sind Klammern erforderlich und zwar so:

(3) $(\exists x)\ (Ax \wedge Bx \wedge Cx)$

Es ist ein beachtlicher Unterschied, ob es sich um gebundene oder freie Variable handelt. (2) und (3) ließen sich etwa so interpretieren:

(2) Es gibt etwas Anziehendes und Anita ist beliebt und charmant.

(3) Es gibt etwas Anziehendes, das belgisch und charmant ist (z.B. die Stadt Brügge)

Ähnlich auch

(4)	$(\forall x)\ (Ax \rightarrow Bx)$	Alles Anziehende ist bezaubernd
(5)	$(\forall x)\, Ax \rightarrow Bx$	Wenn etwas anziehend ist, dann ist Xaver ein Blumenhändler

Gebundene Variable müssen eindeutig im Wirkungsbereich eines Quantors stehen. Bei mehreren Quantoren kann das einen Quantorenaustausch bedingen, der leicht übersehen wird.

Beispiel:

(6) Wenn etwas gestohlen wurde, dann sind die Hausbewohner entsetzt.

$$(\exists x)\, Gx \rightarrow (\forall y)\ (Hy \rightarrow Ey)$$

Der Existenzquantor bezieht sich ausschließlich auf den Vordersatz der Implikation. Die Formalisierung ist korrekt. Ein ähnlicher Fall könnte jedoch so aussehen:

(7) Wenn etwas gestohlen wurde, dann wird es ersetzt.

$(\exists x) Gx \rightarrow Ex$

Wir wissen bereits, daß der Existenzquantor nur das ‚x' von ‚G' bindet, nicht aber das zweite ‚x'. Eine solche Bindung ist jedoch beabsichtigt, denn das Pronomen *es* der zweiten Aussage ist rückbezüglich auf das Prädikat *gestohlen* in der ersten Aussage. Nach bewährtem Vorgehen könnten wir versucht sein, Klammern zu setzen. Damit hat sich jedoch unversehens eine Bedeutungsänderung eingeschlichen. Um den Sachverhalt von (7) korrekt wiederzugeben, müssen wir schreiben:

(8) $(\forall x)\ (Gx \rightarrow Ex)$

d.h. alles Gestohlene wird ersetzt.

Sobald die Sätze komplexer sind, müssen weitere Vorsichtsmaßnahmen beachtet werden. Dazu die folgenden Beispiele:

(9) Wenn jemand eingeladen ist, dann, wenn niemand mit dem Auto fahrbereit ist, verspätet sich jemand

Vokabular:

Px: x ist eine Person	Ex: x ist eingeladen
Py: y ist eine Person	Fx: x ist fahrbereit
Pz: z ist eine Person	Vx: x verspätet sich

Wir erhalten:

(9) $(\exists x)\ (Px \wedge Ex) \rightarrow [(\forall y)\ (Py \rightarrow \neg Fy) \rightarrow (\exists z)\ (Pz \wedge Vz)]$

Dazu drei allgemeine Bemerkungen:

Erstens sind die eckigen Klammern wie bisher bedeutungsmäßig identisch mit den runden. Wahrnehmungspsychologisch läßt sich bei der Diskussion um Klammerverschiebungen leichter verfolgen, wohin sie versetzt werden.

Zweitens dürfen beim Beispiel (9) die mit eckigen Klammern besetzten Stellen nicht klammerlos sein; es läge sonst eine mehrdeutige Aussagenverknüpfung vor, analog dem Beispiel ‚$p \rightarrow q \rightarrow r$', das einen unterschiedlichen Wahrheitswert annimmt, je nachdem, ob die zwei ersten oder die beiden letzten Variablen enger zusammengefaßt werden.

Drittens ist es bei komplexen Ausdrücken oft von Vorteil, den Bereich der Rede auf die wesentlich auftretenden Individuen einzuschränken. Was wesentlich ist, kann erst bestimmt werden beim Überblick über die ganze Aufgabe. So erkennen wir, daß bei (9) überall von Personen gesprochen wird, so daß wir vereinfachend schreiben dürfen:

(9') $(\exists x)\, Ex \rightarrow ((\forall y) \neg Fy \rightarrow (\exists z)\, Vz)$

Die Einschränkung des Redebereiches richtet sich nach der Problemstellung. Bedingung ist einzig, die einmal getroffene Einschränkung im betreffenden Kontext durchzuhalten.

Sollte (9) so zu verstehen sein, daß sich unter der genannten Bedingung der Eingeladene verspätet, dann müßte die Formalisierung anders lauten, allerdings nicht so:

(10) $(\exists x)\, Ex \rightarrow [(\forall y)\ (\neg Fy \rightarrow Vx)]$ (falsch)

Das letzte Vorkommen der Variablen ‚x' ist außerhalb des Bereiches des ersten Quantors, ‚x' ist also nicht gebunden. Der Fehler darf jedoch nicht so korrigiert werden:

(11) $(\exists x)\ [(Ex \rightarrow (\forall y)\ (\neg Fy \rightarrow Vx)]$ (falsch)

Denn hier wiederholt sich die gleiche Sinnverschiebung, der wir bei (8) begegnet sind. Die korrekte Formalisierung von (10) lautet so

$$(\forall x)\ [Ex \rightarrow (\forall y)\ (\neg Fy \rightarrow Vx)]$$

Man kann sich allgemein merken: Bezieht sich „einige" oder „etwas" im Vordersatz einer Implikation auf eine Stelle im Nachsatz, so ist er sozusagen ausnahmslos mit einem Allquantor zu formalisieren.

Übung 4.5.1

5) Obwohl etwas verschoben ist, finden sich die Besucher zurecht.

6) Wenn etwas musikalisch ist, dann ist es hörenswert.

7) Wenn jemand ein Fahrzeuglenker ist, und ein Kind wird angefahren, dann ist er versichert.

8) Wenn ein Musiker zum Konzert nicht erscheint, dann ist das Publikum enttäuscht, und er bezahlt eine Konventionalstrafe.

9) Wenn alle regieren und keiner gehorcht, dann sind alle (Regierenden) geprellt.

10)
1. Alle Tulpen sind Blumen.
2. Wenn einige Blumen nicht rot sind, dann ist nichts Katalogisiertes eine Blume.
3. Alle katalogisierten Pflanzen sind Tulpen.
4. Also ist jede nicht rote Tulpe, wenn sie eine Pflanze ist, nicht katalogisiert.

11)
1. Alle Urkunden sind unterschrieben.
2. Alle rechtsgültigen Dokumente sind Urkunden.
3. Wenn einige Dokumente unterschrieben sind, dann ist alles Unterschriebene verbindlich.
4. Also, wenn einige Urkunden nicht verbindlich sind, dann ist alles unterschrieben oder es ist nicht der Fall, daß die Dokumente rechtsgültig sind.

4.5.2 Quantoren und ihre Distribution

Einige erforderliche Einschränkungen lassen sich inhaltlich verdeutlichen. Wenn es weiße Schwäne gibt, dann gibt es etwas Weißes und es gibt auch Schwäne. Das läßt sich so ausdrücken:

$$(\exists x)\ (Wx \wedge Sx) \rightarrow (\exists x)\, Wx \wedge (\exists x)\, Sx$$

Wenn es aber etwas Weißes gibt und auch Schwäne, darf man daraus schließen, daß es weiße Schwäne gibt? Diese Umkehrung kann gewiß nicht allgemeingültig sein; es genügt, statt „weiß“ und „Schwan“ die harmlose Ersetzung „viereckig“ und „Kreis“ vorzunehmen, und der Widerspruch wird deutlich erkennbar. Diesem Fehler wird in der Deduktion vorgebeugt durch die Vorschrift, bei einer ∃-Einsetzung dürfe nicht zweimal dieselbe Konstante verwendet werden. Die wichtigsten Vorschriften der Quantorendistribution sind in den folgenden Formeln zusammengefaßt:

1. $(\exists x)\ (Px \wedge Qx) \rightarrow (\exists x)Px \wedge (\exists x)Qx$
2. $(\exists x)\ (Px \vee Qx) \leftrightarrow (\exists x)Px \vee (\exists x)Qx$
3. $(\forall x)\ (Px \wedge Qx) \leftrightarrow (\forall x)Px \wedge (\forall x)Qx$
4. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x)Px \rightarrow (\forall x)Qx$
5. $[(\exists x)Px \rightarrow (\exists x)Qx] \rightarrow (\exists x)\ (Px \rightarrow Qx)$
6. $(\forall x)Px \vee (\forall x)Qx \rightarrow (\forall x)\ (Px \vee Qx)$

Man beachte, daß nur die Formeln 2. und 3. Äquivalenzen sind, alle übrigen sind Implikationen.

Die Distributionsgesetze gelten auch für zusammengesetzte Ausdrücke. Dazu zwei Beispiele:

(1) Jeder Koffer hat eine Ausdehnung und ein Gewicht
$(\forall x)\ [Kx \rightarrow (Ax \wedge Gx)]$

Die Struktur dieser Aussage ist dieselbe wie bei 3., genauer: ‚$p \rightarrow (q \wedge r)$'. Sie läßt sich umformen über die Implikation ‚$\neg p \vee (q \wedge r)$' und Distribution ‚$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$' zu ‚$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$'. Deshalb gilt auch

(1) $(\forall x)\ [Kx \rightarrow (Ax \wedge Gx)] \leftrightarrow$
$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Ax) \wedge (\forall x)\ (Kx \rightarrow Gx)$

In gleicher Weise wird die Distribution wie bei 2. eingesetzt für das folgende Beispiel:

(2) Es gibt rote oder duftende Blumen
$(\exists x)\ [Bx \wedge (Rx \vee Dx)] \leftrightarrow$
$(\exists x)\ (Bx \wedge Rx) \vee (\exists x)\ (Bx \wedge Dx)$

4.5.3 Pränexe Normalform

Wir gehen zunächst von folgender Definition aus: Bei der Formel

$(\forall x)\ [Px \rightarrow Qx]$

nennen wir den Quantor – oder gegebenenfalls die Quantoren – Präfix, den anschließenden Klammerausdruck Matrix, also

(Präfix) [Matrix]

Bevor in einer Formel mit mehreren Quantoren Quantoreneliminationen vorgenommen werden, ist es zweckmäßig, die Quantoren als Präfix zu schreiben, also pränexe Normalformen herzustellen. Eine pränexe Normalform liegt vor, wenn

- die Quantoren als Präfix aufgeführt sind,
- kein Quantor verneint ist,
- der Wirkungsbereich der Quantoren auf die ganze Matrix ausgedehnt ist.

Die folgenden Formeln sind nicht in pränexer Normalform:

1. $(\forall x)Px \rightarrow Qa$
2. $(\forall x)Px \rightarrow (\exists y)Qy$
3. $(\forall x)\neg(\forall y)(Px \rightarrow Qy)$
4. $(\forall x)(Px \rightarrow (\forall y)Qy)$

Bei 1. ist der Wirkungsbereich des Quantors nicht auf ‚Qa' ausgedehnt, bei 2. nicht auf den y-Quantor, bei 3. ist ein Quantor negiert und bei 4. ist die Matrix nicht quantorenfrei.

Bei der Bildung der pränexen Normalform (PN) werden zuerst negierte Quantoren ausgetauscht. Aus ‚$\neg(\forall x)$ …' ergibt sich ‚$(\exists x)\neg$ …' und aus ‚$\neg(\exists x)$ …' entsprechend ‚$(\forall x)\neg$ …' Nach diesen Schritten dürfen die durch Konjunktion oder Disjunktion verbundenen Quantoren als Präfix vorangestellt werden.

Beispiele:

1)	1.	$(\exists x)Px \wedge \neg(\exists x)Qy$	
	2.	$(\exists x)Px \wedge (\forall y)\neg Qy$	1. QA
	3.	$(\exists x)(\forall y)(Px \wedge \neg Qy)$	2, PN
2)	1.	$(\forall x)Px \vee \neg(\exists y)Qy \vee \neg(\forall z)\neg Rz$	
	2.	$(\forall x)Px \vee (\forall y)\neg Qy \vee (\exists z)\neg\neg Rz$	1, QA
	3.	$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(Px \vee \neg Qy \vee Rz)$	2, PN

Negierte Formeln sind zuerst mit Hilfe von De M. aufzulösen.

Beispiele:

3)	1.	$\neg(p \vee (\forall x)Px)$	
	2.	$\neg p \wedge \neg(\forall x)Px$	1, De M.
	3.	$\neg p \wedge (\exists x)\neg Px$	2, QA
	4.	$(\exists x)(\neg p \wedge \neg Px)$	3, PN

4) 1. $\neg(\exists x)(Px \wedge (\exists y)Qy) \vee \neg(\forall z)Rz$
2. $(\forall x)\neg(Px \wedge (\exists y)Qy) \vee (\exists z)\neg Rz$ 1, QA
3. $(\forall x)(\neg Px \vee \neg(\exists y)Qy) \vee (\exists z)\neg Rz$ 2, De M.
4. $(\forall x)(\neg Px \vee (\forall y)\neg Qy) \vee (\exists z)\neg Rz$ 3, QA
5. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg Px \vee \neg Qy \vee \neg Rz)$ 4, PN

Übung 4.5.3

Stellen Sie pränexe Normalformen her:

1) $(\forall x)((Px \rightarrow Qx) \vee (\exists y)(Ry \wedge Sy))$
2) $(\exists x)((Px \wedge Qx) \wedge (\exists y)(Py \vee (\forall z)(Fz \rightarrow Gz))$
3) $\neg((p \vee q) \wedge (\forall x)Px)$ $\underline{/\ (\exists x)(Px \rightarrow \neg(p \vee q))}$
4) $\neg(\forall x)\neg(\exists y)(\neg(p \wedge (\exists z)Az)$
$\underline{/\ (\exists x)(\exists y)(\forall z)(Az \rightarrow \neg p)}$

Dagegen ist bei der Implikation der Vordersatz mit Vorsicht umzuformen. Die Implikationsregel verhilft uns zu einer Disjunktion, wobei die folgenden zwei Fälle der Negation zu unterscheiden sind:

1) 1. $(\forall x)(Px \rightarrow (\exists y)Qy)$
2. $(\forall x)(\neg Px \vee (\exists y)Qy)$
3. $(\forall x)(\exists y)(Px \rightarrow Qy)$

2) 1. $(\forall x)Px \rightarrow (\exists y)Qy$
2. $\neg(\forall x)Px \vee (\exists y)Qy$
3. $(\exists x)\neg Px \vee (\exists y)Qy$
4. $(\exists x)(\exists y)(Px \rightarrow Qy)$

Quantoren lassen sich bei Konjunktionen, Disjunktionen sowie beim Nachsatz einer Implikation direkt herausholen. Hingegen beim Vordersatz einer Implikation führt die pränexe Normalform zu einem Quantorenaustausch:

$$(\forall x)Px \rightarrow p \leftrightarrow (\exists x)(Px \rightarrow p)$$
$$(\exists x)Px \rightarrow p \leftrightarrow (\forall x)(Px \rightarrow p)$$

Die Kenntnis der pränexen Normalform ist deshalb unerläßlich, weil eine $\forall$- oder $\exists$-Ersetzung nur über ganze Formeln ausgeführt werden darf.

Übung 4.5.3

5) $(\forall x)\, Ax \rightarrow p$

6) $(\exists x)\, Ax \leftrightarrow p$

7) $\neg\, [(\forall x)\, Px \rightarrow (\forall y)\, Qy]$

8) $(\exists x)\, Ax \rightarrow [(\forall y)\, By \rightarrow (\exists z)\, Cz]$

$\underline{/\ (\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [Ax \rightarrow (By \rightarrow Cz)]}$

5. Die Relationen

Im Jahre 1936 hat Church bewiesen, daß der zweistellige Prädikatenkalkül kein allgemeines Entscheidungsverfahren kennt. Unter einem Entscheidungsverfahren verstehen wir ein eindeutiges Vorgehen, das aufgrund einer endlichen Anzahl von Schritten die Allgemeingültigkeit feststellen läßt. Ein solches Entscheidungsverfahren ist für den Aussagenkalkül mit der Matrizenmethode oder der Distribution gegeben. Wir werden noch eine Sonderform semantischer Tafeln einführen, die ein Entscheidungsverfahren für den einstelligen Prädikatenkalkül liefert. Bei den Relationen ist der Nachweis für die Nicht-Allgemeingültigkeit nicht zu erbringen, und deshalb ist es berechtigt, von den Relationen gesondert zu reden. Abgesehen von diesem wichtigen theoretischen Gesichtspunkt ist die Relationslogik eine natürliche Ausweitung des Prädikatenkalküls.

Wir haben öfters angedeutet, daß nicht alle zusammengesetzten Ausdrücke als Verknüpfung von Aussagefunktionen darstellbar sind. Erinnern wir uns an die Art der Beispiele wie

(1) Othmar und Josef sind Musiker
(2) Othmar und Josef sind Brüder

Die Aussage (1) läßt sich als Konjunktion zweier Aussagen deuten und kann in dieser Form vom Aussagenkalkül behandelt werden. Hingegen läßt die Aussage (2) eine solche Interpretation nicht zu. Überdies scheint es nicht ganz einfach, anzugeben, worin sich (2) von (1) abhebt, da die beiden Sätze scheinbar gleich gebaut sind. Aber diesen Unterschied müssen wir herausstellen.

5.1 Ontologische Voraussetzungen

In einer durch Konjunktion verbundenen Aussagenverknüpfung wird zwei Subjekten dasselbe Prädikat zugesprochen. Seit der Renaissance bis in die neueste Zeit hinein war die Verallgemeinerung verbreitet, ein Urteil lasse sich nur in Subjekt-Prädikatform ausdrücken. Man konnte sich für diese Auffassung neben der vermeintlich klaren Einsicht auf bedeutende Philosophen stützen, selbst auf Kant, der vom Urteil sagt, es sei jener Verstandesakt, worin zwei Begriffe miteinander verbunden werden. Gemäß dieser Auffassung besteht also ein Urteilsakt grundsätzlich darin, daß einem Subjekt ein Prädikat zu- oder abgesprochen wird. Um die Allgemeingültigkeit dieses Schemas zu demonstrieren, sind jene Aussagen, die sich nicht einordnen lassen wollten, gewaltsam umgeformt worden. Aus „Sokrates läuft" und „es regnet" wurden „Sokrates ist laufend" und „Regen ist daseiend" (Vgl. J. Gredt, Die aristotelisch-thomistische Philosophie, Bd. 1, Logik und Naturphilosophie (Freiburg 1935) 39). Das ist die Folge einer bestimmten philosophischen Anschauung, nämlich der aristotelischen Metaphysik.

Alle Probleme lassen sich metaphysisch analysieren. Wenn wir es jedoch für den Aussagen- und Prädikatenkalkül unterlassen haben auf die metaphysische Grundlage einzugehen, so scheint auch jetzt kein Grund vorzuliegen, anders zu handeln. Wir kommen zunächst ohne metaphysische Analyse weiter. Was uns zu diesem Weg ermutigt, das ist der Mißerfolg von Aristoteles. Bei all seiner Einsicht gelang ihm eine logische Analyse der Relationen nicht, so daß er schließlich glaubte, für die Relationen eine andere metaphysische Basis postulieren zu müssen als für die Syllogismen. Das hat zu höchst verworrenen und seltsamen Auffassungen geführt. Inzwischen geben traditionelle Kreise wenigstens für die Theologie zu, die Erfahrung sprenge die antike Aufteilung der Wirklichkeit in die Substanz als das Eigentliche und die Akzidentien als das bloß Zufällige (Vgl. J. Ratzinger, Einführung in das Christentum (München 1968) 143).

Nach Aristoteles besteht die ganze Wirklichkeit aus Substanzen mit ihren Akzidentien. Innerhalb der Sprache werden die Substanzen durch Subjekte ausgedrückt, die Akzidentien durch Prädikate. „Der Tisch ist weiß" besteht aus dem Subjekt Tisch; das Subjekt ist eine Substanz, von der das Prädikat „weiß" ausgesagt wird. Das Prädikat ist ein Akzidens des Tisches, das ebenso gut rot oder blau sein könnte, ohne den Tisch wesentlich zu verändern. Von einer Substanz werden also Akzidentien ausgesagt. Bei der Frage, ob die Relation eine Substanz oder ein Akzidens sei, entschließt sich Aristoteles, wenn auch mit schwerem Herzen, für das Akzidens. Freilich unterläßt er es nicht, die besondere Art hervorzuheben. Die Relation nimmt eine Sonderstellung ein, ihr Sein ist besonders schwach. Was dieses „schwache Sein" jedoch heißen soll, das ist bei weitem nicht klar. Aber nachdem die mittelalterliche Theologie auf dieser Grundlage die Relationen im Zusammenhang mit dem Trinitätsdogma weiter verfolgte, da begann sich allmählich der Eindruck zu verfestigen, es handle sich um ein theologisches Spezialproblem. Historisch gesehen sind die Relationen erst von Leibniz etwas ausführlicher untersucht worden. Unglücklicherweise sind seine Arbeiten fast bis in unser Jahrhundert weitgehend unbeachtet geblieben, so daß man De Morgan als den eigentlichen Begründer der Relationslogik anzusehen hat. Ein weiterer Förderer war Peirce und vor allem Schröder (1841–1902), der den dritten Band (1895) ausschließlich den Relationen widmet. Demgegenüber hält Maritain noch 1946 die Relationen für das Ergebnis einer Konfusion in der Analyse zwischen logischem und wirklichem Subjekt, worauf namentlich Leibniz und Russell hereingefallen seien.

5.2 Die heutige Auffassung der Relationen

Wir stehen wieder vor ähnlichen Grenzen, wie sie uns beim Übergang vom Aussagenkalkül zum Prädikatenkalkül bewußt wurden. Es gibt Aussagen, deren Struktur sich innerhalb eines bestimmten Systems nicht hinreichend klar ausdrücken lassen. Dazu drei Beispiele:

(1) Heidi spielt Klavier und Josef singt
(2) Heidi spielt Klavier und singt
(3) Köln liegt zwischen Basel und Hamburg

Das Beispiel (1) ist im Aussagenkalkül problemlos formulierbar; ‚$H \wedge J$'. Die Art des Beispiels (2) gab Anlaß, den Prädikatenkalkül einzuführen ‚$Kh \wedge Sh$'. Beispiel (3) stellt eine einfache Relation dar. Wir könnten versuchen, das Beispiel nach dem Rat der traditionellen Philosophie so umzuformen: „Köln ist zwischen Basel und Hamburg liegend". Offensichtlich wäre „zwischen" ein Funktor, der sich nicht auf einen der bisher besprochenen Funktoren zurückführen ließe. Wir hätten also:

(3′) (Köln ist) zwischen (Basel und Hamburg liegend)
(3′) K zwischen B

Bei der ausgefallenen Formulierung von (3′) wollen wir uns nicht aufhalten. Das Ungewohnte ist kein ausreichendes Kriterium, um etwas abzulehnen. Hingegen ist „Basel und Hamburg" als einzelnes Prädikat aufgefaßt zu undifferenziert. Zudem drückt nach traditioneller Auffassung das Prädikat eine mögliche Eigenschaft des Attributes aus. Hier wirkt es indessen reichlich befremdend, „Basel und Hamburg" als Eigenschaft von Köln anzusehen. Aus dieser Sackgasse vermochte sich die traditionelle Analyse nicht zu befreien.

Gehen wir von den zwei Beispielen aus:

(4) Franz und Othmar sind musikalisch
(5) Franz und Othmar sind verwandt

Die wesentlich neue Einsicht besteht darin, daß in (4) zwar den beiden Individuen die gleiche Eigenschaft zugesprochen wird; bei (5) ist aber nicht von einer Eigenschaft die Rede, sondern von einem Verhältnis, in dem die beiden Individuen zueinander stehen. Das dürfte in uns die Vermutung aufkommen lassen, daß es beim Urteilen nicht immer darum geht, den Subjekten Prädikate zu- oder abzusprechen; nicht selten steht die Frage im Vordergrund, in welcher Beziehung Dinge zueinander stehen. Diese Sicht ist es, die die Beispiele (4) und (5) voneinander unterscheidet. Die systematische Untersuchung solcher Beziehungen macht den Inhalt der Relationslogik aus. Wir halten also fest, daß Relationen nicht Eigenschaften von Individuen aussagen, sondern die Beziehungen unter den Individuen angeben.

Im Alltag wie in der Wissenschaft sind solche Beziehungen mindestens so bedeutsam, wie das Zu- oder Absprechen von Eigenschaften. Ein Gegenstand kann über, unter, neben einem andern liegen; ein Mensch kann in freundschaftlichen, verwandtschaftlichen, beruflichen Beziehungen zu einem andern stehen; ein Gegenstand kann einer Person gehören, eine Person kann Verfügungsrechte über gewisse Gegenstände haben usw. usw. Keine Wissenschaft kommt ohne solche Beziehungen aus, erst recht nicht Philosophie oder Theologie. Das wurde bis vor hundert Jahren übersehen, was den Entdecker der Relationslogik zum überraschenden Urteil über die Vergangenheit veranlaßte: Die traditionelle Logik – d. h. das, was man in Frankreich oder Deutschland seit der Mitte des 16. Jahrhunderts für Logik hält –, so stellt De Morgan verblüffend fest, reicht nicht aus, den elementaren, einsichtigen Sachverhalt zu beweisen: „Wenn alle Pferde Tiere sind, dann sind auch alle Pferdeköpfe Tierköpfe". Tatsächlich läßt sich dieser harmlose Schluß nicht auf die einstellige Prädikatenlogik zurückführen. Deshalb sind derartige Beispiele in den gängigen Schulbüchern kurzerhand verschwiegen worden.

Die Überlegenheit der heutigen Relationsauffassung ist dreifach:

- Wir umgehen Sprachverdrehungen. „Basel und Hamburg" ist kein Prädikat, auch nicht ein komplexes.
- Die logische Untersuchung der Relationen ist durchführbar unter den gleichen metaphysischen Voraussetzungen, die für die Aussagen- und Prädikatenlogik gemacht wurden.
- Beispiele von der Art „Tier-Tierkopf" lassen sich zufriedenstellend analysieren.

5.3 Die Symbolisierung der Relationen

Zweifellos stellt schon die einfache Prädikataussage eine Relation dar, also die Beziehung zwischen einem Ding und einer Eigenschaft. Doch wir behalten uns den Namen „Relation" für eine Beziehung vor, die mindestens zwischen zwei Dingen besteht.

5.3.1 Symbolisierung von Konstanten

Zur Symbolisierung verwenden wir eine Schreibweise, die auf der Prädikatenlogik aufgebaut ist. Im Schriftbild unterscheiden sich

Relationen bestenfalls durch die Besetzung mehrerer Individuenstellen. Während ‚Px' ein Prädikatausdruck ist für Sätze wie:

Der Tisch ist blau
Die Rübe ist roh
Die Drossel ist flügge

so bezeichnen wir mit ‚Rxy' eine Beziehung zwischen ‚x' und ‚y'. Beispiele

Trm	Ramseier trinkt Milch
Lbc	Bernhard liebt Claudia
Fhv	Hans fährt einen Volvo

Wir sprechen hier von zweistelligen oder dyadischen Relationen. Selbstverständlich gibt es auch drei- und mehrstellige Relationen wie:

Sokn	Othmar schickt Käthy einen Nelkenstrauß.
Eabsd	Albert erpreßt Bernhard wegen Steuerhinterziehung zum dritten Mal.

Übung 5.3.1

Formalisieren Sie:

1. Albert telephoniert Sylvia.
2. Paulus schrieb den Römerbrief.
3. Lausanne ist nicht größer als Paris.
4. Rita besuchte mich.
5. Einstein verwirrte die Zeitgenossen durch die Relativitätstheorie.
6. Japan eroberte den Markt mit den Kleinwagen.
7. Franz führte Ruth nicht in den Club ein.
8. Köln liegt zwischen Basel und Hamburg.
9. Arnold war wütend über Bernhard wegen Claudia.
10. Wenn der Vater dem kleinen Mathias ein Stück Fleisch gibt, so gibt es Mathias dem Hund weiter.

5.3.2 Symbolisierung mit einem Quantor

Es ändert sich prinzipiell nichts, ob wir es mit tri- (drei-), tetradischen (vierstelligen-) oder noch höherstelligen Relationen zu tun haben. Die Argumente werden der Reihe nach aufgeführt. Dabei können eine oder mehrere Individuenstellen durch Quantoren gebunden sein. Beispiele mit nur einem Quantor:

1. Alle Kapitäne sehen den Mond	$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Sxm)$
2. Einige Amerikaner besuchen das Rütli	$(\exists x)\ (Ax \wedge Bxr)$
3. Wenige Touristen kennen das Matterhorn nicht	$(\exists x)\ (Tx \wedge \neg Kxm)$

Übung 5.3.2

Formalisieren Sie:

1. Alle Jazzfans lieben Armstrong.
2. Franz kennt jemanden, den er bewundert.
3. Franz kennt jemanden, der ihn bewundert.
4. Kein Gesundheitsfanatiker trinkt Coca Cola.
5. Jeder, der größer ist als Alice, ist nicht kleiner als Beatrice.

5.3.3 Symbolisierung mehrerer Quantoren

Die Übertragung aus der Umgangssprache hat bei den Relationen noch eine besondere Tücke. Statt zu sagen „a sieht b" kann der gleiche Sachverhalt auch mit „b wird von a gesehen" ausgedrückt werden. Da die Passivform die Struktur nicht verändert, müssen beide Sachverhalte gleich formalisiert werden. Allerdings ist mit der Passivform bisweilen der Nebeneffekt verbunden, daß gewisse Individuenstellen unerwähnt bleiben. Sie gelten jeweils als „selbstverständlich", wie etwa im Beispiel: „a wurde gesehen", was ungekürzt so lauten müßte: „a wurde von jemandem gesehen". Die Aktivform zeigt deutlicher an, ob es sich um eine zwei-, drei- oder noch mehrstelligere Relation handelt. Manchmal ist es unumgänglich, die versteckten Relationsargumente sichtbar zu machen. Auf jeden Fall kann jede Formalisierung einer Relation zweifach in die Alltagssprache übersetzt werden, aktiv oder passiv.

$(\forall x)Emx$	Die Maschine erschüttert alles Alles wird von der Maschine erschüttert
$(\exists x)Emx$	Die Maschine erschüttert etwas. Etwas wird von der Maschine erschüttert.
$(\forall x)Exm$	Alles erschüttert die Maschine Die Maschine wird von allem erschüttert
$(\exists x)Exm$	Etwas erschüttert die Maschine Die Maschine wird von etwas erschüttert

Die zweite Individuenstelle kann ebenfalls quantifiziert werden:

1. $(\forall x)\ (\forall y)Exy$	Alles erschüttert alles.
2. $(\forall y)\ (\forall x)Exy$	Alles wird von allem erschüttert.
3. $(\exists x)\ (\exists y)Exy$	Etwas erschüttert etwas.
4. $(\exists y)\ (\exists x)Exy$	Etwas wird von etwas erschüttert.
5. $\neg\ (\forall x)\ (\forall y)Exy$	Nicht alles erschüttert alles.
6. $\neg\ (\forall y)\ (\forall x)Exy$	Nicht alles wird von allem erschüttert.

Bis hierher dürfen die Quantoren beliebig umgestellt werden. Doch gilt dies nicht mehr für die beiden folgenden Fälle:

7. $(\forall x)\ (\exists y)Exy$	Alles erschüttert einiges
8. $(\exists y)\ (\forall x)Exy$	Einiges wird von allem erschüttert

Die beiden Formeln 7. und 8. zeigen eine große Ähnlichkeit. Indessen bringen die vertauschten Quantoren eine völlig verschiedene Bedeutung mit sich. Das läßt sich intuitiv erfassen am Beispiel der Relation Liebe.

Die Formel 7. besagt dann, daß alle Menschen irgend einen Menschen lieben, also etwa: Jeder Mensch liebt seine Mutter.

Formel 8. dagegen besagt, daß es einen Menschen gibt, der von allen Menschen geliebt wird, etwa der heilige Franziskus.

Trotz des beachtlichen Unterschieds sind die beiden Formeln nicht unabhängig voneinander; die eine läßt sich aus der andern folgern, jedoch nicht umgekehrt. Genauer: Aus 8. folgt 7., aber aus 7. folgt nicht 8. Das sei kurz aufgezeigt.

1.	$(\exists x)\ (\forall y)\,Rxy$	$/\therefore\ \underline{(\forall y)\ (\exists x)\,Rxy}$
2.	$(\forall y)\,Ray$	$-\exists$
3.	Rab	$-\forall$
4.	$(\exists x)\,Rxb$	$+\exists$
5.	$(\forall y)\ (\exists x)\,Rxy$	$+\forall$

Die umgekehrte Ableitung ist nicht gültig. Wir wollen sehen weshalb:

1.	$(\forall x)\ (\exists y)\,Rxy$	$/\ \underline{(\exists y)\ (\forall x)\,Rxy}$
2.	$(\exists y)\,Ray$	$-\forall$
3.	Rab	$-\exists$
4.	$(\forall x)\,Rxb$	unerlaubt

Bei 3. haben wir ‚b' aus einer $\exists$-Elimination abgeleitet. Dann dürfen wir nicht anschließend die Relationskonstante ‚a' durch einen Allquantor binden. Im Schritt 4. fallen wir zwar nicht in den Fehler, einen durch existenzielle Einsetzung erhaltenen Ausdruck – nämlich ‚b' – zu verallgemeinern. Aber solange ‚b' nicht gebunden ist, darf auch ‚a' nicht universell verallgemeinert werden. Da also ‚b' von einem Existenzquantor abgeleitet wurde, kann es nur wieder durch einen Existenzquantor gebunden werden, so daß wir als einzigen Ausweg wieder auf Schritt 2 zurückfallen. Es gilt deshalb:

$$(\exists x)\ (\forall y)\,Rxy \rightarrow (\forall y)\ (\exists x)\,Rxy$$

Was hier formal abgehandelt wurde, läßt sich intuitiv verständlich machen. Solange bei Relationen eine Argumentstelle als Konstante vorhanden ist, sind Argumentvertauschungen harmlos. Beispiel:

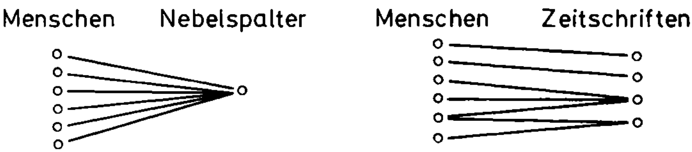
Alle lesen den Nebelspalter
Also wird der Nebelspalter von allen gelesen
$(\forall x)\,Lxn \rightarrow (\forall x)\,Lnx$ korrekt

Der Schluß ist richtig. Gefährlich wird die Lage, wie unzählige, falsch gelöste philosophische Beispiele zeigen, sobald das zweite Relationsargument mit einem Quantor versehen ist. Analog zum Nebelspalterbeispiel:

Alle lesen etwas (eine bestimmte Zeitschrift)
Also wird etwas (eine bestimmte Zeitschrift) von allen gelesen

$(\forall x)\ (\exists y)\, Lxy \rightarrow (\exists y)\ (\forall x)\, Lxy$ (falsch)

Der Unterschied läßt sich so skizzieren:



Aus der Tatsache, daß jeder eine Zeitung liest, folgt nicht, daß ein und dieselbe Zeitung von allen gelesen wird.

Beispiele zur Formalisierung

1. Alle Nachtwächter kennen einige Sternbilder
   $(\forall x)$ [x sind Nachtwächter → es gibt einige Sternbilder, und die x kennen sie]
   $(\forall x)$ [Nx → es gibt einige y, die Sternbilder sind, und die x kennen y]
   $(\forall x)\ [Nx \rightarrow (\exists y)\ (Sy \wedge Kxy)]$

   Nx: x ist Nachtwächter
   Sy: y ist ein Sternbild
   Kxy: x kennt y

2. Einige Händler tauschen alle Modelle ein
   $(\exists x)$ [x sind Händler ∧ für alle Modelle gilt: die x tauschen sie ein]
   $(\exists x)$ [Hx ∧ für alle y, die Modelle sind, gilt: die x tauschen die y ein]
   $(\exists x)\ [Hx \wedge (\forall y)\ (My \rightarrow Txy)]$

   Hx: x ist Händler
   My: y ist Modell
   Txy: x tauscht y ein

3. Jeder Jäger sieht einige Hasen
   $(\forall x)$ [x sind Jäger → es gibt Hasen, und die x sehen die Hasen]

(∀x) [Jx → es gibt y, die Hasen sind, und die x sehen die y]
(∀x) [Jx → (∃y) (Hy ∧ Sxy)]

Jx:	x ist Jäger
Hy:	y ist Hase
Sxy:	x sieht y

4. Jeder liebt sich selbst

(∀x) (x sind Personen → die x lieben sich selbst)
(∀x) (Px → die x lieben die x)
(∀x) (Px → Lxx)

Px:	x ist Person
Lxx:	x liebt x

Übung 5.3.3

Formalisieren Sie und geben Sie das benutzte Vokabular an:

1. Einige Erdbeben verursachen Schaden.
2. Viele Bauern ernten keine Kartoffeln.
3. Alle Gärtner begießen die Blumen.
4. Jeder Arbeiter verdient seinen Lohn.
5. Alle Angestellten benutzen den Lift.
6. Nur die Angestellten benutzen den Lift.
7. Die Angestellten müssen den Lift benutzen.
8. Wenn du dir selbst hilfst, so hilft dir Gott.

5.3.4 Die vollständige Aufzählung der Argumentstellen

Um nicht auf die metaphysische Frage, wodurch sich Prädikate von Relationen unterscheiden, eingehen zu müssen, spricht man in der Logik auch von ein- oder mehrstelligen Prädikaten. Nach dem erfreulichen Prinzip, wenn immer möglich die am wenigsten aufwendige Sprache für die Formalisierung zu wählen – die Aussagenlogik gilt als einfacher gegenüber der einstelligen Prädikatenlogik, diese als einfacher verglichen mit der zweistelligen usw. – können wir oft in der mehrstelligen Prädikatenlogik eine oder mehrere Stellen unterdrücken. Wird bei einer zweistelligen eine Stelle nicht formalisiert, so hat in der Sprache der traditionellen Terminologie anscheinend ein Übergang von einer Relation auf ein Prädikat stattgefunden. Was immer das heißen mag, metaphysische Fragen sollen uns weiterhin nicht beunruhigen. Wir sind zunächst eher daran interessiert, herauszufinden, wie viele Stellen formalisiert werden müssen. Betrachten wir dazu die folgenden Beispiele:

(1)	Alfons wird bewundert	Ba
(2)	Alfons wird vom Nachbarn bewundert	Ban
(3)	Alfons wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert	Banf

Ist nun „bewundern" ein-, zwei- oder sogar dreistellig? Aufgrund von Beispiel (3) offensichtlich dreistellig. Dennoch sind die Schreibweisen von (2) und sogar (1) korrekt. Es gilt die allgemeine Regel, aufwendige Formalisierungen zu vermeiden, die voraussichtlich in der anschließenden logischen Überlegung nicht benötigt werden.

Beispiel 1

Alfons wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert
Also wird jemand vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert

Für die Deduktion schlagen wir zwei Lösungswege vor:

a)	1. Banf	$/\therefore\ (\exists x)\,Bxnf$
	2. $(\exists x)\,Bxnf$	1, $+\exists$
		a: Alfons
		n: Nachbar
		f: Frühturnen
		Bxyz: x wird von y bei z bewundert
b)	1. Ba	$/\therefore\ (\exists x)\,Bx$
	2. $(\exists x)\,Bx$	1, $+\exists$
		a: Alfons
		Bx: x wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert

Der Lösungsweg a) ist aufwendig. Von den drei aufgezählten Argumentstellen bleiben zwei von der Deduktion unberührt. Deshalb ist die Deduktion b) vorzuziehen. b) ist eine Reduktion auf das streng Notwendige.

Beispiel 2

Alfons wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert
Also wird jemand von jemandem bei einer Tätigkeit bewundert

1. Banf $\quad /\therefore\ \underline{(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Px \wedge Py \wedge Tz \wedge Bxyz)}$
2. $\qquad (\exists z)\, Banz$
3. $\quad (\exists y)\ (\exists z)\, Bayz$
4. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\, Bxyz$

Px: x ist eine Person
Py: y ist eine Person
Tz: z ist eine Tätigkeit
Bxyz: x wird von y bewundert wegen z

Die Formalisierung von Beispiel 2 kann nicht vereinfacht werden mit Ausnahme, daß beim Resultat die ‚Px', ‚Py' und ‚Tz' weggelassen werden.

Beispiel 3

Der Nachbar hat Alfons beim Frühturnen bewundert, und die Mutter hat Beatrice beim Frühturnen bewundert
Also sind beide von jemandem beim Frühturnen bewundert worden

1. Bna ∧ Bmb $\quad /\therefore\ \underline{(\exists x)\ (\exists y)\ (Bxa \wedge Byb)}$

Es besteht kein Anlaß, bei Beispiel 3 ein zusätzliches Prädikat für „Frühturnen" einzuführen.

Bisweilen lassen sich durch sprachliche Umformungen zweistellige Prädikate auf einstellige reduzieren.

(4) Jakob trinkt Kaffee $\qquad$ Tjk
(5) Jakob ist Kaffeetrinker $\qquad$ Kj

Doch wer bei solchen Reduktionen auf die Elemente natürlicher Sprachstrukturen zu stoßen hofft, der täuscht sich insofern, als dieses Vorgehen weder allgemein gültig noch allgemein wünschbar ist.

Übung 5.3.4

Formalisieren Sie alle Argumentstellen:

1. Adelheid spielt.
2. Adelheid spielt Tennis.
3. Adelheid spielt Tennis gegen Berta.
4. Adelheid spielt Tennis gegen Berta in den Europameisterschaften.
5. Einige reden.
6. Alle reden mit einigen.
7. Alle reden mit einigen über den Verlust.
8. Alle reden mit einigen über den Verlust aller Aktien.

5.3.5 Der Genitiv

Wir reden von Werners Auto, von Monikas Pferd oder von Hildegards Blumen. Der Genitiv dient häufig zur Bezeichnung einer Besitzangabe. Dabei wird eine Beziehung ausgesprochen zwischen einer Person und einem Ding. Im allgemeinen benutzen wir dazu das Wort „haben" im Sinne von „Werner hat einen Jaguar". Dementsprechend sind folgende Formalisierungen zugelassen:

(1)	Werners Jaguar	Hwj
(2)	Monikas Pferd	Hmp
(3)	Hildegards Blumen	Hhb

Mit dem Wort „haben" braucht jedoch nicht unbedingt ein Besitz ausgedrückt zu sein. Auch Sätze von der folgenden Art sind geläufig:

(4)	Mein Fernsehapparat hat Röhren	Hfr
(5)	Wolfgang hat Pech	Hwp
(6)	Walter hat Geistesgegenwart	Hwg
(7)	Stephan hat Vernunft	Hsv

Die beiden Beispiele (6) und (7) sind indessen bereits fragwürdig. Sie ließen sich besser so formulieren:

(8)	Bernhard ist geistesgegenwärtig	Gb
(9)	Stephan ist vernünftig	Vs

Die Aussagen (6) und (7) sind ungebräuchlich formuliert; falsch dagegen sind sie nur für denjenigen, der einen metaphysischen Unterschied sehen will zwischen Relationen und Prädikataussagen. Vom sprachlichen Gesichtspunkt aus ist (8) und (9) vorzuziehen. Allerdings stößt diese Übersetzungsart sehr bald an Grenzen, denn

(10) Mein Fernsehapparat ist röhrig
(11) Wolfgang ist pechig

sind unzumutbare Übersetzungen von (4) und (5). Zufällig hat uns die Sprache Adjektive zur Verfügung gestellt für „hat Vernunft" oder „hat Geistesgegenwart", nicht aber für „hat Röhren" oder „hat Pech". Diese Sprachwillkür sollte uns nicht überstürzt metaphysische Unterschiede zwischen ein- und zweistelligen Prädikaten vermuten lassen.
Ferner deutet bei weitem nicht jedes „haben" auf eine Besitzanzeige hin.

Beispiel:

(12) Judith hat eine Schwester Hjs

Man kann eine Schwester gewiß nicht so haben, wie man ein Auto oder ein Pferd hat. Erfreulicherweise gibt uns die Sprache auch hier wieder eine Ausweichmöglichkeit, um dem unangemessenen „haben" zu entgehen, nämlich so:

(13) Jemand ist die Schwester von Judith Sxj

Manchmal mag sich Unschlüssigkeit einstellen angesichts der Wahl zwischen einer alltäglichen Ausdrucksweise, die sich vom Empfinden her der Symbolisierung widersetzt und einer gequälten Umformung. Soll man „Die Rosen haben Dornen" mit „haben" symbolisieren oder umformen in „Die Rosen sind dornig"? Letztlich hängt die Beurteilung vom Sprachempfinden ab. In unserem Beispiel hat es so entscheiden: „Die Rosen haben Dornen". Im Zweifelsfall ziehen wir es vor, die Formalisierung dem vorgelegten Ausdruck anzugleichen, statt nach ausgefallenen Übersetzungen zu suchen. Wenn etwa Andreas von den Masern befallen wurde, dann mag auf zweifache Weise von diesem beklagenswerten Zustand gesprochen werden:

(14) Andreas ist masrig Ma
(15) Andreas hat die Masern Ham

(15) spricht von einer Beziehung H zwischen Andreas und den Masern. Während traditionelle Philosophen (14) als die einzig korrekte Darstellung ansehen mögen, geben wir sprachlich eindeutig (15) den Vorzug.

„Haben" wird selbstverständlich nicht als Relation formalisiert, wenn es nur die Vergangenheit ausdrückt.

(16) Pia hat gelacht Lp
(17) Berta hat sich mit Urs gezankt Zbu

Übung 5.3.5

Formalisieren Sie:

1. Eugen hat einige graue Haare.
2. Wer einen Freund hat, hat Sicherheit.
3. Keiner hat alles.
4. Jeder Sohn hat einen Vater, aber nicht jeder Vater einen Sohn.
5. Jeder Schweizer hat einen Paß.
6. Verneinen Sie 5.

5.3.6 Die Zeit

Bisher haben wir alle Beispiele jeweils als zeitlos aufgefaßt. Nun kann es aber bei gewissen Verknüpfungen gerade auf Zeitzusammenhänge abgesehen sein. Diese Aufgabe kann den Quantoren übertragen werden. Für „immer" eignet sich der Allquantor, der so eingesetzt wird: „Für alle x, die Zeitpunkte sind, gilt ..." Ebenso läßt sich „manchmal" mit dem Existenzquantor darstellen.

(1) Albert ruft manchmal den Bruder an, wenn er in Geldnot ist
$(\exists t)\ (Gat \rightarrow Aab)$

(2) Othmar schreibt Käthi immer dann, wenn sie getrennt sind
$(\forall x)\ [Tx \rightarrow (Gokx \rightarrow Sokx)]$ oder $(\forall t)\ (Gokt \rightarrow Sokt)$

Es bleibt jedoch zu beachten, daß ein Zeitwort keine unfehlbare Angabe dafür ist, daß die Aussage zeitlich zu verstehen wäre. „Raben sind immer schwarz“ heißt nichts anderes als „Alle Raben sind schwarz“.

Übung 5.3.6

1. Konrad und Beatrice reisten zu verschiedenen Zeiten ab (=: gleich; ≠: verschieden).
2. Lügen haben kurze Beine.
3. Du kannst einige Leute immer belügen und alle Leute manchmal, aber du kannst nicht alle Leute immer belügen (Abraham Lincoln).
4. Diese Kuh kann jeden Tag kalben.

Übung 5.3.6 (Wiederholung)

Formalisieren Sie:

1)
1. Es gibt Medikamente, die schlechter sind als alle Krankheiten.
2. Einige Verkäufer beeinflussen alle Kunden.
3. Nicht jeder ist Meister seines Faches.
4. Wer ein unglückliches Kind hat, ist selber unglücklich.
5. Keine Regel ohne Ausnahme.
6. Was sich liebt, das neckt sich.
7. Irren ist menschlich.
8. Keine Rosen ohne Dornen.
9. Nur wer sich selbst vertraut, vertraut andern.
10. Keiner bringt einem andern etwas bei, außer er hat es sich selber beigebracht.

2)
1. Einige Busfahrer transportieren die Touristen über einige Pässe.
2. Eine Person, die freundlich zum einen ist, ist es auch zum andern.
3. Jeder, der etwas leistet, wird von jemandem beneidet.
4. Es gibt einen Laden, aus dem jeder etwas kauft.
5. Einige Leute kaufen alles in einem Laden.
6. Wer andern etwas wegnimmt, ist ein Dieb.

7. Zirkusleute erschrecken einige Zuschauer mit Akrobatik.
8. Jeder leiht jemandem etwas.
9. Jeder Student löst einige Aufgaben, aber keiner löst alle.
10. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.

3)

1. Einige Geschäftsleute unterhalten sich freundlich im Laden mit ihren Kunden über das Wetter.
2. Jeder liest etwas im einen oder anderen Buch.
3. Wer einigen alles glaubt, der glaubt anderen nichts.
4. Wo es Rauch gibt, da gibt es Feuer.
5. Wenn Zürich 400000 Einwohner hat, dann ist es die größte Schweizerstadt.

5.4 Deduktion

Quantoren dürfen nur eliminiert werden, wenn sie am Anfang einer ganzen Formel stehen und sich auf die ganze Formel beziehen. Für die Deduktion gelten sonst die bisher bekannten Regeln. Beispiele

Beispiel 1

1. Alle Rosen haben Dornen
2. Also hat auch die Adenauerrose Dornen

1.	$(\forall x)\ (Rx \rightarrow (\exists y)\ (Dy \land Hxy))$	
		$\underline{/\therefore\ Ra \rightarrow (\exists y)\ (Dx \land Hay)}$
2.	$Ra \rightarrow (\exists y)\ (Dy \land Hay)$	$1,\ -\forall$

1. Hitler verhöhnte alle Engländer
2. Churchill war Engländer
3. Also verhöhnte jemand Churchill

1.	$(\forall x)\ (Ex \rightarrow Vhx)$	
2.	Ec	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\, Vxc}$
3.	$Ec \rightarrow Vhc$	$1,\ -\forall$
4.	Vhc	2, 3, MP
5.	$(\exists x)\, Vxc$	$4,\ +\exists$

Es gibt Schlüsse, die wir intuitiv leicht bewältigen, die aber verhältnismäßig viel Aufwand erfordern, sobald verlangt wird, den formalen Ablauf exakt nachzuweisen. Dazu gehört etwa der folgende Schluß:

Mercedes sind Autos
Also, wer Mercedes fährt, fährt Auto

Die erste Prämisse ist leicht zu formalisieren:

$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Ax)$

Die traditionelle Logik gerät mit der Konklusion an Grenzen. Denn im Gegensatz zur Prämisse haben wir es nicht mehr mit den gleichen Elementen zu tun, nämlich mit den Autos, sondern mit Autofahrern. Das sind offensichtlich Menschen, die in einer bestimmten Beziehung zu Autos und Mercedes stehen. Die traditionelle Logik war gezwungen, die Konklusion etwa so zu formalisieren:

$(\forall y)\ (Fy \rightarrow Gy)$
Alle Mercedesfahrer sind Autofahrer

Diese Formel kann aber als Konklusion nicht allgemeingültig sein, denn sie müßte etwa die Deutung einschließen: „Alle Mercedes sind Autos, also sind alle Eichhörnchen Klettertiere." Da für die Buchstaben Beliebiges eingesetzt werden darf, wäre grundsätzlich nichts gegen die Einsetzung einzuwenden: „Wenn alle Zündhölzer abgebrannt sind, dann wackeln alle Büchergestelle." Das ist alles andere als logisch zwingend.

Beim Formalisieren des Autofahrbeispiels gehen wir von einem konkreten Fahrer aus:

Hildegard fährt Mercedes $\quad$ Fhm

Weiter muß die Tatsache explizit ausgesprochen werden, daß ein Mercedes ein Auto ist, also Am. Die Konjunktion ergibt:

$Am \wedge Fhm$

oder existenziell verallgemeinert: Es gibt ein Ding, das ein Auto ist und Hildegard fährt dieses Ding:

$(\exists y)\ (Ay \wedge Fhy)$

Diesen Satz können wir erweitern: Wenn etwas ein Mercedes ist, den Hildegard fährt, dann ist es ein Auto, das Hildegard fährt:

$$(\exists y)\ (My \wedge Fhy)\ \rightarrow\ (\exists y)\ (Ay \wedge Fhy)$$

Das gilt aber nicht bloß für Hildegard, vielmehr für alle Mercedesfahrer:

$$(\forall x)\ [(\exists y)\ (My \wedge Fxy)\ \rightarrow\ (\exists y)\ (Ay \wedge Fxy)]$$

Somit lautet unsere Behauptung:

$$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Ax)\ \underline{/\ (\forall x)\ [(\exists y)\ (My \wedge Fxy)\ \rightarrow\ (\exists y)\ (Ay \wedge Fxy)]}$$

Für die Ableitung wird sich die Konditionale Annahme empfehlen.

Übung 5.4

1) 1. Wer immer das Gebäude betreten hat, wurde gesehen
2. Jeder, der Priska gesehen hat, erinnert sich an sie
3. Niemand erinnert sich an Priska
4. Also hat Priska das Gebäude nicht betreten

2) 1. Alle Angestellten grüßen alle Direktoren
2. Kein Angestellter grüßt alle Konkurrenten
3. Es gibt Angestellte
4. Also ist kein Direktor ein Konkurrent

3) 1. Alle Eingaben wurden an alle Ratsmitglieder weitergeleitet
2. Es gab einige Eingaben zur Steuersenkung
3. Also war eine Eingabe über Steuersenkung an einige Ratsmitglieder weitergeleitet worden

4) 1. $(\exists x)\ (Ax \wedge Bx)\ \rightarrow\ (\forall y)\ (Cy\ \rightarrow\ Dy)$
2. $(\exists y)\ (Cy \wedge \neg Dy)$ $\qquad \underline{/\ (\forall x)\ (Ax\ \rightarrow\ \neg Bx)}$

5) 1. $(\forall x)\ [Ax\ \rightarrow\ (\forall y)\ (\exists z) Rxyz]$
2. $(\exists x) Ax$ $\qquad \underline{/\ (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z) Rxyz}$

6) 1. Wenn der Pfeil während der Zeit t fliegt, so gibt es in jedem Augenblick seines Fluges einen Ort, an dem er sich in diesem Augenblick befindet.

2. Wenn es einen solchen Ort gibt, an dem sich der Pfeil in jedem Augenblick seines Fluges befindet, so ruht der Pfeil während der ganzen Zeit seines Fluges.
3. Also, wenn der Pfeil während der Zeit t fliegt, so ruht der Pfeil während der ganzen Zeit t.
   oder: Also fliegt der Pfeil nicht.

t: t ist ein Zeitpunkt
Bptx: p befindet sich zur Zeit t am Ort x
Fpt: p fliegt zur Zeit t
Rpt: p ruht zur Zeit t = p fliegt nicht zur Zeit t

7) Alle Kreise sind Figuren
   Also, wer Kreise zeichnet, zeichnet Figuren.

5.5 Die polnische Schreibweise der Prädikatenlogik

Für die polnische Schreibweise der Prädikatenlogik brauchen wir nur die Darstellungsweise der Quantoren und die entsprechenden Streichungsregeln beizufügen.

5.5.1 Schreibweise der Quantoren

Die Quantoren werden gemäß der bisherigen Schreibweise ohne Klammern beigefügt.

$\forall\ x\ P\ x$	$(\forall x) Px$
$\exists\ x\ P\ x$	$(\exists x) Px$
$\forall\ x\ C\ P\ x\ Q\ x$	$(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$
$C\ \forall\ x\ P\ x\ \exists\ y\ Q\ y$	$(\forall x) Px \rightarrow (\exists y) Qy$
$\overline{\exists x}\ K\ P\ x\ Q\ x$	$\neg\ (\exists x)\ (Px \wedge Qx)$
$\exists x\ \bar{K}\ P\ x\ Q\ x$	$(\exists x) \neg\ (Px \wedge Qx)$

Übung 5.5.1

1. $Pa \rightarrow (\forall x) Px$
2. $(\forall x) Px \rightarrow (\exists x) \neg Px$
3. $(\forall x) Px \rightarrow \neg (\exists x) Px$
4. $(\forall x) Px \rightarrow \neg (\exists x) \neg Px$

5.5.2 Streichungsregeln

Streichung des Allquantors

Nachdem der Allquantor gestrichen ist, wird die Variable, die er bindet, durch eine „1“ ersetzt. Bei einem zweiten oder dritten Quantor werden die Variablen durch Zahlenkonstante in der üblichen Reihenfolge „2“, „3“ usw. ausgetauscht.

Streichung des Existenzquantors

Die Variablen des gestrichenen Existenzquantors werden durch Buchstaben ausgetauscht, „a“ für den ersten Existenzquantor, „b“ für den zweiten usw.

$\forall\ x\ P\ x$	$\cancel{\forall}\ \overset{1}{x}\ P\ \underset{1}{x}$
$\exists\ x\ P\ x$	$\cancel{\exists}\ \overset{a}{x}\ P\ \underset{a}{x}$

Beispiele:

$\forall\ x\ C\ P\ x\ Q\ x$	$\cancel{\forall}\ \overset{1}{x}\ \cancel{C}\ \overline{P\ \underset{1}{x}}\ Q\ \underset{1}{x}$
$A\ \exists\ x\ P\ x\ \exists\ y\ Q\ y$	$\cancel{A}\ \cancel{\exists}\ \overset{a}{x}\ P\ \underset{a}{x}\ \cancel{\exists}\ \overset{b}{y}\ Q\ \underset{b}{y}$
$\forall\ x\ C\ \exists\ y\ F\ x\ y\ \exists\ z\ G\ z\ x$	$\cancel{\forall}\ \overset{1}{x}\ \cancel{C}\ \overline{\exists\ y\ F\ \underset{1}{x}\ \underset{2}{y}}\ \cancel{\exists}\ \overset{a}{z}\ G\ \underset{a}{z}\ \underset{1}{x}$

Wir haben es auch hier wieder auf die Allgemeingültigkeit abgesehen. Sie zeigt sich in den Tautologien. Dabei ist hier auf die Einschränkung zu achten, daß nur dann von Tautologien zu sprechen ist, wenn ein Prädikat mit seiner Negation auftritt und die Reihenfolge der Variablen gewahrt bleibt.

Tautologien:	P1,	$\overline{\text{P1}}$
	Qab,	$\overline{\text{Qab}}$
Keine Tautologien:	P1,	$\overline{\text{Q1}}$
	P1,	$\overline{\text{P2}}$
	Q12,	$\overline{\text{Q21}}$

Beispiele

$$\begin{array}{llllllllll}
\forall & x & C & K & P & x & Q & x & P & x \\
 & 1 & & & & & & & & \\
\cancel{\forall} & x & \cancel{C} & \cancel{K} & \multicolumn{2}{l}{\overline{P\ x}} & \multicolumn{2}{l}{\overline{Q\ x}} & P & x \\
 & & & & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & & & \multicolumn{2}{l}{\overline{P1}} & \multicolumn{2}{l}{\overline{Q1}} & \multicolumn{2}{l}{P1}
\end{array}
\qquad (\forall x)\ ((Px \wedge Qx) \rightarrow Px)$$

$$\begin{array}{llllll}
\forall x & \forall y & C & Pxy & A\ Qxy & Pxy \\
1 & 2 & & & & \\
\cancel{\forall} x & \cancel{\forall} y & \cancel{C} & \overline{Pxy} & \cancel{A}\,Qxy & Pxy \\
 & & & 12 & \quad 12 & 12 \\
1 & 2 & & \overline{P12} & \quad Q12 & P12
\end{array}
\qquad (\forall x)\ (\forall y)\ ((Pxy \rightarrow (Qxy \vee Pxy))$$

Eine geschlossene Tafel ist der Beweis für die Allgemeingültigkeit. Will der konsequente Nachweis der Tautologie nicht gelingen, dann muß die Frage der Gültigkeit vom zweistelligen Prädikatenkalkül an offen bleiben.

Allerdings sind noch nicht alle Wege ausgeschöpft, auf denen Tautologien herstellbar sind. Das ist etwa der Fall bei einer Formel wie

$$C\ \forall x\ Px\ \forall x\ Px \qquad (\forall x)Px \rightarrow (\forall x)Px$$

die intuitiv tautologisch erscheint, sich mit dem bisherigen Material jedoch nicht schließen läßt, denn:

$$\begin{array}{lll}
 & \quad a & \quad 1 \\
\cancel{C} & \overline{\cancel{\forall}\ x\ P\ x} & \cancel{\forall}\ x\ P\ x \\
 & \qquad a & \qquad 1 \\
 & a, \overline{Pa}\ , & 1, P1
\end{array}$$

stellt mit $\overline{Pa}$ und P1 keine Tautologie dar. Nun muß es aber einen Ausweg geben, diese offensichtliche Gültigkeit doch zu beweisen. Das geschieht tatsächlich durch Auswechseln der Buchstaben. Wir dürfen a = 1 setzen, wodurch die Formel schließbar wird. Freilich ist eine solche Ersetzung zwei Einschränkungen unterworfen, der Vorschrift der Einheitlichkeit und der Reihenfolge.

Einheitlichkeit

Wird a = 1 gesetzt, dann muß dies konsequent durchgehalten werden.
Beispiel:

$$C\,K\,\exists\,x\,F\,x\,\exists\,x\,G\,x\,\exists\,x\,K\,F\,x\,G\,x$$

$$\begin{array}{l|ll}
\not C\ \overline{\not K}\ \underset{1}{\overset{1}{\overline{\not\exists\,x\,F\,x}}}\ \underset{2}{\overset{2}{\overline{\not\exists\,x\,G\,x}}}\ \overset{a}{\not\exists\,x} & \underbrace{\not K\,F\,\underset{a}{x}\,G\,\underset{a}{x}} & \\
 & F\,a & a=1 \\
1,\ \overline{F1},\ 2,\ \overline{G2}\quad a & \overline{\qquad\qquad} & \text{unerlaubt} \\
 & G\,a & a=2
\end{array}$$

Der Grund für die Willkürwahl zwischen 1 und 2 ist einsichtig. Es soll damit verhindert werden, daß aus der Tatsache eines runden Gegenstandes und eines kubischen Gegenstandes gefolgert wird, es würde einen kugelförmigen Würfel geben.

Anders sieht die Lage aus, wenn in der Aufsplitterung Allquantoren auftreten. Sofern sie in entgegengesetzten Hälften vorkommen, dürfen die gleichen Zahlen gewählt werden.
Beispiel:

$$C\,\forall\,x\,K\,F\,x\,G\,x\,K\,\forall\,x\,F\,x\,\forall\,x\,G\,x$$

$$\begin{array}{l|ll}
\not C\ \overset{a}{\overline{\not\forall\,x}}\ \overline{\not K}\ \overline{F\,\underset{a}{x}\,G\,\underset{a}{x}} & \underbrace{\not K\ \overset{1}{\not\forall}x\,F\,\underset{1}{x}\ \overset{1}{\not\forall}x\,G\,\underset{1}{x}} & \\
 & 1,\ F1 & a=1 \\
a,\qquad \overline{Fa},\ \overline{Ga} & \overline{\qquad\qquad\qquad} & \\
 & \qquad 1,\ G1 & a=1
\end{array}$$

Eine Tafel kann nie geschlossen werden, wenn keine negierten Grundformeln vorliegen. Dasselbe gilt auch für Tafeln mit verschiedenen numerischen Konstanten wie etwa P1, P2.

Ferner kann es vorkommen, daß keine numerische Konstanten vorhanden sind. Dann dürfen solche unter bestimmten Bedingungen eingeführt werden.

Reihenfolge

Die Beurteilung der Reihenfolge richtet sich nach dem Bereich, den der Quantor bindet. Die exakte Reichweite wird in der Quantorenskizze (Q-Skizze) festgehalten. Allgemein gilt: Reicht ein Quantor über einen andern hinaus, dann wird der erste Quantor über dem zweiten geschrieben. Sind die beiden selbständig, dann drückt sich das durch Nebeneinanderstellen aus. Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Beispiel 1 — Q-Skizze

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\exists z)\,Pxyz \text{ ergibt } \overset{1}{\cancel{\forall}}x\ \overset{2}{\cancel{\forall}}y\ \overset{a}{\cancel{\exists}}z\ Pxyz \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline a \end{array}$$

Beispiel 2

$$(\forall x)\,Px \vee (\forall y)\,Qy \vee (\exists z)\,Rz \quad A\ A\overset{1}{\cancel{\forall}}x\ Px\ \overset{2}{\cancel{\forall}}y\ Qy\ \overset{a}{\cancel{\exists}}z\ Rz \qquad \text{Q-Skizze: } 1 \quad 2 \quad a$$

Beispiel 3 — Q-Skizze

$$(\forall x)\ [(\exists y)\,Pxy \rightarrow (\exists z)\ ((\forall w)\,Qzw \rightarrow (\exists v)\,Rv)]$$

$$\forall x\ C\ \exists y\ Pxy\ \exists z\ C\ \forall w\ Qzw\ \exists v\ Rv$$

$$\overset{1}{\cancel{\forall}}x\ \underline{\overset{2}{\cancel{C}\ \cancel{\exists}y}}\ \overset{a}{Pxy}\ \exists z\ \underline{\overset{b}{\cancel{C}\ \forall w}}\ Qzw\ \overset{c}{\exists v}\ Rv \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & \\ \hline 2 & a & \\ \cline{2-3} & b & c \end{array}$$

Die Vorschrift über die Reihenfolge legt nun fest: Buchstaben dürfen durch Zahlen ersetzt werden, wenn ein Weg durch die Skizze führt. Der Weg gilt dann als gangbar, wenn eine Zahl dem Buchstaben vorhergeht. So darf bei der Q-Skizze $\frac{1}{a}$ sofort das „a" durch „1" ersetzt werden, hingegen ist $\frac{a}{1}$ nicht weiter zu bearbeiten, weil der Buchstabe nicht jener Zahl vorausgehen darf, durch die er ersetzt werden soll. So darf im Beispiel 1 der Buchstabe „a" ausgetauscht werden und zwar durch „1" oder „2". Für Beispiel 2 ist das ohnehin der Fall. Auch für Beispiel 3 gilt die Erlaubnis der Ersetzung.

Ein Sonderfall liegt vor im Zusammenhang mit der Existenz. Als Beispiel sei die Formel ,$(\forall x)\,Px \rightarrow (\exists x)\,Px$' gegeben:

$$\begin{array}{ll} C\ \forall x\ Px\ \exists x\ Px & \qquad \text{Q-Skizze} \\ \quad\ a \qquad\ b & \qquad a \quad\ b \\ \not{C}\ \overline{\not\forall x\ Px}\ \nexists x\ Px & \end{array}$$

Wir können diese Formel mit der modernen Logik als ungültig betrachten oder eine Existenzannahme postulieren. Das letztere wirkt sich an der Q-Skizze so aus, daß über ,a' und ,b' eine „1" gesetzt wird, so daß dann die beiden Buchstaben ebenfalls als „1" ersetzt werden dürfen. Also:

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Beispiel 4

$$\begin{array}{ll} (\forall x)\ (\exists y)\ (Pxy\ \rightarrow\ Qxy) & \qquad \text{Q-Skizze} \\ \quad\ a \quad\ 1 & \qquad \underline{a} \\ C\ \overline{\forall x}\ \overline{\exists y}\ \overline{Pxy}\ Qxy & \qquad 1 \end{array}$$

Das Beispiel 4 ist nicht schließbar.

Nun läßt sich die Vorschrift über die Reihenfolge exakter fassen: Buchstaben dürfen durch Zahlen ersetzt werden, wenn ein Weg durch die Skizze führt. Dies ist der Fall unter drei Bedingungen:

1. Der Weg berührt jeden Buchstaben oder jede numerische Konstante nur einmal.
2. In jeder Kolonne berührt der Weg zuerst den höheren, dann den niedrigeren Eintrag.
3. Der Durchgang berührt zuerst eine Zahlenkonstante, bevor ein Buchstabe an der Reihe ist, der durch die Konstante ersetzt wird.

In den Beispielen 1) und 2) ist es erlaubt, ,a' durch „1" oder „2" zu ersetzen. Im Beispiel 3) steht die Wahl offen, alle Buchstaben beliebig durch „1" oder „2" zu ersetzen.

Die Vorschrift 3. verbietet, daß Beispiel 4 geschlossen wird. Zuerst muß die numerische Konstante auftreten, dann erst ist der Buchstabe erlaubt. Dagegen darf die Tafel a b geschlossen werden, wenn sie aus zwei Existenzoperatoren erhalten wurde, ohne daß eine Zahl vorhanden ist.

Ist eine Formel immer noch nicht geschlossen, so gibt es schließlich die Auswertung der Duplikate, ein Verfahren, auf das wir aber nicht eingehen wollen.

Übung 5.5.2

5. $\neg (\forall x) Px \rightarrow (\exists x) \neg Px$
6. $(\forall x) (Px \vee Qx) \rightarrow (\forall x) Px \vee (\forall x) Qx$
7. $\neg (\exists x) Px \rightarrow (\forall x) \neg Px$
8. $(\forall x) Px \vee (\forall x) \neg Px$ Warum ist 8. nicht das Ausgeschlossene Dritte? Wie lautet die korrekte Formulierung?
9. $(\exists x) (\forall y) Rxy \rightarrow (\forall y) (\exists x) Rxy$
10. $(\forall x) (\exists y) Rxy \rightarrow (\exists y) (\forall x) Rxy$

5.6 Die Identität

Die Relationslogik steht noch vor einer Grenze, die verhältnismäßig leicht auszuweiten ist. Mit dem bisherigen Sprachmaterial ist es bestenfalls möglich, zum Ausdruck zu bringen, daß zwei verschiedene Variable für zwei verschiedene Gegenstände stehen müssen. Es genügt, die Aussage ‚$Ax \wedge \neg Ay$' als wahr anzunehmen. Wenn ‚x' und ‚y' dasselbe wären, dann läge ein Widerspruch vor. Also sind sie verschieden. Wie können wir aber ausdrücken, daß zwei Individuen oder zwei Aussagen dieselben sind? Wir möchten nicht auf Behauptungen verzichten, etwa daß der Komponist der Brandenburgischen Konzerte Bach ist, also daß zwei verschiedene Bezeichnungen sich auf den einen Gegenstand beziehen.
Wir fügen der Relationslogik ein neues Zeichen hinzu, „=". Es ist ein Funktor, eine logische Konstante, die die Identität zwischen zwei Namen von Gegenständen bezeichnen soll. ‚$a = b$' bedeutet also, daß ‚a' und ‚b' identisch sind, daß ‚b' nur ein anderer Name für ‚a' ist. Deshalb gilt alles, was von ‚a' ausgesagt wird auch von ‚b'.

5.6.1 Identität und Äquivalenz

Die Identität ist weit strenger als die Äquivalenz. Die Äquivalenz besagt auf der logischen Ebene nur Gleichheit der Wahrheitswerte. Im alltäglichen Leben ist uns der Unterschied zwischen Äquivalenz und Identität sehr wohl vertraut. Freilich sind die meisten Äquivalenzverhältnisse des Alltags nicht Äquivalenzen von Wahrheitswerten, viel häufiger sind es Marktwerte. So hört man beispielsweise: „1 Tafel Schokolade kostet 1.60 Fr.“ Hier ist der Handelswert beider Gegenstände äquivalent. Nur wer unmittelbar in die Münzen beißen wollte, um sich den Gang ins Kaufhaus zu ersparen, würde durch diese Handlung zeigen, daß er die Äquivalenz von der Identität nicht zu unterscheiden weiß.

5.6.2 Identität und Prädikation

Die meisten Unklarheiten im Verständnis der Identität ergeben sich aus der Abgrenzung zur Prädikation. Die Umgangssprache erschwert das Verständnis, weil beide Aussagen mit „ist“ gebildet werden. Wir wollen uns den Unterschied zwischen den beiden verdeutlichen.

Das Prädikat drückt eine Eigenschaft aus, die dem Attribut zukommt. Faßt man die Aussage als Zugehörigkeitsbehauptung auf, dann entspricht dem Prädikat eine Klasse von Gegenständen, z. B. „Das Kleid ist weiß“. Das Prädikat ist hier die Klasse der weißen Gegenstände. Es wird jedoch nicht behauptet, das weiße Kleid sei mit dieser Klasse identisch. Was genau ausgesprochen wird, ist einzig das: Das Suppositum ist mit einem Element dieser Klasse identisch. Die Prädikationsaussage behauptet demnach nicht, das Prädikat der Aussage treffe ausschließlich auf das Suppositum zu oder nur auf das Suppositum. Eine Aussage von dieser Ausschließlichkeit liegt nur dann vor, wenn die Kopula bedeutet „ist definitionsgemäß oder „... ist genau dann, wenn ...“ usw. Das sind aber relativ seltene Fälle.

Die Identitätsaussage schließt ein, Attribut und Prädikat seien in ihren Eigenschaften gleich. Eine Folge davon ist die gegenseitige Austauschbarkeit. Das trifft für die Prädikataussage gerade nicht zu. Dadurch vermag die Prädikataussage nicht nur weniger, sondern etwas anderes auszusagen als die Identität. Sehen wir uns diesen Sachverhalt an der Gegenüberstellung zweier Beispiele an:

Der Elefant ist groß	13 − 3 ist (2.4) + (2.1)
Der Walfisch ist groß	6 + 4 ist (2.4) + (2.1)
Also ist der Wal ein Elefant	Also: 6 + 4 ist 13 − 3
(1)	(2)

Die beiden Beispiele haben den gleichen Aufbau, aber offensichtlich entgegengesetzten Wahrheitsgehalt. Der Syllogismus von (1) ist falsch, derjenige von (2) richtig. Ist (2) zufällig richtig, dank der geschickten Zusammenstellung der Prämissen oder etwa gar, weil wir es mit Zahlen zu tun haben? Keineswegs. Die Gültigkeit kommt einzig daher, weil das „ist“ bei (2) ein anderes ist als das von Beispiel (1). Im Beispiel (1) haben wir Prädikataussagen, bei (2) Identitäten. Die Identität läßt sich mit „ist gleichwertig“ oder „ist identisch mit“ übersetzen. Sollten wir diese Umschreibung unerlaubterweise auf Beispiel (1) übertragen, so würde uns das Sprachempfinden entschieden davon abraten. „Der Elefant ist gleichwertig mit groß“ oder „Der Elefant ist identisch mit groß“ verträgt sich nicht mit unserem Grammatikverständnis.

Übung 5.6.2

1) Beweisen Sie durch die Formalisierung der folgenden Aussagen die Fähigkeit, die verschiedenen „ist“ zu unterscheiden. Greifen Sie nötigenfalls auf die Symbolisierungshilfe der Mengenlehre zurück:

1. Aristoteles ist weise
2. Bern ist die Hauptstadt der Schweiz
3. Menschen sind Lebewesen
4. So ist es
5. A = A + 1

Beurteilen Sie die folgenden Texte:

2) „Von diesen Gesetzen hat der Identitätssatz eine streng logische Bedeutung; ja, man kann zeigen, daß alle rein logischen Regeln sich ausschließlich auf diesen Satz zurückführen lassen, ...“ (H.H. Holz, Leibniz (Stuttgart 1958) 90)

Wie zeigt man, daß sich alle logischen Regeln auf die Identität zurückführen lassen?

3) „Alle S sind P, M ist S, deshalb M ist P. Verallgemeinert könnte man sagen, es sei von der einfachen mathematischen Art: Wenn A = B und C = A, dann C = B (M. Frost. Justice and the Nature of Legal Argumentation. Actes du Congrès mondial de Philosophie du Droit et de Philosophie Sociale (Bruxelles 1971), 280).

4) „Das ‚ist' ist ein Binde- und Verhältniswort. Identität ist ein Sachverhalt; ... auch in dem Urteil: x folgt auf y, oder auseinandergelegt: x ist folgend auf y, sind Subjekt, Kopula und Prädikat enthalten; ausgesagt wird, was x in Bezug auf y ist". (C. Nink, Die mathematisch-logistische Symbolsprache in philosophischer Sicht. Scholastik 15 (1940) 61, Anm. 8).

5) „‚Dieses Blatt ist grün'. Das Grünsein ist dem Blatt identisch in dem ... dargelegten Sinne; denn es wird vom Blatt ausgesagt; das Blatt ist eben durch das Grün in sich grün bestimmt. Es ist aber nicht formell, sondern nur materiell identisch mit dem Grün, d. h. in sich ist es grün, aber aus sich könnte es ebenso gut rot – wie es tatsächlich im Herbst ist – und damit nicht grün sein, ... Das Blatt ist also aus sich indifferent gegenüber ‚grün' und ‚nicht grün'. Dieses Verhältnis bezeichnet man als materielle Identität. Ihr entspricht der materielle kontradiktorische Gegensatz". (F. M. Sladeczek, Das Widerspruchsprinzip und der Satz vom hinreichenden Grunde. Scholastik 2 (1927) 11–12).

1. Können Sie exakt, kurz und verständlich beschreiben, was der Autor unter formell und unter materiell identisch versteht?
2. Worin unterscheidet sich der materielle kontradiktorische Gegensatz vom formell kontradiktorischen?

5.7 Einige Eigenschaften der Relationen

Bisher haben wir Relationen nur unter dem Gesichtspunkt ihrer Argumentstellen betrachtet. Dabei sind ein-, zwei- oder n-stellige unterschieden worden. Unabhängig von dieser Einteilung lassen sich Relationen zweckmäßig aufgrund ihrer Eigenschaften ordnen und beschreiben.

Gehen wir von der Aussage aus: „x ist größer als y". Daraus entnehmen wir intuitiv: „Also ist y nicht größer als x". Haben wir damit eine erste allgemeine Eigenschaft von Relationen entdeckt? Wenn das zuträfe, dann läge ein Gesetz vor, das sich so schreiben ließe:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$$

Die Enttäuschung wird nicht lange auf sich warten lassen. Das scheinbare Gesetz gilt zwar für die Relation „größer als" und vermutlich für alle „ähnlichen" Relationen. Aber worin besteht die Ähnlichkeit? Ist etwa die Relation „gleichgroß" ähnlich mit „größer als"? Wohl kaum, denn auch bei „gleichgroß wie" läßt sich ebenfalls intuitiv erfassen, daß wohl immer gilt:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (Gxy \leftrightarrow Gyx)$$

Damit sind wir eher zufällig auf vermutete Gesetze gestoßen. Leider sind sie nicht für alle Relationen gültig.

Das Ziel unserer Aufgabe könnte nun so umschrieben werden: Wir stellen eine Klassifikation für Relationen auf und suchen nach exakten Kriterien, wann eine Relation „ähnlich" ist mit der Gruppe „größer als", wann mit derjenigen von „gleichgroß wie". Dabei wollen wir uns jedoch nicht auf diese beiden willkürlich herausgegriffenen Relationen beschränken, sondern die Aufgabe etwas systematischer anfassen.

Jene Eigenschaften, die allen Relationen zukommen, nennen wir analytische, jene, die nur einer bestimmten Relation oder Relationsgruppe zukommen, sollen synthetische heißen. Dann ist die nachfolgende Darstellung auf die Untersuchung synthetischer Eigenschaften ausgerichtet. Dabei wollen wir uns auf drei Grundeigenschaften beschränken.

5.7.1 Die Reflexivität

Reflexiv: Eine Relation heißt genau dann reflexiv, wenn jedes Relationsglied die Relation R zu sich selbst hat.

Beispiel: x hat die gleiche Haarfarbe wie y
x ist aus dem gleichen Stoff wie y

Irreflexiv: Eine Relation heißt genau dann irreflexiv, wenn kein Gegenstand diese Relation R zu sich selbst hat.

x ist nicht äquivalent mit x (sich selber)
x ist nicht Vater von x (sich selber)

Non-reflexiv: eine Relation heißt genau dann non-reflexiv, wenn es wenigstens einen Gegenstand gibt, der nicht in dieser Relation R zu sich selber steht.

x hat eine hohe Meinung von y
x verwundet y

Formal

reflexiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ ((Rxy \vee Ryx) \rightarrow Rxx)$
irreflexiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ ((Rxy \vee Ryx) \rightarrow \neg Rxx)$
non-reflexiv	$(\forall x)\ (\exists y)\ ((Rxy \vee Ryx) \wedge \neg Rxx)$

Unter den reflexiven Relationen gibt es noch eine Besonderheit. Wir nennen eine Relation totalreflexiv, wenn jeder Gegenstand diese Relation zu sich hat. Eine solche Relation ist „identisch sein mit". Formal: $(\forall x)\, Ixx$.

Die Relationen von Eigenschaften lassen sich bildlich darstellen mit Hilfe von Pfeildiagrammen.

reflexiv irreflexiv non-reflexiv

5.7.2 Die Symmetrie

Symmetrisch: Eine Relation heißt genau dann symmetrisch, wenn sie jedesmal, insofern sie einem geordneten Paar von Gegenständen zukommt, auch dem umgekehrt geordneten, aber aus denselben Gegenständen bestehenden Paar zukommt.

Beispiel:

x ist gleich groß wie y
x ist verheiratet mit y

Asymmetrisch: Eine Relation heißt asymmetrisch, wenn sie jedesmal, falls sie einem geordneten Paar von Gegenständen zukommt, nicht auch dem umgekehrt geordneten, aber aus denselben Gegenständen bestehenden Paar zukommt.

x ist im Norden von y
x ist älter als y

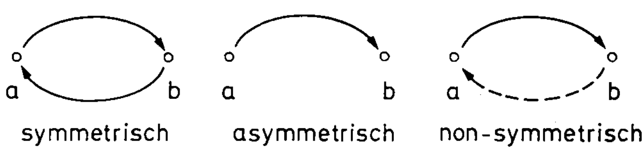
Non-symmetrisch: Eine Relation heißt genau dann non-symmetrisch, wenn es wenigstens ein geordnetes Paar von Gegenständen gibt, dem sie zukommt, während sie denselben Gegenständen bei umgekehrter Reihenfolge nicht zukommt.

x liebt y
x ist Bruder von y

Formal:

symmetrisch	$(\forall x)\ (\forall y)\ (Rxy \rightarrow Ryx)$
asymmetrisch	$(\forall x)\ (\forall y)\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
non-symmetrisch	$(\forall x)\ (\exists y)\ (Rxy \wedge \neg Ryx)$

In Pfeildiagrammen



5.7.3 Die Transitivität

Transitiv: Eine Relation heißt dann transitiv, wenn je zwei Gegenstände, die mit einem dritten in der Relation R stehen, auch unter sich in der Relation R stehen.

Beispiel:

x ist größer als y
x ist schneller als y

Intransitiv: Gilt die Transitivität nie, dann heißt eine solche Relation intransitiv.

x ist Vater von y
x ist links von y

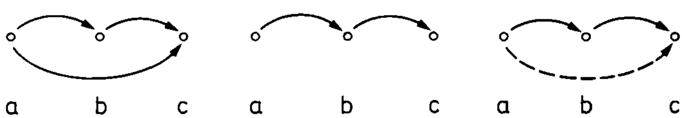
Non-transitiv: Eine Relation heißt genau dann non-transitiv, wenn es der Fall ist, daß transitive Relationen mindestens in einem Fall intransitiv sind.

x ist verschieden von y
x ist Freund von y

Formal:

transitiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Rxy \wedge Ryz)\ \rightarrow\ Rxz)$
intransitiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Rxy \wedge Ryz)\ \rightarrow\ \neg Rxz)$
non-transitiv	$(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ ((Rxy \wedge Ryz) \wedge \neg Rxz)$

In Pfeildiagrammen:



transitiv intransitiv non-transitiv

Nun soll an zwei Beispielen gezeigt werden, wie sich diese Definitionen zu Analysen von Relationseigenschaften eignen. Wir beschränken uns auf die drei definierten Eigenschaften.

Beispiel 1

Welche Eigenschaften hat die Relation „größer als"? Wir stellen die Frage nach Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

1. Ist ‚x' größer als es selber? Das kann nicht sein, also haben wir es mit Irreflexivität zu tun.
2. Wenn ‚x' größer ist als ‚y', ist ‚y' dann größer als ‚x'? Gewiß nicht; folglich handelt es sich um Asymmetrie.
3. Wenn ‚x' größer als ‚y' ist und ‚y' größer als ‚z', ist dann ‚x'

größer als ‚z'? Ja, und deshalb haben wir es mit der Transitivität zu tun. So können wir zusammenfassen:

„größer als" ist – irreflexiv
– asymmetrisch
– transitiv

Die Analyse bleibt unbeeinflußt davon, ob „größer als" im Sinn eines arithmetischen Zahlenvergleichs aufgefaßt wird, als Körpermaß oder gar als moralische Qualifikation.

Beispiel 2

„gleichgroß wie"

1. ‚x' ist gleichgroß wie es selber, also reflexiv.
2. Wenn ‚x' gleichgroß ist wie ‚y', dann ist auch ‚y' gleichgroß wie ‚x', also haben wir eine symmetrische Relation vor uns.
3. Wenn ‚x' gleichgroß ist wie ‚y' und ‚y' gleichgroß wie ‚z', dann ist auch ‚x' gleichgroß wie ‚z', folglich ist die Relation transitiv. Das führt uns zu folgendem Resultat:

„gleichgroß wie" ist – reflexiv
– symmetrisch
– transitiv

Beim Beispiel 2 handelt es sich um eine r(eflexive), s(ymmetrische), t(ransitive) Relation, die auch RST-Relation oder Äquivalenzrelation genannt wird.

Übung 5.7

1) Geben Sie die Eigenschaften der folgenden Relationen an:

1. x wohnt auf der gleichen Meereshöhe wie y
2. x hat dasselbe Einkommen wie y
3. x grüßt y
4. x liegt über y
5. x sorgt für y
6. x ist früher als y
7. x ist niedriger als y
8. x ist links von y
9. x ist Bruder von y

10. x ist Geschwister von y
11. x steht senkrecht auf y
12. x ist parallel zu y
13. x schneidet y (Alltag und Geometrie)
14. x ist spiegelbildlich zu y

2) Zeichnen Sie mit Pfeilen die Relation „Schwester von“ unter den Geschwistern:

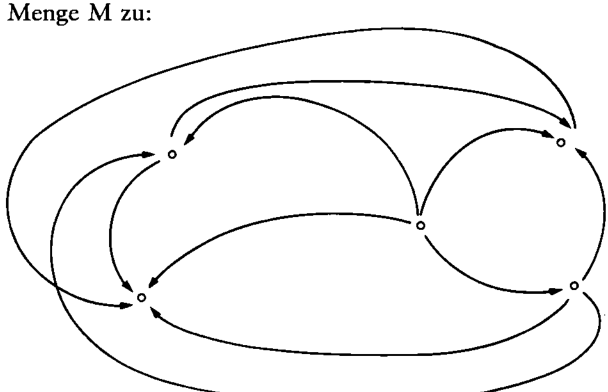
1. Alice, Brigitte, Claudia
2. Alice, Brigitte, Franz
3. Alice, Franz, Gustav
4. Franz, Gustav, Hans

3) Zählen Sie die Eigenschaften der folgenden drei Relationen auf und stellen Sie sie in Pfeildiagrammen dar:

1. Tochter
2. Enkel
3. Der Hund beißt den Briefträger

4) 1. Zeichnen Sie das Pfeildiagramm einer RST-Relation

2. Die Menge M sei: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dazu ist die Relation Gab gegeben, die bedeutet: größer als. Sie ist in Pfeilform dargestellt, so daß ein Pfeil von a nach b führt, wenn a größer als b ist. Ordnen Sie den einzelnen Punkten die entsprechenden Elemente der Menge M zu:



5) „Zuvor müssen wir uns aber über den Begriff *Relation* noch besser verständigen, weil sein Geltungsbereich von vielen Logistikern über Gebühr und ohne hinreichenden inneren Grund eingeschränkt wird. ... Relation ... deckt sich im Grunde mit dem stoischen augustinischen Ausdruck der Nachbarschaft. ... Es ist der weiteste Begriff, den wir dem Wort Relation zu Grunde legen". (E. W. Platzeck, Von der Analogie zum Syllogismus (Paderborn 1954) 34).

1. Analysieren Sie die Relation Nachbarschaft.
2. Handelt es sich bei „Nachbarschaft" um einen weiten Begriff?

6) „a) Wenn zwei Dinge einem Dritten gleich sind, dann sind sie es auch unter sich. b) Wenn zwei Dinge einem Dritten nicht gleich sind, dann sind sie auch unter sich nicht gleich". (R. Descartes, Règles pour la direction de l'esprit. Regle XII).

1. Ist b) die Negation von a)?
2. Bestimmen Sie die Relationseigenschaften von a) und b)
3. Was wird von b) gegenüber a) verneint?
4. Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Behauptung b).

7) „Es ist klar, daß Formeln wie die folgende

$$\begin{array}{ll} & A > B \\ & B > C \\ \text{also} & A > C \end{array}$$

keinen wirklichen Syllogismus darstellen, denn der Syllogismus

B ist größer als C,
nun ist A größer als B,
also ist A größer als C

wäre unkorrekt und nur zufällig wahr aufgrund der Einsetzungen (en raison de la matière), da der Mittelterm im Ober- und Untersatz nicht derselbe ist („B" im einen Fall, „größer als B" im andern)." (J. Maritain, Eléments de Philosophie. II L'ordre des concepts. 1. Petite Logique (Logique formelle) (Paris ^{15}1946) 297).

1. Liegt ein Syllogismus vor?
2. Stimmen Sie der Behauptung vom unterschiedlichen Mittelterm zu?

3. Welche Einsetzungen sieht der Autor für A, B, C vor?
4. Wie kommt Maritain auf den Gedanken, das Beispiel sei nur zufällig wahr und von den Einsetzungen abhängig?

8) „... in der Alltagssprache, ist der praktische Gebrauch der Relation ‚ist größer als' anstelle der Kopula nur legitim, weil ein derartiger Pseudo-Syllogismus (...) die folgenden Syllogismen impliziert oder voraussetzt, die wirkliche Syllogismen sind und nach denen leicht zu schließen ist:

1. Alles größer als größer als C ist größer als C.
   Nun ist B größer als C,
   also alles größer als B ist größer als C.
2. Alles größer als B ist größer als C.
   Nun ist A größer als B,
   Also ist A größer als C.

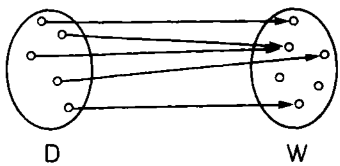
Das sind zwei völlig einwandfreie Syllogismen, wobei der 1. ein indirekter Syllogismus ist. Es ist immer möglich, einen indirekten Syllogismus in einen direkten umzuwandeln." (Maritain, ebd. 198).

1. Was ist von der Formulierung der jeweils ersten Prämisse zu halten?
2. Sind die Syllogismen einwandfrei?
3. Was will der Autor formal und inhaltlich sagen?
4. In welchem Verhältnis steht das Beispiel 8) zu 7)?

5.8 Der Funktionsbegriff

Wir sind jetzt in der Lage, einen sehr wichtigen Begriff exakt fassen zu können, nämlich den Begriff der Funktion. Häufig wird Funktion als synonym mit „Aufgabe", „Pflicht" usw. gebraucht, etwa im Zusammenhang „Die Funktion des Richters ist die Rechtssprechung". Die Mathematik hat für ihren Gebrauch genau definiert, was unter Funktion verstanden werden soll. Es ist ein Begriff von hohem Abstraktionsgrad und deshalb häufig anwendbar außerhalb der Mathematik.

Funktion ist eine bestimmte Relation. Zur Erläuterung gehen wir von zwei Mengen aus, dem Definitionsbereich (D) und dem Wertebereich (W). Eine Funktion liegt genau dann vor, wenn jedes Element aus dem Definitionsbereich D die Relation R zu höchstens einem Element der Menge W hat. Was das bedeutet, läßt sich aus der Zeichnung ablesen:



Eine genauere Definition lautet so:

1. $a \in D$
   $b \in W$
2. Zu jedem Element $a \in D$ gibt es genau ein Paar (a, b).

In der Pfeildarstellung zeigt sich eine Funktion daran, daß von jedem Element von D genau ein Pfeil ausgeht. Man nennt die Funktion nacheindeutige Relation.

Beispiele von Funktionen:

Mathematik: Quadratwurzel sein von
Alltag: Zum Vater haben

Übung 5.8

1) Besteht eine Funktion zwischen den Studenten, die um 9 Uhr morgens die Vorlesung besuchen und ihrer Schuhgröße?
2) Erklären sie den Satz von Wittgenstein: „Die Aussagenlogik ist eine Funktion der Wahrheit“.

5.9 Verknüpfung von Relationen

Relationen können miteinander verkettet werden. Anhand der zwei wichtigsten Verknüpfungen aus dem Alltag, nämlich den

Relationspotenzen und den Relationsprodukten, wollen wir sehen, was darunter zu verstehen ist.

5.9.1 Relationspotenz

Eine Relation, die aus zwei gleichen Relationen besteht, nennen wir Relationspotenz. Solche Relationspotenzen sind etwa „Lehrer des Lehrers von", „Nachbar des Nachbarn von" usw. Wir benutzen die Symbolik aus der Arithmetik und schreiben „L^2" oder „N^2". Entsprechend müßte eine einfache Relation, etwa „Vater von" als „V^1" gedacht werden, wobei die Einerpotenz nach dem Vorbild der Mathematik nicht geschrieben wird.

Die Analogie läßt sich ins Gebiet der negativen Exponenten fortsetzen. Mit „R^{-1}" bezeichnen wir die Konverse oder Inverse von „R", d.h. diejenige Relation, die in allen R-Paaren gilt, aber in umgekehrter Reihenfolge der Glieder. Gilt „Rab", so auch „R^{-1}ba", und umgekehrt. Dem Übergang zur inversen Relation entspricht im Pfeilbild die Umkehrung aller Pfeilrichtungen.

Beispiele zu Relationspotenzen:

> Großvater, Freund des Freundes, Schwester der Schwester usw.
> Die Konverse ist uns aus der Mathematik bekannt: Wenn $7 > 4$, dann gilt auch $4 < 7$.

Die Relation Elter ist die Konverse der Relation Kind und umgekehrt. Die Konverse der Relation Enkel ist Großvater (-mutter) und umgekehrt. Die Konverse der Relation Quadrat ist die Quadratwurzel.
Seit dem Mittelalter wird in der theologischen Literatur die Relation Vaterschaft und Sohnschaft diskutiert. „Vaterschaft" ist ein sogenannter Platonismus, eine platonische Ausdrucksweise für „a ist Vater von b". Diese Relation können wir analysieren, sie ist

- irreflexiv
- asymmetrisch
- intransitiv

Es fällt auf, daß Vater und Sohn die gleichen Relationseigenschaften besitzen. Aus der Pfeildarstellung läßt sich die eine Relation als Konverse zur andern erkennen.

Übung 5.9.1

Der Schluß

B ist größer als C
A ist größer als B
also ist A größer als C

hat im Ober- und Untersatz nicht die gleichen Terme, nämlich „B" im einen, „größer als B" im andern Fall (Vgl. J. Maritain, 297. wörtlich: Beispiel 8), Übung 5.7).

1. In welchen Kategorien analysiert der Autor diesen Schluß?
2. Warum ist eine solche Analyse wertlos?

5.9.2 Relationsprodukt

Unter einem Relationsprodukt (oder Verkettung) zweier Relationen R und S, bezeichnet mit R/S, versteht man diejenige Relation, die dann und nur dann zwischen x und y besteht, wenn es ein z gibt derart, daß x zu z die Relation R und z zu y die Relation S hat.

(R/S) ab heißt: „a ist ein R von einem S von b".

(R/S) xy ist definiert:

$$(\exists z)\ (Rxz \wedge Szy)$$

Auf Relationsprodukte treffen wir im Alltag häufig. Beispiele dafür sind „ein Sohn von einem Bruder", „größer als die Hälfte von", „der Mieter eines Hauses von" usw. Auf ein solches Beispiel soll näher eingegangen werden:

„Gatte einer Tochter von".

Es gibt eine Relation G/T, wenn es ein z gibt derart, daß x der Gatte von z und z die Tochter von y ist. Wählen wir für x und y Konstanten:

j: Josef
a: Anna

Dann lautet der Ausdruck:

$$(G/T)\,ja = \text{Josef ist der Gatte einer Tochter von Anna}$$

Die Umgangssprache liebt es, für komplizierte und sich häufig wiederholende Ereignisse einfache Namen zu wählen. Statt „Gatte einer Tochter von" sagt man „Schwiegersohn". Deshalb lesen wir üblicherweise:

$$(G/T)\,ja = \text{Josef ist der Schwiegersohn von Anna}$$

Im allgemeinen ist das Relationsprodukt nicht kommutativ, es gilt also meistens: $R/S \neq S/R$. Wenn a ein Freund eines Lehrers von b ist, dann ist b eher selten ein Lehrer eines Freundes von a.

Übung 5.9.2

1. Alle Kinder meines Vaters sind meine Geschwister.
2. Alle Söhne und Töchter von Mathias sind Kinder meines Vaters.
3. Mathias ist mein Vater.
4. Also sind die Töchter von Mathias meine Schwestern.
   1. Führen Sie das benutzte Vokabular an.
   2. Zeigen Sie die Gültigkeit des Schlusses.
   3. Was fällt Ihnen am Schluß auf?

5.10 Deduktion einfacher Relationen

Schlüsse mit Relationen enthalten beinahe regelmäßig enthymematische Prämissen. Als Enthymeme, das heißt nichtausgesprochene Prämissen, sind nur Behauptungen zulässig, mit denen man allgemein einverstanden ist, also etwa „wenn etwas schwerer ist als ein anderer Gegenstand, dann sind die beiden nicht gleich schwer", „Wasser ist naß", „Blumen sind Pflanzen" usw.

Beispiel

1. Monika ist jünger als Judith
2. Stephan ist älter als Monika
3. Also ist Monika jünger als Stephan

1.	Jmj	
2.	Asm	/∴ Jms
3.	$(\forall x)\ (\forall y)\ (Axy \leftrightarrow Jyx)$	Zusatzprämisse
4.	$(\forall y)\ (Asy \leftrightarrow Jys)$	3, $-\forall$
5.	$Asm \leftrightarrow Jms$	4, $-\forall$
6.	$(Asm \rightarrow Jms) \wedge (Jms \rightarrow Asm)$	5, Äquiv.
7.	$Asm \rightarrow Jms$	6a, Simpl.
8.	Jms	2, 7, MP

Ohne die Prämisse 3. ist die Deduktion nicht ausführbar. Es handelt sich dabei um eine von niemand angezweifelte Prämisse: Wenn der erste älter ist als der zweite, dann ist der zweite jünger als der erste. Selbstverständlich muß eine derartige Prämisse nicht ausgelöst werden, weil es sich nicht um eine konditionale Prämisse handelt. Somit verlangt eine korrekte Deduktion nicht nur eine intuitive Treffsicherheit in der Wahl der Regeln, sondern auch noch den sichern Blick für das Auffinden der verschwiegenen Prämissen.

Übung 5.10

1)
1. Albert verdient gleich viel wie Bernhard und Bernhard gleich viel wie Cäsar.
2. Also verdient Albert gleich viel wie Cäsar.

2)
1. Alle Rolls Royce sind teurer als irgend ein Auto.
2. Einige Citroëns sind teurer als jeder Volkswagen.
3. Also sind alle Rolls Royce teurer als jeder Volkswagen.

6. Modallogik

Die Modallogik stellt eine Erweiterung dar, jedoch in einem tiefgreifenderen Sinn als etwa die Prädikatenlogik eine Erweiterung der Aussagenlogik ist. Auf der Ebene der Symbolisierung betrachtet, kommen bloß einige neue Funktoren hinzu und die entsprechenden Regeln. Inhaltlich liegt jedoch der folgenschwere Unterschied in der Tatsache, daß die Modallogik nicht mehr wahrheitsfunktional ist.

Das besagt, daß in den bisher behandelten Gebieten die Kenntnis der Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen genügt, um die Wahrheit einer Aussagenverknüpfung zu bestimmen. So belehren uns beispielsweise die Historiker, der Satz „Henri Dunant hat das Rote Kreuz gegründet" sei wahr. Formal mag diese Aussage mit ‚D' symbolisiert werden. Wenn ich nun weiß, daß ‚D' wahr ist, dann darf ich behaupten. ‚$D \vee X$' sei ebenfalls wahr – welche Aussage auch immer ‚X' darstellen mag –, ferner ‚$\neg D$' sei falsch usw. Diese Voraussetzung erlaubt auch die Konstruktion von Tautologien, wo nur die logischen Ausdrücke wesentlich vorkommen und die deskriptiven unwesentlich sind.

Philosophen halten manchmal auch noch andere Ausdrücke für wichtig, wie „möglich", „notwendig" usw. Das führt zur Modallogik. Eine geänderte Lage gegenüber der bisherigen Logik zeigt sich darin, daß der Satz „$7 = 7$" nicht nur wahr, sondern darüber hinaus notwendig wahr ist. Wie wir gesehen haben ist der Satz ‚D' gleichfalls wahr, doch notwendig ist er durchaus nicht; es hätte etwa ein Stoiker den Gedanken der humanen Behandlung von Kriegsverletzten vorwegnehmen können, wobei er in der Zeit vor Christus und als Nicht-Schweizer vielleicht eine rote Palme als Fahne ausgesucht hätte. Die damit höchst wahrscheinlich verbundene Namensänderung läßt die Tatsache unberührt, daß die Notwendigkeit nicht von der Wahrheit des Satzes allein abhängt, sondern im weiteren Sinn von der Bedeutung. Ist also der Wahrheitswert von Aussagen bestimmt, dann sind die Wahrheitswerte der Verknüpfungen dieser Aussagen eindeutig festgelegt; über die

Notwendigkeit ist indessen nichts vorentschieden, so daß wir zu einer Vielfalt von Systemen gelangen, die sich in der Stärke der zu beweisenden Theoreme unterscheiden. Damit geraten wir von der formalen Logik in die philosophische Logik. Die strenge Analogie mit der Aussagenlogik, die ein eindeutiges, fest umrissenes, abgeschlossenes System darstellt, ist durchbrochen. Der Status der Modallogik mit ihren vielfältigen Systemen im Verhältnis zur klassischen Logik ist vergleichbar mit den nichteuklidischen Geometrien und dem Euklidsystem.

Wir schalten uns hier in ein Gebiet ein, das noch im Stadium der Entwicklung begriffen ist. Immerhin ist die Modallogik der Aussagen unbestritten. Bis Anfang der 60er Jahre unseres Jahrhunderts hat der heftigste Gegner der modallogischen Prädikatenlogik, Willard van Orman Quine, eine große Zahl Philosophen hinter sich vereinigen können. Doch mit den semantischen Deutungen von Hintikka, Kanger, Kripke, Montague haben diese Einwände ihre Überzeugungskraft eingebüßt.

6.1 Allgemeine Begriffe

Unter Modalitäten versteht man Ausdrücke wie „notwendig“, „möglich“ usw. Sie haben Ähnlichkeit mit den Wahrheitswertfunktoren und stimmen mindestens in der Hinsicht gegenseitiger Definierbarkeit überein nach dem Muster wie die Funktoren „$\wedge$“, „$\rightarrow$“, „$\leftrightarrow$“ usw. durch Disjunktion und Negation darstellbar sind.

In der Modallogik legen wir den Möglichkeitsbegriff zugrunde. Er wird einer Aussage vorangestellt und gibt ihr dann die entsprechende Modalität.

Beispiel:

Augustinus war ein Philosoph
Es ist möglich, daß (Augustinus war ein Philosoph)

Es ist unwesentlich, daß in korrektem Deutsch die Worte innerhalb der Klammer leicht umzustellen sind. Wir wollen für die

Möglichkeit den Funktor „$\Diamond$" einführen. Entsprechend formalisieren wir die beiden Aussagen:

A	Augustinus war ein Philosoph
$\Diamond$ A	Es ist möglich, daß Augustinus ein Philosoph war

Da wir das Gesetz der doppelten Negation weiterhin aufrechterhalten wollen, gibt es nur die folgenden vier Kombinationsmöglichkeiten mit der Negation:

$\Diamond$ A	Es ist möglich, daß Augustinus ein Philosoph war
$\Diamond\neg$ A	Es ist möglich, daß Augustinus kein Philosoph war
$\neg\Diamond$ A	Es ist nicht möglich, daß Augustinus ein Philosoph war
$\neg\Diamond\neg$ A	Es ist nicht möglich, daß Augustinus nicht ein Philosoph war

Der letztgenannte Ausdruck ist gleichbedeutend mit: „Es ist notwendig, daß Augustinus ein Philosoph war". Diese Einsicht erlaubt uns, aufgrund der Möglichkeitsdefinition einen Notwendigkeitsoperator einzuführen. Als symbolisches Zeichen wählen wir: $\Box$. Wie beim Möglichkeitsoperator, so erlaubt auch hier die unterschiedliche Stellung der Negation vier verschiedene Bedeutungen anzuzeigen. Das Verhältnis der beiden Funktoren zueinander ist so definiert:

$$\Box p =_{df} \neg\Diamond\neg p$$

Die beiden sind also äquivalent:

(1) $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$ (Mod.)

Wir ersetzen in (1) ‚p' durch ‚$\neg$ p', also p/$\neg$ p und erhalten:

$$\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\neg p$$

Da sich die doppelte Negation aufhebt, folgt:

(2) $\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond p$

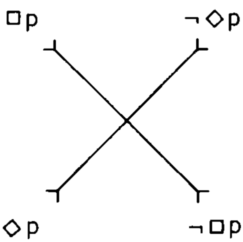
Nach der genannten Definition ist $\neg\Diamond\neg$ jederzeit ersetzbar durch $\Box$, so daß auch gilt:

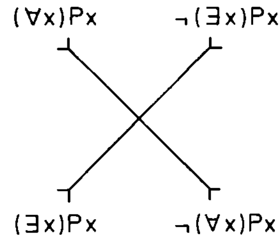
(3) $\neg \Box \neg p \leftrightarrow \Diamond p$

Das Verhältnis zwischen Modaloperatoren und Negationen läßt sich mit All- und Existenzoperator und ihren Verneinungen in Parallele setzen, weil die Beziehungen bis in Einzelheiten vergleichbar sind. Der Quantorenaustausch ist wie der Austausch der Modaloperatoren eine echte Substitution.

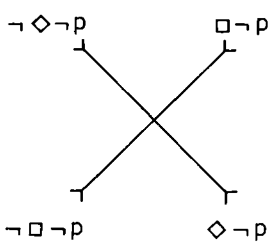
$$(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$$
$$\neg\ (\exists x) \neg\ (Px \rightarrow Qx) \qquad (\forall x) / \neg\ (\exists x) \neg$$

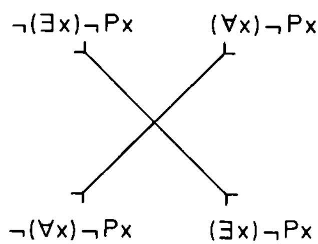
Entsprechend läßt sich das logische Quadrat weiterhin als Paradigma verwenden:





Die Beziehungen des Quadrats bleiben gewahrt, wenn $(\forall x)$ Px durch $\neg\ (\exists x) \neg$ und $\Box$ durch $\neg \Diamond \neg$ ersetzt werden.





6.1.1 Zur Definition der Modaloperatoren

Negation, Konjunktion und Disjunktion werden wie bisher verwendet, hingegen erfährt die Implikation und in ihrem Gefolge dann auch die Äquivalenz eine Veränderung. Die bisher benutzte

Implikation heißt nicht sonderlich glücklich materiale Implikation. Weniger mißverständlich ließe sie sich nach dem Erfinder *Philonische Implikation* nennen, ein Name, der sich leider nicht durchgesetzt hat. Wichtiger für uns ist im Augenblick zu wissen, daß diese Implikation seit der Antike als irritierend empfunden wurde, weil sich daraus die sogenannten Paradoxa der Implikation ergeben. Sie treten auf, sobald eine Aussage als wahr oder falsch bekannt ist.

Beispiel:

- ‚p' sei falsch. Dann ist jede Aussage ‚$p \rightarrow q$' wahr, was immer ‚q' an Wert annehmen mag.
- ‚p' sei wahr. Dann ist jede Aussage ‚$q \rightarrow p$' wahr, welchen Wert auch immer ‚q' annehmen mag.
- Und schließlich, wenn von zwei Aussagen ‚p' und ‚q' beide Werte als falsch oder als wahr bekannt sind, dann ist ‚$p \rightarrow q$', ‚$q \rightarrow p$' und folglich auch ‚$p \leftrightarrow q$' wahr.

Die Philonische Implikation schien Lewis zu schwach. Er suchte nach einem Wenn-dann-Funktor, der eine logische Verknüpfung zwischen Vorder- und Nachsatz ausdrückt. Die logische Verbindung wollte er als notwendige Verknüpfung verstehen. Mit Modaloperatoren läßt sich diese *logische Implikation* oder wie er sie nannte, diese *strikte Implikation* ausdrücken. Sie ist konstruierbar, indem wir der materialen Implikation den Notwendigkeitsoperator voranstellen, also: $\Box(p \rightarrow q)$

Die strikte Implikation ist so definiert:

$$p \Rightarrow q =_{df} \Box(p \rightarrow q)$$

was sich mit dem Möglichkeitsoperator so darstellen läßt:

1. $p \Rightarrow q$
2. $\Box(p \rightarrow q)$
3. $\Box\neg(p \wedge \neg q)$ 2, De M.
4. $\neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ 3, $\Box\neg/\neg\Diamond$

Daher gilt auch

$$p \Rightarrow q =_{df} \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$$

Mit diesen Definitionen halten wir uns im Bereich des Alltagsverstandes auf. Und dennoch gibt es in diesem einfachen Rahmen eine Verknüpfung, die häufig fehlerhaft gedeutet wird.

Es soll beachtet werden, daß $\Box(p \rightarrow q)$ nicht gleichwertig ist mit $p \rightarrow \Box q$. In der Umgangssprache werden häufig irreführende Wendungen benutzt wie „Wenn p, dann muß es der Fall sein, daß q". Was der Sprecher tatsächlich sagen will oder wozu er einzig berechtigt ist, das ist $\Box(p \rightarrow q)$.

> Wenn ein Auto den Vortritt hat, dann hat ihn notwendigerweise der Stadtbus.

Damit will man sagen, daß „Der Stadtbus hat den Vortritt" folgt notwendig aus „Autos haben den Vortritt". Das mag sinnvoll sein, aber eine Notwendigkeit liegt darin keineswegs, denn die Verkehrsgesetze lassen sich jederzeit abändern. Das Mittelalter hat deshalb eindringlich gewarnt: Verwechsle nicht $p \rightarrow \Box q$ (necessitas consequentis) mit $\Box(p \rightarrow q)$ (necessitas consequentiae).

Übung 6.1.1

1) Wenn Marius am 1. August in Spanien ist, dann ist er notwendigerweise am Tag der Bundesfeier im Ausland.

Formalisieren Sie diese Aussagenverknüpfung.

2) a) Aus dem Vorauswissen Gottes, das unabänderlich ist, „kann man nicht schließen, unsere Akte seien mit der absoluten Notwendigkeit notwendig, die man die Notwendigkeit des Folgenden (necessitas consequentis) nennt; sondern mit bedingter Notwendigkeit, die Folgenotwendigkeit (necessitas consequentiae) heißt (Boethius, Trost der Philos.)." Thomas, De Ver. q. 24, a. 1, ad 13. Des hl. Thomas v. Aquin Untersuchung über die Wahrheit. In deutscher Übertragung von Edith Stein (Breslau 1932–34) 2, 285.

b) „Die aristotelische Unterscheidung zwischen absoluter Notwendigkeit (oder antezedenter) und bedingter (oder konsequenter) Notwendigkeit erscheint explizit im Innersten der Theologie selbst." J. Isaac, Le Peri Hermeneias en Occident de Boèce à Saint Thomas (Paris 1953) 48.

1. Worin besteht der Unterschied zwischen Notwendigkeit des Folgenden und Folgenotwendigkeit im Text a)?
2. Ist die Terminologie von Text b) mit antezedenter und konsequenter Notwendigkeit vorzuziehen, und wie stehen die beiden Texte zueinander?
3. Gibt es nach Thomas einen greifbaren Unterschied zwischen den beiden Notwendigkeiten, und steht ihm die Formulierung von a) oder b) näher?

Wie beurteilen Sie die folgenden Aussagen 3) und 4)?

3) „Die Modalität betrifft die Kopula." W. Brugger, Die Modalität einfacher Aussagenverbindungen. Scholastik 17 (1942) 218.

4) „Die hypothetischen Aussagen [= Implikationen] tragen alle die Modalität der Notwendigkeit." W. Brugger, Ebd. 220.

6.1.2 Grundregeln

Obwohl die Modaloperatoren nicht streng wahrheitsfunktional sind, müssen einige Wahrheitsbedingungen festgelegt werden. Generell zu beachten sind zunächst die folgenden vier negativ formulierten Bedingungen:

$$\Box p \not\equiv \neg p$$
$$\Box p \not\equiv p$$
$$\Box p \not\equiv (p \vee \neg p)$$
$$\Box p \not\equiv (p \wedge \neg p)$$

Dagegen sind folgende drei Prinzipien intuitiv gültig und offensichtlich auch annehmbar:

1) 1.1 $\dfrac{\Box p}{p}$ NE (A necesse ad esse valet consequentia)

1.2 $\dfrac{p}{\Diamond p}$ EP (Ab esse ad posse valet consequentia)

Die beiden Prinzipien 1.1 und 1.2 gehen auf Aristoteles zurück und haben ihre lateinischen Namen im Mittelalter erhalten. Das erste heißt auch Notwendigkeitsaxiom, das zweite Möglichkeitsaxiom.

2) Weiter scheint annehmbar, daß jede wahre Aussage nicht bloß wahr, sondern notwendig wahr ist. Wenn ‚p' eine wahre Formel ist, dann ist nicht nur jede Aussage wahr, die die Form ‚p' hat, sondern auch jede Aussage, die die Form ‚$\Box$ p' hat. Also wenn ‚p' wahr ist, dann auch ‚$\Box$ p'.

3) Was aus einer notwendigen Wahrheit folgt, ist selbst notwendig. Also

$$\Box p \wedge (p \Rightarrow q) \rightarrow \Box q$$

oder wie üblicherweise geschrieben wird:

$$[\Box p \wedge \Box (p \rightarrow q)] \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

In allen Systemen bleiben 1) und 2) unverändert. Doch an die Stelle von 3) hätten wir eine andere Formel setzen können. Das würde zu einem geänderten System führen.

Bevor wir diesen Gedanken weiterverfolgen, sei eine Zwischenbemerkung über einen Begriff eingefügt, der von den Modalbegriffen nicht zu trennen ist und in der philosophischen Tradition bis heute eine große Rolle spielt: die Kontingenz.

Übung 6.1.2

1) „Wenn etwas notwendig ist, dann ist es auch möglich, aber das Gegenteil gilt nicht." Aristoteles, Hermeneutik 22b 10.

1. Zeigen Sie, daß aus dem Notwendigen das Mögliche folgt.
2. Zeigen Sie, daß das Gegenteil unerlaubt ist.

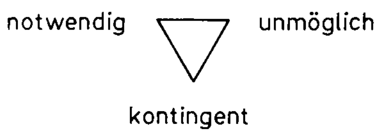
2) „Aus dem Notwendigen folgt nur das Notwendige". R. Jolivet, Traité de Philosophie (Paris 1949) 102.

1. Was halten Sie von diesem grundlegenden Satz?
2. Welche Konsequenzen ergeben sich?

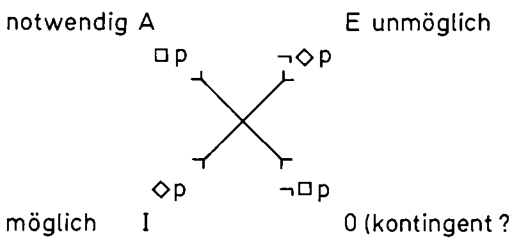
6.1.3 Zum Kontingenzbegriff

Aristoteles zögert zunächst bei der Wahl des Grundfunktors, entschließt sich dann aber doch für den Möglichkeitsbegriff. Mit welchen Schwierigkeiten er dabei zu kämpfen hat, das läßt sich schematisch darstellen.

In den *Analytica Priora* legt Aristoteles sinngemäß einen Kontingenzbegriff zugrunde, der sich in einem Dreieck darstellen läßt:



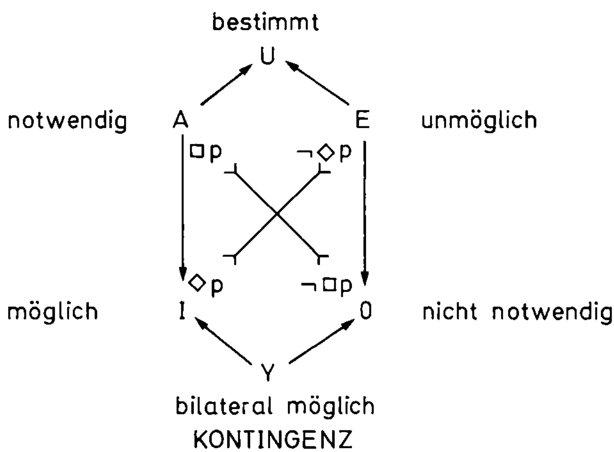
Dabei wird kontingent auf nicht genauer bezeichnete Art in Gegensatz gestellt zu Notwendigkeit und Unmöglichkeit. Aristoteles' Schüler Theophrast hat es vorgezogen, zur Erklärung das logische Quadrat zu benutzen, worin im die Renaissance und in neuerer Zeit die Neothomisten gefolgt sind.



Häufig wird zweideutig gesagt, kontingent sei das, was möglich sei, manchmal auch, unter Kontingenz sei das zu verstehen, was nicht notwendig sei. Am logischen Quadrat lesen wir ab, daß die beiden Begriffe *möglich* und *nicht notwendig* durchaus nicht identisch sind, sondern im subkonträren Gegensatz stehen.

Tatsächlich haben die Lateiner unterschieden zwischen possibile und contingens. Wahrscheinlich mit der Absolutsetzung der aristotelischen Logik seit der Renaissance dürfte das Logische Quadrat seinen Platz als eine Art Naturkonstante erobert haben. Daraus hat sich die unsorgfältige Redeweise verbreitet, das kontradiktorische Gegenteil zu notwendig sei als Kontingenz zu verstehen. Damit wäre zwar eine hinreichende Abgrenzung eingeleitet zwischen dem Möglichkeits- und Kontingenzbegriff. Doch die Schwankung im Kontingenzbegriff wird ersichtlich, sobald wir auf die vorherige Definition zurückgehen, wonach das Kontingente das ist, was sein kann aber auch nicht sein kann. Ist das nun gleichbedeutend mit *möglich* oder mit *nicht notwendig*?

Von den Modalitäten her ist eine einleuchtende Lösung denkbar. Statt am Logischen Quadrat lassen sich die gegenseitigen Beziehungen an einem Hexagon darstellen. Das sieht so aus:



Zusätzlich zu den bekannten vier Buchstaben wird an der Spitze ein „U“ hinzugefügt für die Disjunktion zwischen „A“ oder „E“, also zwischen notwendig oder unmöglich. Auf der horizontal spiegelbildlichen Gegenseite zeigt „Y“ die Konjunktion zwischen „I“ und „O“ an, dem zweitseitig Möglichen.

Die hexagonale Zeichnung macht deutlich, daß mit Kontingenz jeweils das bilateral Mögliche gemeint ist. Wenn das Nichtnotwendige als kontingent bezeichnet wird, so ist darunter nur verschwommene Sprache zu erkennen, die in Wirklichkeit eben doch das bilateral Mögliche meint. Für das bilateral Mögliche gibt es zwei Formulierungen:

1) a) möglich, aber
   b) möglicherweise auch nicht: $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$
2) a) nicht unmöglich, aber
   b) auch nicht notwendig: $\neg\neg \Diamond p \wedge \neg \Box p$

Da die Kombinationen 1a + 2b und 1b + 2a nichts wesentlich Neues beitragen, sind die Möglichkeiten erschöpft, gemäß denen die Kontingenz darstellbar ist. Wenn jeweils von kontingent oder nicht notwendig gesprochen wird, so muß der Kontext darüber Auskunft geben, ob damit eine undeutliche Abkürzung für 1) oder 2) gemeint ist oder ob ein schlichter Fehler vorliegt.

Der Möglichkeitsbegriff schließt eine Mehrdeutigkeit ein, je nachdem ob seine Beziehungen zu den übrigen Modalitäten am Dreieck, am logischen Quadrat oder am Hexagon erläutert werden. Beim Kontingenzbegriff liegt der Fall insofern einfacher als höchst bescheidene logische Mittel bereits zu einer brauchbaren Explikation führen. Im Zug weiterer Entwicklungen ist das possibile dem einseitig Möglichen reserviert worden, während das zweiseitig Mögliche als kontingent bezeichnet wird. Das Wesentliche an diesem Kontingenzbegriff liegt darin, daß die Negation einer kontingenten Tatsache nicht mehr kontingent ist, sondern den kontradiktorischen Gegensatz zu „U“ anzeigt.

Übung 6.1.3

1) „Möglich und kontingent besagen dasselbe.“ Thomas von Aquin, De propositionibus modalibus (Vivès 27, 550).

1. Wie beurteilen Sie diese Behauptung?
2. Wie schätzen Sie Thomas von Aquin in der Logik ein?

2) (1) Gott kann nicht wollen, daß die Bejahung und Verneinung gleichzeitig wahr sei. Das ist aber in jeder Unmöglichkeit eingeschlossen, die sich selbst widerspricht, sofern sie also einen Widerspruch einschließt. (2) „Einigen Dingen aber kommt nach

der Weise ihrer Natur zu, daß sie sein und nichtsein können und nicht notwendig sind. *Also will er* [Gott], *daß einige Dinge sein und nichtsein können*" (Thomas von Aquin, Summa contra Gentiles, Kap. 85, Übersetzung von Karl Albert usw. (Darmstadt 1974) 315–317).

1. Wie verhalten sich die Texte (1) und (2) zueinander?
2. Wie beurteilen Sie das Verhältnis, wenn der Kursivtext aus (2) so lautet: Igitur vult aliquas res esse contingentes?
3. Wie würden Sie (2) sinngemäß formulieren?

3) (1) Es gibt Dinge, „von denen es möglich ist, daß sie bestehen, aber auch möglich ist, daß sie nicht bestehen. Dafür ist der Ausdruck ‚kontingent' gebräuchlich." ... (2) „‚Kontingent' heißt zunächst soviel wie nicht notwendig. Das würde auch das Unmögliche umfassen." O. Muck, Philosophische Gotteslehre (Düsseldorf 1983) 130–131.

1. Drücken die beiden Kontingenzdefinitionen dasselbe aus?
2. Welcher Kontingenzbegriff umfaßt das Unmögliche?

4) „Ein Syllogismus in AEA kann nach AAA (Barbara) umgewandelt werden. Gegeben sei der Syllogismus:

– Es ist möglich, daß jeder Logiker (b) unverstanden (a) ist.(A)
– Es ist möglich, daß kein vernünftiger Mensch (c) ein Logiker (b) ist. (E)
– Es ist möglich, daß jeder vernünftige Mensch (c) unverstanden (a) ist. (A)

Würde dieser Syllogismus kategorisch aufgefaßt, dann wäre er unkorrekt. Doch können wir die minor [= 2. Prämisse] umformen dank der Antistrophe, einer Sondereigenschaft kontingenter Aussagen:

– Es ist möglich, daß kein vernünftiger Mensch (c) ein Logiker (b) ist $\Diamond \neg (\exists x)\, ax$

wird zu:

– Es ist möglich, daß jeder vernünftige Mensch (c) ein Logiker (b) ist $\Diamond (\forall x)\, ax$

F. Chenique, Eléments de logique classique (Paris 1975) *2*, 273–4.

1. Formalisieren Sie den Syllogismus
2. Handelt es sich, wenn die Modaloperatoren gestrichen werden, um einen kategorischen Syllogismus des Modus AEA?
3. Auf welche Sondereigenschaften dürfte der Autor bei den kontingenten Aussagen anspielen?
4. Wie rechtfertigen Sie die Umformung von $\Diamond\neg(\exists x)ax$ in $\Diamond(\forall x)ax$?

6.1.4 Wahrheitsmatrizen

Nach welchen Gesichtspunkten dürfen abgeänderte Formeln hinzugefügt und neue Systeme konstruiert werden? Lewis hat dazu brauchbare Beispiele vorgelegt. Er hat eine Reihe von Systemen entwickelt, die unter den Namen S_1 bis S_5 bekannt sind. Vorderhand sei nur bemerkt, daß es noch Zwischensysteme gibt und Systeme, die außerhalb dieses Rahmens stehen. Aus dieser Fülle wählen wir zunächst ein System aus, um anhand von Wahrheitsmatrizen begreiflich zu machen, warum sich dabei nicht eine unbestrittene Lösung aufdrängt. Als Grundlage für diese Diskussion wählen wir das System S_3.

Für die Modallogik gibt es kein Entscheidungsverfahren, wonach sich die Wahrheit nach einer Anzahl endlicher Schritte bestimmen läßt wie bei der Aussagenlogik. Es gibt indessen eine logische Technik, die erlaubt, bestimmte Aussagenverknüpfungen als nicht logische Wahrheiten auszuschließen. Damit sind wir nebenbei auch schon mit der grundsätzlichen Frage konfrontiert, warum es mehrere Modalsysteme gibt. Logikgegner sehen darin bisweilen den Beweis für die sprichwörtliche Veranlagung der Philosophen zum Monolog, was sie daran hindern soll, sich auf ein einziges System zu einigen. In Wirklichkeit steckt dahinter weder ein Mangel an Gesprächsbereitschaft noch an Toleranz, sondern die Tatsache, daß wir bis heute nicht eindeutig wissen, ob es ein einziges System geben wird, mit dem wir die Realität erfassen können. Die besten Systeme, die wir zur Zeit besitzen sind nicht so gut, daß sie alle Qualitäten der übrigen Systeme integriert hätten.

Es lassen sich intuitiv verschieden strenge Modalausdrücke unterscheiden. Schon Leibniz hat aufmerksam gemacht auf den Unterschied zwischen logischer und physischer Notwendigkeit. Zu den logischen Notwendigkeiten gehören logische oder mathematische Gesetze, zu den physischen die Gesetze der Experimentalwissenschaften. Das Verhältnis der beiden läßt sich kurz so andeuten: Was beispielsweise physikalisch notwendig (unmöglich) ist, braucht diese Modalität logisch nicht zu besitzen. Hingegen was logisch notwendig (unmöglich) ist, muß es auch physikalisch sein. 1 dm^3 Gold ist 19,3 kg schwer. Das ist eine physikalische Notwendigkeit, auf die sich die Prüfstelle für die Reinheit des Goldes definitionsmäßig verläßt, indem sie Fälschungen mit der Waage nachweist, ohne den Block in Pulver zu zerreiben. Das Gewicht ist nicht logisch notwendig, denn auf dem Mond wäre es bloß 3,1845 kg. Dagegen ist eine logische Notwendigkeit wie etwa „$2 + 2 = 4$" immer richtig, ob wir uns auf der Erde oder auf dem Mond aufhalten.

In dieser Situation geht man theoretisch vor; es werden Modelle entwickelt mit bestimmten Eigenschaften, zu denen etwa die Widerspruchsfreiheit gehört. Einige Systeme sind besser geeignet, unsere Einstellungen zur Wirklichkeit darzulegen als andere. Deshalb werden sie auch bevorzugt.

Der Begriff der Wahrheitsmatrizen darf hier nur analog verstanden werden. Wir behelfen uns genauer gesagt mit Quasi-Wahrheitstafeln. Die Einschränkung auf Quasi-Tafeln ist deshalb erforderlich, weil sich den Zahlen keine zufriedenstellende Wahrheitswerte zuschreiben lassen. Wir wählen 4 Zahlen, die wir so interpretieren wollen:

1	logisch wahr
2	wahr, aber nicht logisch wahr
3	falsch, aber nicht logisch falsch
4	logisch falsch

Bei dieser 4wertigen Logik könnten wir sagen, 1 oder 2 würden für wahr (1), 3 oder 4 für falsch (0) stehen.

Die Definition der Funktoren zeigt einleuchtend, warum es mehrere Systeme geben kann. Während die Negation eindeutig zu definieren ist, lassen sich für die beiden Modaloperatoren folgende Werte vorschlagen:

p	$\neg$p		$\Diamond$	$\Box$
1	4		1	2
2	3		1	4
3	2		1	4
4	1		3	4

Der Notwendigkeitsoperator ist abhängig vom Möglichkeitsoperator. Deshalb übertragen sich abgeänderte Werte des Möglichkeitsoperators entsprechend auf den Notwendigkeitsoperator. Die folgenden Beispiele mögen andeuten, mit welch differenzierten Werten der Möglichkeitsoperator zu belegen ist:

$\Diamond$p (S_1)	$\Diamond$p (S_3)	$\Diamond$p (S_4)	$\Diamond$p (S_5)
2	1	1	1
2	1	2	1
2	1	1	1
4	3	4	4

Von der Wahl des Modaloperators hängen die Definitionen der strengen Implikation und strengen Äquivalenz ab. Im Anhang 1 wird ausführlicher auf den Aufbau des Systems S_3 eingegangen.

6.1.5 Systematik der Modalsysteme

Die Abweichungen der Systeme lassen sich am besten von der Axiomatik her verstehen. Lewis geht von 10 Axiomen aus:

$$\left.\begin{array}{ll}
A_1 & (p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p) \\
A_2 & (p \wedge q) \Rightarrow p \\
A_3 & p \Rightarrow (p \wedge p) \\
A_4 & ((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \\
A_5 & ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \\
A_6 & p \Rightarrow \Diamond p
\end{array}\right\} S_1$$

$$\begin{array}{ll}
A_7 & \Diamond (p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \\
A_8 & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q) \\
A_9 & \Box p \rightarrow \Box\Box p \\
A_{10} & \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p
\end{array}$$

Die ersten fünf Axiome sind diejenigen des Aussagenkalküls mit strikter Implikation. Sie können ersetzt werden surch jedes beliebig bewährte Axiomensystem, also jenes von Frege, Russell, Hilbert, Curry usw. Fügt man dem Aussagenkalkül A_6 hinzu, so erhalten wir damit das erste Modalsystem S_1. Es ist allerdings unvollständig in dem Sinn, daß sich neue Axiome und Schlußregeln hinzufügen lassen, ohne daß es widersprüchlich wird. Diesen Umstand nutzte Lewis aus, denn die Erweiterung um je eines der vier Axiome $A_7 - A_{10}$ bringt ein neues System hervor und zwar in Richtung auf zunehmende Strenge. Im einzelnen heißt das: Wenn das in S_1 nicht enthaltene und nicht ableitbare Axiom A_7 beigefügt wird, entsteht daraus:

$$S_2: \quad S_1 + \Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p$$

Lewis hat sein System S_2 als das eigentliche System der strikten Implikation angesehen. Aber darin folgen ihm nicht alle Logiker. Analog zu den Paradoxien der materialen Implikationen in der Aussagenlogik treten nämlich in S_2 Paradoxien der strikten Implikation auf, nämlich

$$\neg \Diamond p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \quad \text{und}$$
$$\neg \Diamond p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Viele Logiker halten diese Sätze für falsch und lehnen deswegen das System S_2 ab. – Wenn wir dem S_1 anstelle von A_7 ein anderes Axiom beifügen, nämlich A_8, dann erhalten wir S_3.

$$S_3: \quad S_1 + (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$$

Analog lassen sich S_4 und S_5 konstruieren, die aufgrund von A_9 oder A_{10} zustande kommen. Die fünf S-Systeme sind also folgendermaßen aufgebaut:

$$S_1 = \text{Die 5 Axiome} + A_6$$
$$S_2 = S_1 + A_7$$
$$S_3 = S_1 + A_8$$
$$S_4 = S_1 + A_9$$
$$S_5 = S_1 + A_{10}$$

Es gibt noch zahlreiche Zwischenstufen und Ergänzungen. Beispiele: S0.5 ist schwächer als S_1. Fügt man S_2 das Axiom

$$\Diamond \Diamond p$$

hinzu, so erhalten wir S_6, das unabhängig von S_1–S_5 ist und unverträglich mit S_4 und S_5 usw.

Diese allgemeine Zusammenstellung mag vorderhand genügen. Wir wollen uns einigen Systemen und deren Entscheidung zuwenden.

6.2 Modale Aussagenlogik

Die modale Aussagenlogik geht schon auf Aristoteles zurück. Im Mittelalter ist die Argumentations- und Wissenschaftssprache eingehend analysiert worden, wobei vor allem die modale Aussagenlogik in den Blickpunkt gerückt ist. Die heutige Logik versucht, die Erkenntnisse zusammenzufassen und auf die modale Prädikatenlogik auszudehnen. Sehr viele Probleme der Modalitäten lassen sich aber bereits auf der Grundlage der modalen Aussagenlogik besprechen.

6.2.1 Ein einfaches System

Wir beginnen mit einem einfachen System. Es ist eingeschränkt in einer Weise wie etwa die aristotelische Syllogistik, die nur dann anwendbar ist, wenn genau zwei Prämissen mit je einer Subjekt-Prädikataussage vorliegen, die überdies weiteren Zusatzbedingungen unterworfen sind. Dadurch ist die praktische Anwendbarkeit eher selten eintreffenden Situationen vorbehalten. Unser Hilfssystem ist in dem Sinne eingeschränkt, daß nur Aussagenverknüpfungen zugelassen sind, deren Atomformeln jeweils die gleiche Anzahl der Modaloperatoren enthalten.

Zugelassen	Ausgeschlossen
$\Box p \rightarrow \Diamond p$	$p \rightarrow \Diamond p$
$\Diamond \Diamond (p \rightarrow p)$	$\Box (p \vee \Box p)$

Zur theoretischen Vervollständigung mag noch eine genauere Beschreibung von der Axiomatik her angeschlossen werden. Das einfache System besteht aus folgenden Elementen:

1. aus den 5 Axiomen der klassischen Aussagenlogik in strikter Implikation
2. aus zwei Modalaxiomen

$$\begin{array}{ll} 2.1 & p \rightarrow \Diamond p \\ 2.2 & \Diamond (p \vee q) \rightarrow \Diamond p \vee \Diamond q \end{array}$$

Das Axiom 2.1 ist genau unser Axiom A_6. Hingegen ist 2.2 nicht genau das charakteristische Axiom S_2, denn 2.2 setzt nicht die strenge Äquivalenz voraus. Unser Hilfssystem ist also ein Zwischensystem zwischen S_1 und S_2. Aber das soll uns nicht weiter beschäftigen.

Zur Auswertung empfiehlt sich hier die polnische Schreibweise mit der Streichungstechnik, die wir früher schon benutzt haben. Den Notwendigkeitsoperator schreiben wir mit L, denjenigen der Möglichkeit mit M und die strenge Implikation als C'. Als Definition gelten die unter 6.1.1 und 6.1.2 genannten Beziehungen. Danach sind die beiden Modalfunktoren gegeneinander austauschbar. In der polnischen Notation ist dies übersichtlich:

$$Lp =_{df} \bar{M}\bar{p}$$

Die große Ähnlichkeit der Modaloperatoren mit den Quantoren der Prädikatenlogik wird dazu benutzt, die Streichungsregeln zu übertragen. Der Notwendigkeitsoperator wird durch eine Zahlen- und der Möglichkeitsoperator durch eine Buchstabenkonstante ersetzt.

$$Lp \quad \overset{1}{\cancel{L}}\ p \qquad \text{und} \qquad Mp \quad \overset{a}{\cancel{M}}\ p$$

Auswertung

Unter jede Variable wird zuerst die Konstante Null „0" geschrieben und dann folgt die bereits bekannte Auswertung.

Beispiele:

$$\begin{array}{cccc} L & C & p & q \\ 1 & & & \\ \cancel{L} & \cancel{C} & \bar{p} & q \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} K & M & p & M & q \\ & a & & b & \\ \cancel{K} & \cancel{M} & p & \cancel{M} & q \\ & & 0 & & 0 \\ & & a & & b \end{array}$$

Eine modale Aussagenverknüpfung ist unter den bisher bekannten Bedingungen geschlossen, nämlich genau dann, wenn eine Variable gleichzeitig mit ihrer Negation auftritt.

Beispiele:

$$\begin{array}{lllll} L & C & p & p & \\ 1 & & & & \\ \cancel{L} & \cancel{C} & \bar{p} & p & \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 1 & \\ & 1, & \bar{p} & p & \text{geschlossen} \\ & & 0 & 0 & \\ & & 1 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll} M & M & C & p & p & & & & & \\ a & b & & & & & & & & \\ \cancel{M} & \cancel{M} & \cancel{C} & \bar{p} & p & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & a & a & \quad a, b, & \bar{p} & p & \text{geschlossen} \\ & & & b & b & & 0 & 0 & \\ & & & & & & a & a & \\ & & & & & & b & b & \end{array}$$

Übung 6.2.1

1) L C K p $\bar{p}$ q
2) C L q L C p q
3) C L p M p
4) C A M p q A M p M q
5) C K L p L q M K p q
6) C K L C $\bar{p}$ q L C p $\bar{q}$ $\bar{M}$ p

Dieses System gilt als schwach. Wir wenden uns einem stärkeren zu, dem System T.

6.2.2 Das System T

Das System T enthält folgende Elemente:

1. Die Axiome des Aussagenkalküls

2. Die Definitionen von $\Box$, $\Diamond$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$
3. Die zwei zusätzlichen Axiome

$\Box\, p \rightarrow p$ Notwendigkeitsaxiom

$\Box\,(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box\, p \rightarrow \Box\, q)$

4. Die Notwendigkeitsregel:
   Wenn p eine wahre Aussage ist, dann auch $\Box\, p$

Das System T legt keine Beschränkungen auf in der Anzahl der zugelassenen Modaloperatoren. Deshalb gilt etwa die im Hilfssystem ausgeschlossene Formel

$p \rightarrow \Diamond p$ C p M p

geradezu als charakteristisch für T.

S_1 enthält fast die ganze Basis von T. S_2 ist noch stärker als S_1, aber immer noch nicht so stark wie T. T ist deshalb mit S_2 zu vergleichen. Es enthält S_2, ist aber selber nicht in S_2 enthalten. T enthält jedoch S_3 nicht mehr.

Da unser einfaches System in T enthalten ist, sind alle Theoreme dieses Systems auch T-gültig. Es gibt aber T-gültige Formeln, die im einfacheren System nicht als gültig nachweisbar sind. Bevor wir genauer darauf eingehen, soll anhand von einigen Beispielen gezeigt werden, wie zur Entscheidung Wahrheitstafeln und Deduktion eingesetzt werden können.

Wir wählen die Technik der teilweisen Wahrheitstafeln mit nur zwei Wahrheitswerten wahr–falsch. Dabei wird die Formel als falsch angenommen. Stellt sich infolge der Zuordnung der Werte ein Widerspruch ein, so ist damit die Annahme als ungerechtfertigt nachgewiesen.

Als Ergänzung zur Aussagenlogik verlangt die Modallogik eine zusätzliche Anweisung, wie mit $\Box$ und $\Diamond$ umzugehen ist. Es soll gelten: Wenn ‚p' wahr ist, dann muß erst recht ‚$\Diamond$ p' wahr sein. Entsprechend müssen wir ‚p' den Wert „1" zuschreiben, wenn ‚$\Box$ p' den Wert „1" hat. Es wird also genau bestimmt:

wenn $\Box\, p$ (1), dann auch p (1)

wenn p (1), dann auch $\Diamond p$ (1).

Wird unter diesen Voraussetzungen ein Widerspruch aufgezeigt, so ist damit die T-Gültigkeit bewiesen.

1) Wir zeigen, daß $\Box p \rightarrow p$ richtig ist

$$\begin{array}{lcccc} 1. & \Box & p & \rightarrow & p \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & & \end{array}$$

2) Ist die Formel $\Box \neg p \rightarrow (p \Rightarrow q)$ gültig?

$$\begin{array}{lcccccccc} 2. & \Box & \neg & p & \rightarrow & \Box & (p & \rightarrow & q) \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & & & & & \end{array}$$

Übung 6.2.2

Beweisen Sie a) mit Wahrheitstafeln, b) in polnischer Notation:

1) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box (p \vee q)$
2) $\Diamond p \rightarrow [\Box (p \rightarrow q) \wedge \Box (p \rightarrow \neg q)]$
3) $[\Box p \wedge \Box (p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow \Box (q \rightarrow r)$

3) Wir beweisen, daß aus $\Box p \rightarrow p$ folgt: $p \rightarrow \Diamond p$

1. $\Box p \rightarrow p$	Pr.
2. $\Box \neg p \rightarrow \neg p$	1, $p/\neg p$
3. $\neg \neg p \rightarrow \neg \Box \neg p$	2, Kontr.
4. $p \rightarrow \neg \Box \neg p$	3, DN
5. $p \rightarrow \Diamond p$	4, Mod.

4) Ferner beweisen wir, daß $\Box (p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$	Pr.
2. $\Box (p \wedge q) \rightarrow \Box p$	1, $\Box$
3. $\Box (p \wedge q) \rightarrow \Box q$	1, $\Box$
4. $\Box (p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	2, 3, Konj.
5. $\Box p \rightarrow \Box (q \rightarrow \Box (p \wedge q))$	4, Exp.
6. $\Box (q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box (p \wedge q))$	5, Modalverschiebung
7. $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box (p \wedge q))$	5, 6, HS
8. $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box (p \wedge q)$	7, Exp.
9. $\Box (p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	4, 8, Konj.

Das System T enthält keine Reduktionssätze. Darunter verstehen wir logische Gesetze, mit denen sich Anhäufungen von Modaloperatoren vereinfachen lassen. Deshalb kann es im System T eine unendliche Anzahl distinkter Modalitäten geben.

Wenn es bisher den Anschein machte, im System T sei alles intuitiv erfaßbar, so gibt es auch hier gleichwohl Beispiele, die den Rückgriff auf die polnische Notation empfehlen.

Um eine T-Formel zu schließen und damit die Gültigkeit nachzuweisen, gilt weiterhin das beim Hilfssystem geübte Vorgehen. Die charakteristische Regel, mit der eine gültige T-Formel zu schließen ist, lautet: Ein Buchstabe darf in den Auswertungsspalten einheitlich gestrichen werden. Das soll an zwei Beispielen erläutert werden:

$$\begin{array}{cccc}
C & p & M & p \\
 & & a & \\
\cancel{C} & \bar{p} & \cancel{M} & p \\
 & 0 & & 0 \\
 & & & \cancel{1} \\
 & \bar{p} & & p \\
 & 0 & & 0 \\
 & & & \cancel{1}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc|cc}
C & K & p & q & M & K & p & q \\
 & & & & a & & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{K}} & \bar{p} & \bar{q} & \cancel{M} & \cancel{K} & p & q \\
 & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & a & a \\
\hline
 & & & & & & p & \\
 & & & & & & 0 & \\
 & & \bar{p} & \bar{q} & & & \cancel{1} & \\
\hline
 & & 0 & 0 & & & q & \\
 & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & \cancel{1} &
\end{array}$$

Übung 6.2.2

4) C M p M M p
5) C C p q C L p q
6) C L C p q L C L p q
7) L C L C p q L C L p q

Zum System T gehören weiter die früheren Regeln in strikter Form, also der strikte Modus ponens, der strikte Modus tollens usw.

$((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	SMP
$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$	SMT
$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$	SDS
$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	SHS
$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (q \vee s)$	SKD
$p \Rightarrow (p \vee p)$	SAdd.
$(p \wedge q) \Rightarrow p$	SSimpl.
$(p \wedge q) \Rightarrow q$	SSimpl.
$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$	SKonj.

Übung 6.2.2

Zeigen Sie, daß

8) SMT
9) SHS
10) SKonj.
11) SKD

bereits zum Hilfssystem gehören. Wie steht es mit der Modaldistribution 12)?

12) $\Diamond (p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

Die strikte Äquivalenz

Die strikte Äquivalenz bringt keine neuen Schwierigkeiten mit sich. Sie läßt sich so definieren:

$$p \Leftrightarrow q =_{df} \Box (p \leftrightarrow q)$$

Nun können wir einige Äquivalenzen untersuchen, die auch für die strikte Äquivalenz gelten.

$\Box p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow p)$
(strikte consequentia mirabilis)

$\Box \neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg p)$
(strikte negative consequentia mirabilis)

Die bisher genannten strengen Implikationen sind auch strikte Äquivalenzen:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \Box(p \rightarrow q)$
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg\Box(p \wedge \neg q)$
$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \Diamond(p \wedge \neg q)$
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \Diamond(\neg p \leftrightarrow q)$
$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \Diamond(p \leftrightarrow \neg q)$
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow q)$
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Die folgenden beiden Austausche der Modaloperatoren lassen sich als strikte Äquivalenzen schreiben:

$\Box(p \wedge q) \Leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
$\Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$

Fügt man dem System T das Brower-Axiom $(p \rightarrow \Box\Diamond p)$ hinzu, dann bekommen wir ein System, das zwischen T und S_5 liegt, jedoch unabhängig von S_4 ist. Das soll nicht weiter ausgeführt werden.

6.2.3 Das System S_4

Das System S_4 läßt iterierte Modalitäten zu. Darunter verstehen wir Folgen mehrerer Modaloperatoren hintereinander, etwa $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Um solche Modalhäufungen zu vereinfachen, braucht es Reduktionsgesetze. Das sind Anweisungen, wie iterierte Modalitäten zu eliminieren sind. Das System S_4 kennt eine solche Regel. Danach ist es erlaubt, eine Kette gleicher Modaloperatoren auf einen einzigen Modaloperator zu reduzieren. LLLLp wird zu Lp.

Von der Systematik aus ist die Herkunft von S_4 leicht zu rechtfertigen. Es genügt, dem System S_1 das Axiom A_9 beizufügen, nämlich:

$A_9 \quad \Box p \rightarrow \Box\Box p$

Dieses Axiom ist charakteristisch für S_4. An seiner Stelle hätte gleich der Reduktionssatz $\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ beigefügt werden können. Doch das Axiom genügt, weil die andere Hälfte der Äquivalenz bereits ein Theorem von T ist. $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ ist nämlich entstanden aus:

1. $\Box p \rightarrow p$	NE
2. $\Box\Box p \rightarrow \Box p$	1, p/$\Box$p

Aus theoretischen Sparsamkeitsgründen fügen wir deshalb dem S_4 nur die noch fehlende Implikation als Axiom bei. Das ergibt uns gleichwohl den Reduktionssatz $\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$, womit der doppelte Notwendigkeitsoperator jederzeit auf einen einfachen reduziert werden kann. Die gleiche Überlegung gilt nun aber auch für den Möglichkeitsoperator. A_9 läßt sich mit dem Möglichkeitsoperator so darstellen: $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$. Da hier gleichermaßen der andere Teil der Implikation bereits zu T gehört, gilt ebenfalls der Reduktionssatz: $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Diamond p$. Das hat zur Folge, daß sich eine ununterbrochene Folge von „$\Box$" oder „$\Diamond$" auf ein einziges Modalzeichen reduzieren läßt. Das sei an zwei Beispielen gezeigt.

Beispiel 1:
Aus $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ folgt $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

1. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$	Axiom S_4
2. $\Box\neg p \rightarrow \Box\Box\neg p$	1, p/$\neg$p
3. $\neg\Diamond p \rightarrow \neg\Diamond\Diamond p$	2, Mod.
4. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	3, Kontrap.

Beispiel 2
Aus $\Box p \rightarrow p$ folgt $\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

1. $\Box p \rightarrow p$	NE
2. $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	1, p/$\Diamond$p
3. $\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$	2, $(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$
4. $p \rightarrow \Diamond p$	EP
5. $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$	4, p/$\Diamond$p
6. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	(vorheriges Beispiel)
7. $\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$	3, 6, HS

Die polnische Notation bewährt sich vor komplizierteren Formeln einmal mehr. Um eine Auswertungstafel zu schließen, gilt: Von zwei aufeinanderfolgenden Zahlenkonstanten darf die obere gestrichen werden. Diese Regel darf beliebig oft wiederholt werden, nur die ‚0' ist nie zu streichen.

Beispiele:

$$\begin{array}{cccccccc}
C & M & M & p & M & p & & \\
 & 1 & 2 & & a & & & \\
\not{C} & \not{\bar{M}} & \not{\bar{M}} & \bar{p} & \not{M} & p & & a = 2 \\
 & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & \not{1} & & a & & \\
 & & & 2 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
A & L & L & L & L & L & p & M & p & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & a & & & \\
\not{A} & \not{L} & \not{L} & \not{L} & \not{L} & \not{L} & \bar{p} & \not{M} & p & & a = 5 \\
 & & & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & & \not{1} & & a & & \\
 & & & & & & \not{2} & & & & \\
 & & & & & & \not{3} & & & & \\
 & & & & & & \not{4} & & & & \\
 & & & & & & 5 & & & &
\end{array}$$

Übung 6.2.3

1) C L p L L p
2) C L p L L L L p

T ist in S_4 enthalten, doch gibt es neben den formalen auch philosophische Gründe, die es nahelegen, uns mit einem System wie S_4 zu befassen. Da es nicht mehr ohne weiteres einsichtig ist, ob etwas notwendigerweise notwendig sei, falls es notwendig ist, hat dies zu Kontroversen geführt. Nun können wir sagen, daß derjenige, der diese Behauptung aufrecht hält, innerhalb des S_4 Systems argumentiert und er damit seine Behauptungen auf ein vernünftiges System bezieht. Nun gibt es aber auch die Meinung, die nicht nur eine notwendige Aussage für notwendigerweise notwendig ansieht, sondern diese Notwendigkeit jeder Modalität zuschreibt. Wenn etwas möglich ist, dann soll es auch notwendigerweise möglich sein. Wie weit das berechtigt ist, dazu gibt die Modallogik eindeutig Auskunft. Beides ist nämlich möglich. Wer nur die Notwendigkeit für notwendig hält, operiert mit dem System S_4, wer jede Modalität für notwendig hält, legt das System S_5 zugrunde. Die beiden sind wohlunterschieden, sie dürfen nicht gegeneinander ausgespielt werden. Sie stehen in dem Verhältnis zueinander, daß eine Lehrmeinung in einem schwächeren (S_4) oder in einem stärkeren Sinn (S_5) vertreten werden kann. Sehen wir uns S_5 etwas an.

6.2.4 Das System S_5

Das letzte System, das wir besprechen wollen, ist S_5. Hier lassen sich nicht nur gleiche Modaloperatoren reduzieren, sondern auch vermischte. Deshalb läßt sich beispielsweise eine Formel wie $\Box\Diamond\Diamond\Box\Diamond\Box\Box\Box p$ einfach auf $\Box p$ reduzieren.

Von der Systematik her gesehen gehen wir von S_1 aus, dem einzig das Axiom_{10} beigefügt wird. Das Axiom 10 lautet:

$$A_{10} \quad \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$$

Die für S_5 charakteristische Regel heißt auch starkes Reduktionsprinzip, während die von S_4 als schwaches Reduktionsprinzip gilt.

Der Unterschied zwischen S_4 und S_5 geht aus den andern Matrizendefinitionen hervor.

	S_4 $\Diamond$	S_4 $\Box$	S_5 $\Diamond$	S_5 $\Box$
1	1	1	1	1
2	2	4	1	4
3	1	3	1	4
4	4	4	4	4

S_4

$\Rightarrow$	1	2	3	4
1	1	4	3	4
2	1	1	3	3
3	1	4	1	4
4	1	1	1	1

S_5

$\Rightarrow$	1	2	3	4
1	1	4	4	4
2	1	1	4	4
3	1	4	1	4
4	1	1	1	1

Die Schließungsregel lautet: Alle Eintragungen dürfen gestrichen werden mit Ausnahme der letzten.

Dazu zwei Beispiele:

$$\begin{array}{cccccccc}
C & M & L & p & L & p & & \\
 & 1 & a & & & 2 & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{M}} & \cancel{\bar{L}} & \bar{p} & L & p & & \\
 & & \cancel{0} & & \cancel{0} & & & a = 2 \\
 & & \cancel{1} & & 2 & & & \\
 & & a & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
C & L & p & M & L & L & M & M & L & p & & \\
 & a & & b & 1 & 2 & c & d & 3 & & & \\
C & \cancel{\bar{L}} & \bar{p} & \cancel{M} & \cancel{L} & \cancel{L} & \cancel{M} & \cancel{M} & \cancel{L} & p & & \\
 & & \cancel{0} & & & & & & & \cancel{0} & & a = 3 \\
 & & a & & & & & & & \cancel{b} & & \\
 & & & & & & & & & \cancel{1} & & \\
 & & & & & & & & & \cancel{2} & & \\
 & & & & & & & & & \cancel{c} & & \\
 & & & & & & & & & \cancel{d} & & \\
 & & & & & & & & & 3 & &
\end{array}$$

Übung 6.2.4

1) Zeigen Sie die Gültigkeit des Grundaxioms von S_5.
2) C M L M L L p L p
3) C K M q M p M L M L K L M q L L M q

6.3 Modale Prädikatenlogik

Wie die Aussagenlogik durch die Prädikatenlogik erweitert wird, so ist auch die Modallogik der Aussagen zu erweitern, wenn daraus eine Modallogik der Prädikate entstehen soll.

Die Stellung des Modalperators gibt der Aussage einen anderen Sinn, je nachdem er vor oder hinter dem Quantor steht. Da sind mit wenigen Prädikaten überraschend viele Kombinationen aufstellbar.

Beispiele:

M ∃ x K F x G x	Es ist möglich, daß der Fluß gefroren ist.
∃ x M K F x G x	Es gibt etwas, das möglicherweise ein Fluß und gefroren ist.
∃ x K F x M G x	Es gibt Flüsse, die möglicherweise gefroren sind.
∃ x K M F x G x	Es gibt etwas, das möglicherweise ein Fluß ist und gefroren ist.
M ∀ x C F x G x	Es ist möglich, daß alle Flüsse gefroren sind.
∀ x M C F x G x	Für alle Dinge ist es möglich, daß, wenn es Flüsse sind, sie gefroren sind.
∀ x C F x M G x	Alle Flüsse sind möglicherweise gefroren.
∀ x C M F x G x	Alles, was möglicherweise ein Fluß ist, ist gefroren.

Diese Übersicht deutet bereits an, wie kompliziert der Einzelfall werden kann. Intuitiv hat man beispielsweise den Eindruck, ∃ x K F x M G x würde ∃ x M K F x G x implizieren. Wir dürfen uns nicht auf die bloße Intuition verlassen, sie könnte uns leicht auf Abwege bringen wie im genannten Beispiel. Denn hier ist die gleiche Vorsicht geboten wie bei der Umstellung von All- und Existenzquantoren in der Prädikatenlogik.

Streichungsregeln

Die wichtigste Ergänzung betrifft die Anordnung der Quantoren und Modaloperatoren. Wir legen fest: Es wird wie gewohnt eine „0“ unter die Prädikate gesetzt. Die Zahlen oder Buchstaben der Quantoren werden neben die Null gestellt oder neben die Zahl oder den Buchstaben, die durch Streichen des Modaloperators entstanden sind. Im Hilfssystem sieht das so aus:

$$
\begin{array}{lllllllllll l}
C & L & \forall & x & F & x & M & \forall & x & F & x & \\
 & a & b & & & & c & 1 & & & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{L}} & \cancel{\bar{\forall}} & \bar{x} & \bar{\bar{F}} & \bar{x} & \cancel{M} & \cancel{\forall} & x & F & x & \\
 & & & & 0 & & & & & 0 & & b = 1 \\
 & & & & ab & & & & & c1 & & a = c = 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll l}
C & \forall & x & L & F & x & \exists & x & M & F & x \\
 & a & & b & & & c & & d & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{\forall}} & \bar{x} & \cancel{\bar{L}} & \bar{F} & \bar{x} & \nexists & x & \cancel{M} & F & x \\
 & & & & 0a & & & & & 0c & a = c = 1 \\
 & & & & b & & & & & d & b = d = 2
\end{array}
$$

Hingegen ist der folgende Ausdruck kein Theorem:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
C & \forall & x & L & F & x & M & \exists & x & F & x \\
 & a & & b & & c & d & & & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{\forall}} & \bar{x} & \cancel{\bar{L}} & \bar{x} & \cancel{M} & \nexists & x & F & x & \\
 & & & & 0a & & & & & 0 & \\
 & & & & b & & & & & cd &
\end{array}
$$

Kein Theorem, weil a und d nicht in Verbindung zu bringen sind.

$$
\begin{array}{llllllllll|llllllllll l}
C & L & \forall & x & K & F & x & G & x & K & L & \forall & x & F & x & L & \forall & x & G & x & \\
 & a & b & & & & & & & & 1 & 2 & & & & 1 & 2 & & & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{L}} & \cancel{\bar{\forall}} & \bar{x} & \cancel{\bar{K}} & \bar{F} & \bar{x} & \bar{G} & \bar{x} & \cancel{K} & \cancel{L} & \cancel{\forall} & x & F & x & \cancel{L} & \cancel{\forall} & x & G & x & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & & 0 & & & & & 0 & & \\
 & & & & & ab & & ab & & & & & & 12 & & & & & 12 & & \\
\cline{11-20}
 & & & & & & & & & & & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 12 & & & & & & & \\
\cline{11-20}
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 12 & & a = 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & b = 2
\end{array}
$$

Eine konjunktive Verzweigung mit All- und Notwendigkeitsoperatoren erlaubt, für beide Zweige dieselben Zahlen zu wählen.

Übung 6.3.

1) C L ∀ x F x M ∃ x F x
2) C K L ∀ x F x L ∀ x G x L ∀ x K F x G x

3) $C\ M\ \exists\ x\ K\ F\ x\ G\ x\ K\ M\ \exists\ x\ G\ x\ M\ \exists\ x\ G\ x$
4) $C\ \overline{\overline{\exists}}\ \bar{x}\ M\ \bar{A}\ \overline{\overline{F}}\ \bar{x}\ G\ x\ \overline{\overline{\exists}}\ \bar{x}\ M\ K\ F\ x\ \bar{G}\ \bar{x}$

6.3.1 Die verschiedenen Welten von Leibniz

Leibniz entwickelt in seiner *Théodicée* den Gedanken von den verschiedenen Welten. Damit legt er einen Erklärungsversuch vor, der angesichts des Übels in der Welt gleichwohl von einem guten Gott zu reden erlaubt. Das Problem spitzt sich zu mit der Feststellung, die unglücklichen Menschen hätten das Schlechte durch ihre Bosheit verursacht. Wie würde das Lebensende aussehen, wenn diese Individuen für das Gute eingestanden wären? Diese gedachten Lebensabläufe bilden die verschiedenen Welten.

In der bildhaften Darstellung von Leibniz rollt ein möglicher Lebensablauf jeweils in einem Zimmer ab. Die verschiedenen Zimmer versinnbilden den Gedanken, daß der Mensch aus dem reichhaltigen Lebensangebot ständig Auswahlen treffen muß. Ist der Entscheid gefallen, so bedeutet dies nicht nur die Verwirklichung des einen Angebotes, sondern gleichzeitig Ausschluß aller übrigen. Beispiel: Als Ferienort steht mir die ganze Welt offen. Sobald ich die Fahrkarte für Venedig gebucht habe, sind Alicante, Mallorca oder Sörenberg ausgeschlossen. Mit der Verwirklichung der ausgewählten Möglichkeit verblassen die andern, und im Rückblick gelten sie nur noch als Gedankenspiele. Das zeigt Leibniz an einem treffenden Vergleich: Sextus beklagt sich, er sei unglücklich. Jupiter hört davon und weissagt ihm: „Wenn du von Rom fortgehst, dann wirst du ein anderes Schicksal erfahren.“ Der starrköpfige historische Sextus ließ sich davon nicht beeindrukken, er blieb, und so mußte er gerechterweise die Folgen tragen. In einem Traum wird nun gezeigt, wie sich die Welt für Sextus hätte verändern können. Im ersten Zimmer ist Sextus nach Korinth gegangen, findet einen Schatz, wird reich, beliebt, angesehen, hochbetagt und von der ganzen Stadt verehrt. Im zweiten Gemach ist Sextus nach Thrazien ausgewandert, heiratet die Königstochter und wird als Thronerbe eingesetzt; die Untertanen beten ihn an. In den angrenzenden Zimmern sieht man unendlich viele weitere Bilder des Sextus, der dem Jupiter gehorcht hat.

Das sind die verschiedenen Welten. Sie sind in Pyramidenform aneinandergereiht. An der Spitze ist die wirkliche Welt, das Leben, wie es die Geschichte über Sextus berichtet. Die übrigen Zimmer zeigen, wie es ihm hätte ergehen können, wenn er sich an den Rat von Jupiter gehalten hätte.

Die Leibnizstrategie gibt uns ein Bild, wovon die verschiedenen Modalsysteme handeln und verschafft uns Einsicht darüber, wie diese Systeme von den unterschiedlichen Restriktionen abhängen, die wir an die Zugänglichkeitsrelation stellen. Eine mehr technische Darstellung dieser Beziehungen findet sich im Anhang 2.

6.3.2 Die Vielzahl der Modelle

Die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Symmetrie erlauben die Kombination einer Vielzahl von Modellen. In der Modallogik erweist sich ferner die Annahme der Existenz sowie die Quasiäquivalenz als einflußreich, so daß wir über folgende Eigenschaften nachdenken wollen:

Existenz	E
Reflexivität	R
Transitivität	T
Symmetrie	S
Quasiäquivalenz	Q

Quasiäquivalenz: Für alle Elemente a, b und c der Menge M: wenn Hab und Hcb, dann Hac.

Aus der Systematisierung dieser 5 Eigenschaften erhalten wir $2^5 = 32$ Kombinationen. Analog zur theoretischen Errechnung der aristotelischen Syllogismen gibt es hier zwar keine verbotenen Kombinationen, jedoch redundante. Da etwa Q und R zusammen S und T implizieren, werden wir einige Wiederholungen auslassen. Immerhin bleiben noch die folgenden 15 Kombinationen übrig.

	E	R	T	S	Q	
1.	1	1	1	1	1	S_5
2.	1	1	1	0	0	S_4
3.	1	1	0	1	0	Brouwer
4.	1	1	0	0	0	T
5.	1	0	1	0	1	
6.	1	0	1	0	0	
7.	1	0	0	1	0	
8.	1	0	0	0	1	
9.	1	0	0	0	0	Hilfssystem
10.	0	0	1	1	1	
11.	0	0	1	0	1	
12.	0	0	1	0	0	
13.	0	0	0	1	0	
14.	0	0	0	0	1	
15.	0	0	0	0	0	

Bei Berücksichtigung der Irreflexivität, Nonreflexivität, Asymmetrie, Nonsymmetrie usw. würde sich die Anzahl möglicher Systeme noch gewaltig vergrößern.

Die verschiedenen Modalsysteme stimmen nun darin überein, daß sie als Quantifizierung über die Zugänglichkeitsrelation der verschiedenen Welten laufen. Sie unterscheiden sich in den unterschiedlichen Einschränkungen, die als exakt definierbare Forderungen an die Zugänglichkeit gestellt werden. Genauer ausgedrückt: Ein Modalsystem ist interpretierbar als ein geordnetes Tripel $\langle 0, W, Z \rangle$, bei dem W die Objektmenge aller Welten ist, 0 ein Element dieser Menge und Z die Relation, die für die Elemente von W definiert ist. Wie die Tabelle zeigt, haben wir nur Modelle mit Existenzannahmen besprochen. Daneben setzen die Systeme folgende Eigenschaften voraus:

T	reflexiv
S_4	reflexiv, transitiv
S_5	reflexiv, transitiv, symmetrisch
Brouwer	reflexiv, symmetrisch

Was die einzelnen Eigenschaften bewirken, ist nun leicht zu erfassen. Wird die Existenzannahme anerkannt, so heißt das, bei der

Formel C L p M p dürften die Buchstaben durch Konstanten ersetzt werden. Anderfalls ist die Formel nicht schließbar. Reflexivität stellt die Beziehung zwischen Modalität und Wahrheit her, etwa bei CLpp. Transitivität führt zur ersten Reduktion der Modalitäten. Während von der Reflexion her offen bleibt ob die Alternative Hac gilt, wenn Hab und Hbc vorliegen, wird diese Beziehung durch die Transitivität entschieden. Und schließlich sorgt die Symmetrie dafür, daß aus der Alternative des Ersten zum Zweiten auch die Alternative des Zweiten zum Ersten zum Zug kommt.

Um nochmals zu Leibniz zurückzukehren, könnten wir jetzt besser verstehen, was es für Sextus bedeutet, die Welt in Korinth sei für ihn vorstellbar. Angenommen, er werde gefragt, ob eine Aussage ‚p' möglicherweise wahr sei, etwa „Im Winter sinkt die Temperatur bis 30 Grad unter Null". Er wird sie so verstehen, daß er sich als Antwort überlegt, ob dies in Rom, Korinth, Thrazien oder an einem anderen ihm bekannten Ort zutrifft. Wenn er nichts von Hochalpen oder vom Nordpol weiß, dann wird er die Frage verneinen. Die Frage, ob im Sommer die Temperatur notwendigerweise über 20 Grad steigt, wird er nur dann bejahen, wenn an allen Orten, die er kennt, diese Wärme tatsächlich vorkommt.

Falls Transitivität vorliegt, braucht es deswegen nicht Symmetrie zu geben. Ich kann mir eine Welt ohne Farben vorstellen. Würde es bei uns aber keine Farben geben, so könnte sich niemand eine Welt mit Farben vorstellen. Falls das Wort „Farbe" im Sprachvorrat vorhanden wäre, so würde es doch nur die Intensität, den Kontrast oder sonst eine Schattierung zwischen schwarz und weiß bedeuten. Die fehlende Symmetrie zeigt an, daß in diesem Fall nur S_4 sagt, was gültig ist.

Der Gedanke an eine Vielfalt möglicher Systeme sollte uns vertraut sein, wenn wir uns an die Barcan-Formel heranwagen.

6.3.3 Die Barcan-Formel

Im Jahre 1946 hat Ruth Barcan eine Formel vorgelegt, die eine große Diskussion ausgelöst hat und einige bisher übersehene Zusammenhänge in ein neues Licht gestellt hat. Die Barcan-Formel lautet:

$$\Diamond (\exists x) Px \rightarrow (\exists x) \Diamond Px$$

Den Unwillen vieler Logiker hat diese Formel hervorgerufen, weil ihre Interpretation der Intuition langjähriger Gepflogenheiten widerspricht. Die Grundlage dazu hat Abelard im Mittelalter ausführlich besprochen in den Modalitäten de dicto und de re, die ihrerseits auf Aristoteles zurückgehen.

In den *Sophistischen Widerlegungen* stellt Aristoteles die Frage, ob ein Mensch gehen kann, wenn er sitzt und schreiben, wenn er nicht schreibt. Sein Lösungsvorschlag lautet, wir hätten zu unterscheiden zwischen sensu composito (= de dicto) und sensu diviso (= de re).

Die Modalität de dicto bezieht die Modalität auf die ganze Aussage. „Es ist möglich, daß ein Mensch sitzt" $\Diamond (\exists x)\ (Mx \wedge Sx)$. Dagegen beschränkt sich die Modalität de re auf das Prädikat: „Es gibt einen Menschen, der möglicherweise sitzt" $(\exists x)\ (Mx \wedge \Diamond Sx)$. Die beiden Modalitäten werden als aufeinander rückführbar betrachtet und zwar so: Wenn es einen Menschen gibt, der möglicherweise sitzt, dann ist es möglich, daß ein Mensch sitzt. Mit andern Worten: de re Möglichkeit impliziert de dicto Möglichkeit, aber nicht umgekehrt. Eine gesunde Logik sollte genau das zeigen, nämlich daß

(1) $C \exists x M P x M \exists x P x$ gültig
(2) $C M \exists x P x \exists x M P x$ ungültig

ist. Nun ist aber (2) die berüchtigte Barcan-Formel und die Behauptung lautet nun, die beiden seien gleichermaßen beweisbar.

(3) $(\forall x) \Box (Px \rightarrow Qx) \rightarrow \Box ((\forall x) Px \rightarrow (\forall x) Qx)$

Die Formel (3) ist falsch. Es scheint zwar, sie hätte Ähnlichkeit mit

(4) $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

Indessen steht bei (3) „$\Box$" nach dem Allquantor, im Nachsatz vor den Quantoren.

(5) $\Box(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \rightarrow \Box((\forall x)Px \rightarrow (\forall x)Qx)$

ist leichter beweisbar. Es ist ein Spezialfall der BF (Barcan-Formel)

BF $(\forall x)\Box Px \rightarrow \Box(\forall x)Px$

Aus BF folgt $\Diamond(\exists x)Px \Rightarrow (\exists x)\Diamond Px$

Die BF ist eine These aus dem Brouwer-System, das aus dem Prädikatenkalkül zusammen mit dem Axiom $p \rightarrow \Box\Diamond p$ besteht.

6.4 Epistemische, deontische und zeitliche Modalitäten

Die Unterscheidung zwischen notwendig und nicht notwendig bezieht sich bei Aristoteles auf Substanz und Akzidens, sie leitet sich direkt von der Metaphysik her. Abstrahiert man von der aristotelischen Metaphysik, dann ist es sinnvoll, neben den alethischen – die auch ontische Modalitäten genannt werden – andere Modalitäten zu beachten. Die wichtigsten sind:

– die epistemischen Modalitäten
  ich weiß, daß p
  ich glaube, daß p

– die deontischen Modalitäten
  es ist vorgeschrieben, daß p
  es ist erlaubt, daß p

– die zeitlichen Modalitäten
  es ist immer der Fall, daß p
  es trifft manchmal zu, daß p

– die evaluativen Modalitäten
  es ist gut, daß p
  es ist schlecht, daß p

Wenn die Modallogik in dieser Breite einsetzbar wäre, so dürfte man darin die definitive Beherrschung der Modalitäten sehen. Leider sind wir mit einer unübersehbaren Zahl von Abweichungen konfrontiert, die das erhoffte Ziel hinausschieben. Wie widerspenstig die intuitive Vorstellung der einen Modalität sich zu einer andern verhält, das mögen fünf konkrete Beispiele zeigen.

A-1 C L p M p

Was man weiß, das glaubt man gleichzeitig; was obligatorisch ist, das ist erlaubt, und was immer der Fall ist, das trifft auch auf einzelne Momente zu. Insofern scheint A-1 epistemisch, deontisch und zeitlich plausibel zu sein. Es wäre eine unerhörte Stütze, wenn es uns gelänge, die generelle Übertragbarkeit der alethischen Modalitäten nachzuweisen.

A-2 C L p p

Dieses einfachste Axiom aus S_1 erweist sich nur zeitlich als annehmbar. Es widerstrebt der deontischen Interpretation. Der Satz „Menschenrechte sind nach der UNO-Charta vorgeschrieben, also werden sie eingehalten" ist ein bedauerliches Gegenbeispiel. Auch epistemisch läßt es sich nicht aufrecht erhalten, denn „ich wußte, daß die Jägerhütte mit Rundhölzern verkleidet ist, doch der Augenschein hat mir einfache Holzladen gezeigt". Ich kann etwas wissen, was sich nachher als falsch erweist. Die erhoffte Parallele zwischen „möglich" und „glauben" bestätigt sich nicht; eine wahre Aussage muß immerhin möglich sein, aber eine wahre Aussage braucht nicht unbedingt von jemandem geglaubt zu werden.

A-3 A M p M p

A-3 gilt für epistemische Modalitäten nicht mehr. „Ich glaube daß der Dollar sinkt, oder ich glaube, daß der Dollar nicht sinkt" ist nicht erschöpfend; als Laie in Währungsfragen habe ich möglicherweise überhaupt keine Meinung, was gemäß epistemischer Deutung von A-3 nicht vorgesehen ist. Die Äquivalenz zwischen A-2 und A-3 beruht auf der Voraussetzung, daß die Modaloperatoren gegenseitig definierbar sind. Das trifft auf der epistemischen Ebene nicht mehr zu.

A-4 C M p L C p q

Dieses Theorem ist berüchtigt im deontischen Bereich. Es besagt, daß eine Handlung, die moralisch verboten ist und gleichwohl ausgeführt wird, die Verpflichtung in sich trägt, alles zu tun, was man will.

A-5 C p M p

A-5 ist moralisch unannehmbar, weil darin eingeschlossen ist, was es in der Wirklichkeit gebe, das sei erlaubt.

6.5 Das beste System der Modallogik?

Bei der Interpretation der Kalküle hat sich bisher die Hoffnung nicht erfüllt, eine intensivere Beschäftigung mit den Modalitäten würde gleichsam unausweichlich zu einem bestimmten System führen, in dem sich epistemische, deontische und zeitliche Zusammenhänge in einheitliche Strukturbeziehungen zusammenfassen ließen. Formal sind denn auch verschiedene Systeme konstruierbar, je nach der Festlegung der Eigenschaften für die Z-Relation. Bis in die neueste Zeit haben viele Autoren gemeint, es würde letztlich ein geistreiches Formelspiel betrieben, aus dem jeder ein ihm passendes Modalsystem auswählen könne. Einen Ausweg aus dieser unbefriedigenden Situation haben uns die Anstrengungen der semantischen Interpretationen gebracht. Eine derartige Interpretation besteht im Versuch, formale Wahrheitsbedingungen anzugeben unter gleichzeitigem Einbezug von Aspekten der Wirklichkeit, wobei es nahe lag, auf die Welten von Leibniz zurückgreifen.

Durch die semantischen Interpretationen wird die Wahl unseres Systems nicht mehr von der Intuition abhängig, welche Formeln wir als der Wirklichkeit angepaßt ansehen sollen, von wo aus wir uns bestimmen lassen. Wir können uns jetzt fragen, welches Modell im Rahmen einer konkreten Problemstellung unserem Begriff für modale Deduktion am besten entspricht. Bei dieser Entscheidung geht es durchaus nicht willkürlich zu. Wir haben uns darauf zu besinnen, auf welche Art wir bisher bei modalrelevanten Argumentationen vorgegangen sind. Ähnlich wie sich aus der Beurteilung der Goldbachschen Vermutung die Vorliebe für intuitionistische oder klassische Mathematik entnehmen läßt, so lassen sich aus geeigneten Beispielen ablesen, welchem Modalsystem ein Denker den Vorzug gibt.

Nehmen wir etwa an, wir hätten es mit metaphysischer Notwendigkeit und Möglichkeit zu tun. Auf dem Hintergrund von Leibniz können wir fragen: Sind wir der Ansicht, daß das metaphysisch Notwendige sich von Welt zu Welt verändert? Wenn wir diese Frage bejahen, dann haben wir dem T, Brower-System oder S_4 zugestimmt. Denn in all diesen Systemen ändert sich der Notwendigkeitsbegriff, wenn wir von einer Welt in die andere übergehen. Wenn wir aber diese Situationsveränderung hinsichtlich metaphysischer Modalitäten ablehnen, d. h. also, wenn wir metaphysisch Notwendiges als unveränderlich von einer Welt zur andern ansehen, dann haben wir uns für S_5 entschlossen. S_5 ist das einzige System, das mit der Äquivalenzrelation eine entsprechende Zugänglichkeitsrelation definiert. Das ist der Grund, warum sich die meisten Philosophen für S_5 entschieden haben.

Anhang 1

Wahrheitsmatrizen der Modallogik

Da wir schon bei einstelligen Funktoren 4 Zeilen bekommen, würde die Darstellung der zweistelligen auf 16 Zeilen anschwellen.

p	q	$\Rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
1	1	2	1	1	1	1	2
1	2	4	2	1	2	2	4
1	3	4	3	1	3	3	4
1	4	4	4	1	4	4	4
2	1	2	2	1	1	2	4
2	2	2	2	2	1	1	2
2	3	4	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	3	4	4
2	4	4	4	2	3	3	4
3	1	2	3	1	1	3	4
3	2	4	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	2	4	4
3	3	2	3	3	1	1	2
3	4	4	4	3	2	2	4
4	1	2	4	1	1	4	4
4	2	2	4	2	1	3	4
4	3	2	4	3	1	2	4
4	4	2	4	4	1	1	2

Die untereinander geschriebenen 16 Zeilen lassen sich vermeiden durch Kompaktdarstellung, ein Verfahren, das wir schon bei der zweiwertigen Logik hätten verwenden können. Die Funktoren der zweiwertigen Logik lassen sich vergleichsweise so darstellen:

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Für unsere 4wertige Logik ergäbe dies:

$\wedge$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

$\vee$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

$\rightarrow$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

$\leftrightarrow$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$\Rightarrow$	1	2	3	4
1	2	4	4	4
2	2	2	4	4
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

$\Leftrightarrow$	1	2	3	4
1	2	4	4	4
2	4	2	4	4
3	4	4	2	4
4	4	4	4	2

Aus dem Rahmen fallen nur die beiden Definitionen 2, 3 für $\wedge$ und $\vee$. Im einen Fall sind sie logisch falsch, im andern logisch wahr. Aber dieses Ärgernis ist nicht zu umgehen. Gewiß ließe sich auch erwägen, ob nicht die $p \Rightarrow q$ Beziehung abzuändern sei. Freilich hätte dieser Eingriff zur Folge, daß

$$p \Rightarrow (p \wedge q)$$
$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

nicht mehr logische Wahrheiten wären. Soweit wollen wir nicht gehen. Es bleibt indessen zu beachten, daß die 2, 3 Inkonsequenz nicht zerstörend ist. Wir haben nicht „wahr", wo „falsch" sein sollte oder umgekehrt. Wir haben bloß in zwei Fällen strengere Werte als sie gerechtfertigt empfunden werden.

Wir können nicht eine befriedigende Modallogik aufstellen, solange nicht unendlich viele Werte angenommen werden. Aber welche Deutung ließe sich dann bei unendlich vielen Werten geben? Man könnte auf die Vorstellung von Leibniz zurückgreifen mit den verschiedenen Welten. Für 4 Werte ließe sie etwa folgende Deutung zu:

1 wahr in unserer und in der anderen Welt
2 wahr in unserer und falsch in der andern Welt
3 falsch in unserer und wahr in der andern Welt
4 falsch in beiden Welten

Obwohl wir in der Modallogik gegen unendlich viele Werte gedrängt werden, so gibt es doch etliche Aspekte, die nicht von einer unendlichen Anzahl von Werten abhängen. Für zahlreiche Beziehungen sind die 4-Wertetafeln ein ausreichendes Instrumentarium. Das wollen wir uns verdeutlichen an den Quasi-Tafeln, die bei iterierten Modalitäten ihre Nützlichkeit erweisen.

$\Box\Box p$	$\Diamond\Diamond p$	$\Box\Box\neg p$	$\Diamond\Diamond\neg p$	$\Diamond\Box p$	$\Box\Diamond p$
4	1	4	1	1	2
4	1	4	1	3	2
4	1	4	1	3	2
4	1	4	1	3	4

Die Verdoppelung von $\Diamond$ ergibt eine logische Wahrheit, die Verdoppelung von $\Box$ das Gegenteil. Gemischte Operatoren zeigen einige Sonderheiten

$\Box\Diamond p \Rightarrow \Box p$	$\Diamond\Box p \Rightarrow \Box p$	$\Diamond\Box p \Rightarrow \Diamond p$
2	4	2
2	4	2
2	4	2
2	4	2

Zusammenfassung:

1. Jede Aussage ist möglicherweise möglich.
2. Keine ist notwendigerweise notwendig.
3. Wenn eine Aussage möglicherweise notwendig ist, dann folgt nicht, daß sie notwendig ist.
4. Wenn sie möglicherweise notwendig ist, dann ist sie möglich.

Anhang 2

Semantische Deutung der Modallogik

1. Semantische Deutung

Was wir intuitiv über die verschiedenen Welten zu sagen wissen, steht in einer Beziehung zu unserer wirklichen Welt. Diese Beziehung wird an Modellen beschrieben. Eine Semantik für die Modalkalküle geben heißt deshalb, entsprechende Modelle aufbauen. Wir bekommen so ein T-Modell, ein S_4-Modell usw.

Diese Modelle stimmen darin überein, daß sie aus einem geordneten Tripel bestehen, aus $\langle 0, W, Z \rangle$. Dabei gilt:

0 = unsere Welt
$W = \{0, W_1, W_2, W_3 \ldots\}$
Z: Relation zwischen 0 und einer Welt W

W ist die Menge aller Welten und Z eine Relation zwischen unserer Welt 0 und einer Welt W. Die Beziehung Z kann als Zugänglichkeitsrelation gedeutet werden. Unter zugänglich versteht man nicht bloß Sichtbares oder Greifbares; der Begriff ist weit zu fassen und umschließt alles, was irgendwie denkbar ist.

Diese Relation Z steht nun im Zentrum der Untersuchung. Das ist leicht erklärbar, weil nämlich die verschiedenen Modalsysteme die Folge der verschiedenen Eigenschaften von Z sind. Ich möchte diesen wichtigen Sachverhalt zweifach darstellen, zuerst etwas allgemein am T-System und dann etwas exakter für alle Systeme.

1.1 Einführende Darstellung der Z-Relation

Für das T-System ist erforderlich, daß die Relation Z reflexiv ist. Das bedeutet bei unserer Leibnizinterpretation, daß jede Welt sich selber zugänglich ist. Wenn wir *zugänglich* hier als visuelles Sehen auffassen, müßten alle Bewohner einer Welt sehen können, daß sie Bewohner dieser Welt sind.

Das Modell läßt sich deuten als eine binäre Funktion zwischen

Atomsätzen aus T und den möglichen Welten hinsichtlich der Wahrheitswerte. Das bedeutet, daß jede Atomformel von T in jeder Welt wahr oder falsch ist. Dann genügen folgende vier Bedingungen:

1. ‚$\neg$ p' ist wahr in W genau dann, wenn ‚p' in W falsch ist
2. ‚p $\vee$ q' ist wahr in W genau dann, wenn ‚p' in W oder ‚q' in W wahr ist
3. ‚$\Diamond$ p' ist wahr in W genau dann, wenn es wenigstens eine mögliche Welt W_1 gibt, in der ‚p' wahr ist und W_1 ist für 0 zugänglich.
4. ‚$\Box$ p' ist wahr in W genau dann, wenn für alle W, die 0 zugänglich sind, ‚p' in diesen W wahr ist.

Die Regeln 1. und 2. legen den Aussagenkalkül fest; echte Modalregeln sind nur 3. und 4.

Mit diesen Regeln, zusammen mit der Relation Z, die reflexiv ist, lassen sich alle Formeln entscheiden, ob sie T-gültig sind. Daß z.B. das Notwendigkeitsaxiom T-gültig ist, läßt sich so zeigen:

‚$\Box$ p $\rightarrow$ p' soll in allen Welten W gültig sein. In einer beliebigen Welt – etwa W_7 – wird die Formel nur in einem einzigen Fall falsch sein, nämlich wenn der Vordersatz ‚$\Box$ p' wahr und der Nachsatz ‚p' falsch ist. Nun ist aber ‚$\Box$ p' dann wahr, wenn die 4. Regel erfüllt ist, d.h. ‚p' ist wahr für alle Welten, die 0 zugänglich sind, folglich auch für W_7.

1.2 Verallgemeinerung der Z-Relation

Wir haben unsere Welt mit ‚0' bezeichnet. Alle anderen Welten lassen sich als Alternativwelten deuten. Von da aus können wir genauer darstellen, wie die zweistellige Funktion wirkt. Die Sprache des Formalsystems ist die Objektsprache, das semantische Modell ist in der Metasprache beschrieben. Als Namen von Modellmengen in der Metasprache wollen wir ‚a', ‚b', ‚c' benutzen. Ein bestimmtes, festgelegtes Modell ist die wirkliche Welt ‚0'. Wenn ‚p' oder ‚q' Formeln des Systems sind, dann sind [p] und [q] Sätze des Modells. Auf diese Weise lassen sich die Beziehungen zwischen Formalsystem und dem Modell einfacher beschreiben. Denn jetzt können wir exakt sagen: p ist genau dann wahr, wenn [p] $\in$ 0 ist. Folglich läßt sich beispielsweise nachweisen, daß C p A p q ein Modell der Welt ‚0' ist.

In einem Modellsystem stehen die Modellmengen alternativ zueinander. Die Modellmenge a sei H-alternativ (Hintikka-alternativ) zur Modellmenge b. Dann läßt sich der Möglichkeitsoperator so definieren: [$\Diamond$ p] $\in$ b, wenn es im Modellsystem wenigstens eine Modellmenge b gibt, sodaß Hab und [p] $\in$ a.

Die Interpretation I auf ein Modellsystem M ist eine Funktion der Wahrheit zwischen Formal- und Modellsystem. Auf dieser Grundlage bekommen unsere Matrix-Zahlen einen Sinn:

0	unsere Welt
1	Alternativwelt zu 0
2	Alternativwelt zu 1
3	usw.

Wir schreiben das so: H[2] [1] und H[1] [0]. Der Gedanke der Alternativwelten erlaubt auf einsichtige Weise über die Eigenschaften der Z-Relation zu reden.

Reflexivität

Die Reflexivität im System T besagt nun, daß jedes Modell zu sich selber alternativ ist. Dies wiederum ist eine Rechtfertigung für die Streichungsregel; denn C p M p ergibt nach der Streichung:

$$\begin{array}{cc} \bar{p} & p \\ 0 & 0 \\ & a \end{array}$$

Entweder ist nun [$\bar{p}$] $\in$ 0 oder [p] $\in$ a, wobei H[a] [0]. Da die Reflexivität gilt, ist 0 auch H-alternativ zu sich selber, so daß wir schreiben dürfen:

$$\begin{array}{cc} \bar{p} & p \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{array}$$

Wir dürfen a durch 0 ersetzen oder besser weglassen, d.h. streichen.

Transitivität

Sofern wir den Blick auf die Reflexivität der Relation Z richten, erhalten wir das System T. Das System T führt zu S_4, sobald die Bedingung der Transitivität hinzugefügt wird: Für alle Modellmengen a, b, c in M gilt, wenn Hab und Hbc, dann auch Hac.

Also

p
0
a
b
c

Da nun H[a] [0] und H[b] [a], so ist aufgrund der Transitivität H[c] [b]. Die Formel ist genau dann wahr, wenn [p] ∈ c. Wenn jedoch H[c] [b], dann auch H[c] [a]. Die Streichung von ‚b' bewahrt den Wahrheitswert der ursprünglichen Formel. Deshalb gilt:

$\not{C}\ \overline{M\ M\ p}\ M\ p$	$\bar{p}$	p
	0	0
	1	a
	2	

Hier darf ‚1' gestrichen werden, weil entweder [p̄] ∈ 2 und H[2] [1] sowie H[1] [0] oder [p] ∈ a, wobei [a] eine Alternative zu ‚0' ist. [2] ist eine alternative Menge zu ‚0' genau wie ‚a', so daß ‚a' durch ‚2' ersetzt werden darf.

Symmetrie

Für alle Modellmengen a und b in M gilt: Wenn Hab, dann auch Hba. Wenn nun H[0] [1] und H[1] [0] wie auch H[0] [a] und H[a] [0], aber auch H[a] [2] und H[2] [a], dann stehen alle Zwischenglieder symmetrisch alternativ zueinander und dürfen gestrichen werden. Wir haben das System S_5 vor uns mit seinen bekannten Streichregeln.

Lösungen

1.0.1

1) 1. $\{$Josef, Jakob, Walter, Käthi ...$\}$ oder $\{1, 2, 3, 4 \ldots\}$
2. $\{$Reagan$\}$ oder $\{1\}$
3. $\emptyset$
4. Es ist keine Menge, denn es ist nicht definiert, was „ehrlich" heißt.

2) 1. nicht äquivalent. 2. äquivalent.
3. äquivalent. 4. nicht äquivalent.

1.0.2

1. 1. 2. nein. 3. nein. 4. 5 Elemente.
5. $\{\{$Sieb$\}, \emptyset\}$.
6. $\{\{$Eis$\}$, $\{$Musik$\}$, $\{$Ida$\}$, $\{$Eis, Musik$\}$, $\{$Eis, Ida$\}$, $\{$Musik, Ida$\}$, $\{$Eis, Musik, Ida$\}$, $\emptyset\}$
7. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1,4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \emptyset\}$

1.0.2.1

1) 1. F hat drei Elemente: 2, 4, 6.
F hat acht Teilmengen
$\{\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \{2, 4, 6\}, \emptyset\}$.
2. G hat zwei Elemente: 3, $\{2, 4, 6\}$
G hat vier Teilmengen:
$\{\{3\}, \{\{2, 4, 6\}\}, \{3, \{2, 4, 6\}\}, \emptyset\}$.

2) Der Autor unterscheidet nicht zwischen den verschiedenen Ist-Verknüpfungen. Nur die Inklusion unterliegt der Transitivität. Der Autor führt ein Beispiel an mit der Inklusion, wodurch er sich bestätigt sieht. Für den Begriff des Enthaltens gilt genau dasselbe:

Wenn er unter Enthalten die Inklusion versteht, dann ist die Behauptung der Transitivität richtig, wenn er jedoch die Elementbeziehung im Auge hat, dann trifft die Transitivität nicht zu.

1.0.2.2

(2) ist korrekt formuliert und auch gültig, denn wenn von einer beliebigen Zahl eine gleichgroße abgezählt wird, dann erhalten wir 0. Hingegen ist (1) falsch. Die Behauptung, es regne und es regne nicht, ist widersprüchlich und daher unsinnig. Unsinn und 0 ist keineswegs dasselbe. – Der Philosoph, dem dieses Beispiel entnommen ist, baut auf dieser Konfusion den „Beweis" auf, es könne widersprüchliche Axiomensysteme geben, die nützlich seien.

1.1.1

1) $A' = \{c, d, e\}$
2) $B' = \{\text{Mutter, Kinder}\}$
3) $C' = \{\text{Hühner, Enten, Vögel}\}$
4) $D' = \{\text{rot}\}$
5) $E' = \{\text{alle Tiere des Zirkus Knie, von Affe bis Zebra}\}$
6) $F' = \{\ \}$

1.1.3

1) 1. richtig 2. falsch 3. falsch 4. richtig
5. falsch 6. falsch 7. richtig

2) 1. Alfred, Berta, Christa, Daniel, Emil, Franz, Gisela
2. {Christa}, {Daniel}, {Christa, Daniel}, $\emptyset$

1.2.1

1) 1. $\{3\} = \{3\}$
2. $\{1\} \neq \{2\}$

2)
$$\begin{aligned} B \cap B' &= \emptyset \\ A &= \{1, 3\} \\ \{1, 3\} \cup \emptyset &= \{1, 3\} \\ \{1, 3\} &\neq \{1\} \end{aligned}$$

3) 1. $\{1,2\} = \{1,2\}$
2. $\emptyset = \emptyset$

4) 1. $\{1,3\} = A$
2. $\{1,3\} = A$
3. $\{3\} \cup \{2\} \cup \{1\} = 1$
4. $\emptyset \cup \{2\} \cup \{1\} \neq 1$

5) 1. $A \cap B$; $(A \cup B) \setminus (A' \cup B')$
2. A'; $B \setminus A$
3. $A' \cup B'$; $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

6) 1. $\{1,3\} = A$
2. $\{2,3\} = B$
3. $\{2\} = A'$
4. $\{2,3\} = B$
5. $\{1,2,3\} = A \cup B$
6. $\emptyset$

1.2.2

1) 1. $\{7\} = \{7\}$
2. $\{1\} \neq \{1,6,7\}$

2) 1. $\{1,4,5,6,7\} = \{1,4,5,6,7\}$
2. $\{4,6,7\} = \{4,6,7\}$
3. $\{4\} = \{4\}$

3) 1. $\{1\} = \{1\}$
2. $\{1,4,6\} = \{1,4,6\}$

4) 1. $\{1,4,5,6,7\}$
2. $\{1,3,6,7\}$
3. $\{4,5,6,7\}$

5) 1. $A \cap B$
2. $A \cap B \cap C$

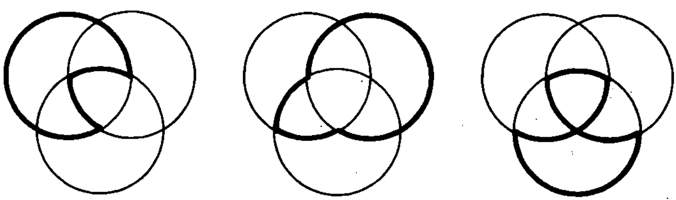
6) $\{1,6,7\} \neq \emptyset$
2. $\{1\} = \{1\}$
3. $\{2,4\} \neq \{1,2,4\}$

4. $\{4, 7\} = \{4, 7\}$
5. $\{1\} = \{1\}$

7) 1. $C \setminus B$
2. $B \setminus C$
3. $B \setminus (A \cap B \cap C)$
4. $(A \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C))$

8) 1. Philosophie
2. 1
3. C
4. $\emptyset$
5. $(A \cap B) \cup C$
6. $A \setminus B$

9)



1. 2. 3.

10) 1. $(A \cap B) \setminus C$ $\quad (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)$
2. $(A \cup C)'$ $\quad (B \setminus C) \setminus A$; $(B \setminus A) \setminus C$; $B \setminus (A \cup C)$
3. $B \setminus (A \cap C)$ $\quad B \setminus (A \cap B \cap C)$; $(B \setminus A) \cup (B \setminus C)$
$(B \setminus (A \cap B)) \setminus (B \cap C)$

11) Es sind drei Lösungen möglich, eine arithmetische, eine mengentheoretische und eine zeichnerische.
– Traditionelle Arithmetik:
(1) $18 - 3 = 15$ und
(2) $15 - 2 = 13$

Was geschieht mit dem gemeinsamen Element? Nichts, denn es muß nicht mehr abgezählt werden, weil es bei (1) und (2) schon abgezählt wurde. Diese Lösung ist korrekt, aber wohl kaum sonderlich einleuchtend.

– Mengenlehre

Wir gehen aus von den drei Mengen:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
$C = \{15, 16, 17, 18\}$

Die erste Zusatzbedingung sagt, daß der Durchschnitt $A \cap B$ genau 3 Elemente hat. Um dieser Bedingung nachzukommen, streichen wir in der Menge B die ersten drei Elemente und setzen an ihre Stelle 1, 2, 3. Dann haben wir die neue Menge

$$B_2 = \{1, 2, 3, 12, 13, 14\}$$

Die zweite Bedingung verlangt, daß der Durchschnitt $B \cap C$ genau zwei gemeinsame Elemente enthält. Wir streichen bei C die beiden ersten Elemente und setzen an ihre Stelle zwei, die in B_2 enthalten sind. Dann erhalten wir

$$C_2 = \{12, 13, 17, 18\}$$

Als letzte Bedingung muß ein Element allen drei Mengen gemeinsam sein. Geben wir ihm den Namen 1. Es ist in A und B_2 bereits enthalten und braucht nur in C_2 eingeführt zu werden. Wenn wir nun 17 durch 1 ersetzen, dann wäre die letztgenannte Bedingung erfüllt, jedoch von den übrigen träfe eine nicht mehr zu. Wir hätten jetzt als Durchschnitt von $B_2 \cap C_2$ drei Elemente, nämlich 12, 13, 1 statt nur 2. Deshalb setzen wir das Element 1 an die Stelle von 13, wobei 17 erhalten bleibt. Nun können wir noch die Platznummern in fortlaufender Reihenfolge anschreiben, und dann läßt sich an ihnen ablesen, wie viele Teilnehmer versammelt sind. Das ergibt:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$B = \{1, 2, 3, 9, 10, 11\}$
$C = \{1, 9, 12, 13\}$

Eine Kontrolle zeigt, daß die Mengenbildung A, B, C alle Bedingungen erfüllt, nämlich:

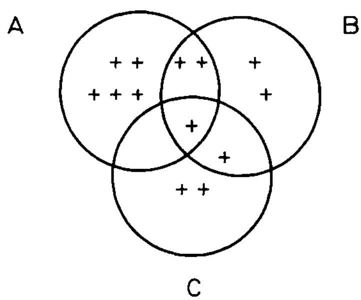
1. A hat 8 Elemente, B 6 und C 4.
2. $A \cap B = 3$ Elemente und zwar $\{1, 2, 3\}$
3. $B \cap C = 2$ Elemente, nämlich $\{1, 9\}$
4. $A \cap B \cap C = 1$ Element, unser $\{1\}$

Es sind also 13 Teilnehmer in der Kommission.

– Zeichnung

Der einfachste Lösungsweg führt über die Zeichnung. Wir gehen von den oben genannten Bedingungen aus. Die Darstellung erweist sich als äußerst einfach, sobald man gemerkt hat wie vorteilhaft es ist, den Weg rückwärts zu gehen.

Die Bedingung 4. erfüllen wir, indem wir ein „+" ins Feld 7 setzen. Für die 3. Bedingung ist bereits ein Element präjudiziert. Deshalb wird nur 1 „+" ins Feld 5 gesetzt. Entsprechend müssen 2 „+" ins Feld 4 gesetzt werden, um die Bedingung 2. zu erfüllen. Laut der 1. Bedingung enthält C 4 Elemente. Je eines steht im Feld 7 und 4. Deshalb setzen wir noch 2 „+" ins Feld 3. Die Menge B kommt nur auf 6 Elemente zu stehen, wenn wir noch zwei ins Feld 2 setzen. Schließlich bleibt noch die Menge A übrig, die zu den bestehenden 3 Elementen noch fünf weitere braucht und zwar ins Feld 1, um der Bedingung von 8 Elementen zu genügen. Dann liegt folgender Sachverhalt vor:



2.

1. ja	10. nicht wohlformuliert
2. Frage	11. Ausruf
3. ja	12. ja
4. ja	13. ja
5. Ausruf	14. ja
6. Aussageform	15. Frage
7. ja	16. ja
8. nicht wohlformuliert	17. Modalaussage (möglich)
9. ja	18. ja

2.1

1. O	5. D	9. U	13. –	17. E
2. F	6. B	10. –	14. A	18. –
3. –	7. –	11. G	15. –	19. –
4. –	8. S	12. R	16. R	20. K

2.2

1. $\neg M$	4. $B \leftrightarrow G$
2. $\neg G \wedge D$	5. $H \vee \neg B$
3. $R \rightarrow G$	6. $\neg H \rightarrow \neg W$

2.2.2

1)

1. $B \vee C$	5. $S \rightarrow O$	9. $H \wedge \neg F$	13. –
2. $H \wedge E$	6. $\neg(N \vee G)$	10. $O \vee \neg O$	14. $\neg W \rightarrow O$
3. $T \wedge \neg K$	7. $G \wedge E$	11. $M \wedge P$	15. $(K \wedge O) \wedge (L \wedge H)$
4. $O \rightarrow S$	8. $\neg T \leftrightarrow \neg G$	12. $V \wedge \neg M$	16. $P \rightarrow E$

2)

1. $\neg p \wedge q$	4. $p \rightarrow q$
2. $\neg p \wedge \neg q$	5. $p \rightarrow q$
3. $q \rightarrow p$	6. $q \rightarrow p$

3)
1. Wenn die Temperatur steigt und es geregnet hat, dann blüht der Kirschbaum.
2. Wenn die Temperatur steigt, dann hat es geregnet. Das ist gleichbedeutend mit: Die Temperatur steigt nicht oder es hat geregnet.
3. Es ist nicht der Fall, daß es geregnet hat, wenn der Kirschbaum blüht.
4. Die Temperatur steigt nicht oder wenn der Kirschbaum blüht, dann hat es geregnet.
5. Genau dann, wenn die Temperatur steigt, blüht der Kirschbaum nicht.
6. Wenn der Kirschbaum blüht, dann hat es geregnet und die Temperatur steigt nicht.

4) Die Formalisierung ist unkorrekt. Der Relativsatz ändert nichts an der Tatsache, daß es sich um eine einzige Aussage

handelt. Als solche muß sie durch einen Atomausdruck formalisiert werden, also ‚p' oder besser noch ‚S'.

2.3

1. $S \vee (\neg S \to M)$	7. $B \vee (\neg B \to A)$
2. $M \to (W \wedge \neg F)$	8. $((E \vee B \vee D) \to V) \wedge (H \to \neg V)$
3. $\neg (F \wedge W)$	9. $V \to ((E \vee B) \wedge \neg D)$
4. $\neg W \vee (W \to \neg A)$	10. $\neg U \vee (F \vee A)$
5. $\neg (W \wedge A)$	11. $(A \wedge \neg B) \vee (S \wedge Z)$
6. $(D \vee P) \to \neg H$	12. $(\neg (S \vee T) \wedge U) \to H \vee (O \wedge K)$

2.4.5

1)
1. w
2. Wer den Duft der Nelken unangenehm empfindet, für den ist die Aussage falsch, andernfalls wahr.

3.–10. 8. ist falsch, alle andern wahr.

2)

1. $M \wedge S$	w	6. $S \to M$	w
2. $P \wedge M$	f	7. $\neg M \to A$	w
3. $W \vee G$	w	8. $M \vee F$	w
4. $J \vee B$	w	9. $R \leftrightarrow \neg G$	unentscheidbar
5. $M \to A$	w	10. $P \to Q$	w

3) Falsch sind 2, 3, 11, 14, alle andern wahr.

4) a) Falsch ist 6, alle andern wahr.
b) 2. nein, 4. ja, 7. ja, 8. nein, 3. nein, 6. ja

2.5

1) 1.

(p	∨	p)	→	p
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0

2.

q	→	(p	∨	q)
1	1	1	1	1
0	1	1	1	0
1	1	0	1	1
0	1	0	0	0

3.

(p	∨	q)	→	(q	∨	p)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0

4.

(p	∨	(q	∨	r))	→	(q	∨	(p	∨	r)))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

5.

(q	→	r)	→	((p	∨	q)	→	(p	∨	r)))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0

4a.

(p	→	q)	→	((r	∨	q)	→	(p	∨	r))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0

2)

1.

p	$\rightarrow$	(q	$\rightarrow$	p)
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0

2.

(p	$\rightarrow$	(q	$\rightarrow$	r))	$\rightarrow$	(q	$\rightarrow$	(p	$\rightarrow$	r))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

3.

(p	$\rightarrow$	(q	$\rightarrow$	r))	$\rightarrow$	((p	$\rightarrow$	q)	$\rightarrow$	(p	$\rightarrow$	r))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

4.

(p	$\rightarrow$	q)	$\rightarrow$	($\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	p)
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0

5.

$\neg$	$\neg$	p	$\rightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

6.

p	$\rightarrow$	$\neg$	$\neg$	p
1	1	1	0	1
0	1	0	1	0

3) 1. $(S \rightarrow H) \leftrightarrow (\neg S \rightarrow \neg H)$

(S	→	H)	↔	(¬	S	→	¬	H)
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0

nicht äquivalent

2. a) $((W \wedge S) \rightarrow J) \leftrightarrow ((W \rightarrow S) \rightarrow J)$

((W	∧	S)	→	J)	↔	((W	→	S)	→	J)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

b) $((A \wedge S) \rightarrow J) \leftrightarrow (A \rightarrow (S \rightarrow J))$

((A	∧	S)	→	J)	↔	(A	→	(S	→	J))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Also b) ist identisch mit 2.

3. $B \rightarrow F$, verneint: $\neg (B \rightarrow F)$.

Matrix:

In Worten: Der Hund bellt und ich fürchte mich nicht.

¬	(B	→	F)	→	(B	∧	¬	F)
0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0

4. $(\neg F \rightarrow B) \rightarrow (F \rightarrow \neg B)$

(¬	F	→	B)	→	(F	→	¬	B)
0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0

nein.

5.

(p	∧	(p	→	q)	→	q)	↔	(p	→	((p	→	q)	→	q)))
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

4) 1.

(p	∨	q)	→	p
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

2.

(p	∨	q)	→	q
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

3.

(p	∨	q)	→	(p	∨	q)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0

4.

(p	∨	q)	→	(p	∧	q)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0

5.

(p	∨	q)	→	(¬	p	∨	q)
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1	0

6.

(p	∨	q)	→	(p	∧	¬	q)
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0

7.

(p	∨	q)	→	(¬	q	→	p)
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0

8.

(p	∨	q)	→	(p	→	q)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	p	0	0	1	0

Von ‚p ∨ q' werden 3. und 7. impliziert.

5)

1.

(p	→	q)	↔	(p	∨	q)
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0

2.

(p	→	q)	↔	(¬	p	∨	¬	q)
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0

3.

(p	→	q)	↔	(¬	p	∨	q)
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0

4.

(p	→	q)	↔	(p	∨	¬	q)
1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0

5.

(p	→	q)	↔	(p	→	q)
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

6.

(p	→	q)	↔	(¬	q	→	¬	p)
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0

2.5.1

1) Aus dem Kontext wird ersichtlich, daß die Aussage zu ergänzen ist: „Also dann befehle ich dir, bald zu gähnen und bald *nicht*

zu gähnen". Was immer der kleine Prinz jetzt tut – entweder gähnt er oder er gähnt nicht – er kann gar nicht gegen den Befehl des Königs verstoßen, denn dieser spricht eine Tautologie, eine Leerformel aus.

2) Ein Satz mit einem ‚x' ist eine Aussageform. Die Aussageform kann keine Leerform oder Tautologie sein, weil sie weder wahr noch falsch ist, solange das ‚x' nicht ersetzt ist. Leerformel heißt totalen Spielraum haben, aber nicht unbestimmten Wahrheitswert wie die Aussageform. Es gibt keinen Grund, warum Wittgenstein oder andere Logiker von einem bewährten Sprachgebrauch abrücken sollten.

3) 1. Nichts, das ist Konfusion.
2. Es gibt keine Widersprüche im Sein, nur in der Sprache.

4) (1) Eine Leerformel ist eine Tautologie. Bei ihr ist nicht die Rede von zwei Fällen, von A *und* (!) nicht A – das wäre eine Kontradiktion –, sondern von A oder nicht A. Damit sind ohne jegliche Einschränkung alle Fälle angedeutet. Da folglich kein Fall ausgeschlossen wird, so ist eine Leerformel nichtssagend. Wenn ich im Zweifel darüber bin, ob ich den Regenschirm mitnehmen soll oder nicht und mir jemand versichert, „es regnet oder es regnet nicht", so hat er mir über den Regen genau gleich viel Information geliefert, als wenn er geschwiegen hätte. Hier wird nur scheinbar über den Regen gesprochen.

(2) Es wird nicht das Bestehen *und* Nichtbestehen *eines* Sachverhaltes einkalkuliert, sondern das Bestehen *oder* Nichtbestehen *sämtlicher* Sachverhalte.

(3) richtig.

(4) Sollten formallogisch richtige Sätze bei der Anwendung auf empirische Bereiche falsch werden – etwa „$2 + 2 = 4$" –, dann würde sich die Theorie in der Praxis grundsätzlich nicht bewähren und niemand nähme sich die Mühe, eine Logik oder Mathematik zu entwickeln. Wer von den Planeten redet, von den sechs alten und den drei neuen, der legt die Addition zugrunde „$6 + 3 = 9$". Um diesen Sachverhalt auszudrücken, sind Additionen wie „$2 + 2 = 4$", „$3 + 3 = 6$", „$4 + 4 = 8$" usw. nicht anwendbar,

aber deswegen nicht falsch. Ein formallogisch richtiger Ausdruck ist nicht auf jede empirische Situation anwendbar; er kann indessen empirisch so wenig falsch werden, wie ein Kreis empirisch dreieckig sein könnte.

(5) Unser Autor überträgt die Konfusion von (4) auf ein praktisches Beispiel, auf den Satz (a): „Der Papst ist nicht katholisch". Selbstverständlich ist die Aussage (a) falsch. Aber erstens ist dieser Satz (a) nicht ableitbar aus der Disjunktion „Der Papst ist katholisch oder nicht katholisch", zweitens ist Satz (a) keine Leerformel und drittens steht Satz (a) überhaupt nicht zur Diskussion. Die Leerformel lautet: „Der Papst ist katholisch oder nicht katholisch" und dieser Satz ist immer wahr; zu dieser Erkenntnis gelange ich ohne zu wissen, wer der Papst ist und was katholisch heißt.

(6) Die Disjunktion wird bei Logikern und Mathematikern so definiert, daß sie wahr ist, wenn mindestens eines der Argumente wahr ist. Was unser Autor behauptet, ist schlichter Unsinn.

(7) „Leerformel" ist keine Disqualifikation, sondern ein Fachausdruck für den totalen Spielraum, also ein Synonym für Tautologie, d.h. für eine immer wahre Aussagenverknüpfung.

2.5.2

1) 1.

$$\begin{array}{ccccccc}
(p & \vee & p) & \rightarrow & (p & \wedge & p) \\
 & 1 & & 0 & & 0 & \\
0 & \underline{0} & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Eine Implikation ist nur falsch, wenn der Vordersatz wahr und der Nachsatz falsch ist. Beim Nachsatz, der hier aus einer Konjunktion besteht, genügt es, daß eines seiner Argumente falsch ist. Da aber beide Argumente ‚p' sind, führt deren Einsetzung der Werte bei der Disjunktion, also beim Vordersatz, zu einem Widerspruch mit der ursprünglichen Annahme.

2.

$$\begin{array}{cccccccc}
(p & \rightarrow & q) & \rightarrow & (\neg & p & \vee & q) \\
 & 1 & & 0 & & & 0 & \\
1 & \underline{0} & 0 & & 0 & & & 0
\end{array}$$

3.

¬	(p	∧	q)	→	(¬	p	∨	¬	q)
1				0			0		
$\underline{0}$	1	1	1		0			0	

4.

(p	↔	q)	→	((r	∧	p)	↔	(q	∧	r)
	1		0	1	1	1	0	0	0	1
1	$\underline{0}$	0								

5.

(p	→	(¬	q	↔	r))	→	((p	∧	r)	→	¬	q)
	1	0	1			0		1		0	0	1
1	$\underline{0}$			0								

6.

(p	→	(¬	q	∨	p))	→	(q	∧	¬	p)
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1

Diese Einsetzung ist widerspruchsfrei. Daher haben wir es bei 6. nicht mit einem logischen Gesetz zu tun.

7.

((p	∨	q)	→	((p	∧	q)	∨	(p	∧	¬	r))
1	1	0	0		0		0		0		

führt zu keinem Widerspruch

8.

((p	∨	q)	→	r)	→	((p	→	r)	∧	(q	→	r))
			1		0				0			
	1		$\underline{0}$	0		0	1	0		1	0	0

2)

[((U	∧	G)	→	H)	∧	(O	→	¬	G)	∧	(F	→	¬	H)	→	((U	∧	F)	→	O)]
			1				1					1			0				0	
1	0	0		0		0		1	0		1		1	0		1	1	1		0

U = 1
G = 0
H = 0
O = 0
F = 1

Dieses Beispiel stammt aus dem Mittelalter. Ockham hielt es für ein logisches Gesetz. Darin hat er sich zwar getäuscht. Aber erstens ist es bewundernswert, welch hohen Stand die mittelalterliche Logik erreicht hatte, da man sich immerhin an fünf Variable heranwagte, und zweitens zeigt die vollständige Auswertung mit der Wahrheitstafel, daß von 32 Zeilen eine einzige falsch ist, genau jene, auf die wir mit der teilweisen Wahrheitstafel gestoßen sind. Duns Scotus hat dies erkannt; er heißt nicht zu Unrecht Doctor subtilis.

3) 1, 4, 7, 9, 10 wahr, die übrigen falsch.

2.6.1

1)

1.	$S \rightarrow F$	
2.	S	$/\therefore F$
3.	F	2, 1, MP

2)

1.	$L \rightarrow E$	
2.	E	$/ L$
3.	L	–

3) 3. $f \vee s$ 2, 1, MP

4) Aus „A" folgt bestimmt nicht „B". Gleichwohl handelt es sich um einen korrekten Schluß. Ausführlich dargestellt, verläuft er so:

1.	$A \rightarrow B$	
2.	A	$/\therefore B$
3.	B	1, 2, MP

Die erste Prämisse wird als selbstverständlich vorausgesetzt und deshalb nicht ausgesprochen. Das Einflechten von unausgesprochenen Prämissen ist im täglichen Umgang üblich. So sagen wir auch „Müller hat den Wein bestellt, also zahlt er ihn". Das Zahlen ist keine logische Folge aus der Bestellung; sie wird es erst, weil bei dieser Gruppe die zusätzliche Regel gilt: Wer bestellt hat, bezahlt.

2.6.2

1)

1.	$G \rightarrow S$	
2.	$\neg S$	$/\therefore \neg G$
3.	$\neg G$	2, 1, MT

2)	1. $S \rightarrow \neg E$	
	2. E	$/\therefore\ - S$
	3. $\neg S$	2, 1, MT: Also schneit es nicht.
3)	3. $\neg (p \vee q)$	2, 1, MT
4)	1. $G \rightarrow V$	
	2. $\neg G \rightarrow E$	
	3. $\neg V$	$/\therefore E$
	4. $\neg G$	3, 1, MT
	5. E	4, 2, MP
5)	$\neg$ Aoder D	
6)	1. $H \rightarrow B$	
	2. B	/ H falsch
7)	1. $I \rightarrow E$	
	2. $\neg I$	/ $\neg$ E falsch
8)	1. $\neg Z \rightarrow W$	
	2. Z	/ –
9)	1. $A \rightarrow D$	
	2. D	/ –
10)	1. $O \rightarrow \neg U$	
	2. $\neg U$	/ –

11) Die ersten zwei Zeilen tragen nichts zur Deduktion bei. Deshalb setzen wir mit der Formalisierung erst bei der 3. Zeile ein.

1. $(E \wedge Z) \rightarrow (D \wedge V)$	
2. $\neg (E \wedge Z)$	$/ \neg (D \wedge V)$
3. –	

Die Behauptung ‚$\neg (D \wedge V)$' läßt sich nicht ableiten. Folgt daraus, daß Goethe ein schlechter Logiker war? Vielleicht gerade nicht, denn es ist Mephistopheles – der Teufel ist von Natur aus ein Lügner –, dem dieser logische Fehler in den Mund gelegt wird.

2.6.3

1)	1. $D \rightarrow L$	
	2. $F \wedge \neg L$	$\underline{/\therefore\ \neg D}$
	3. $\neg L$	2b, Simpl.
	4. $\neg D$	3, 1, MT
2)	1. $\neg A \rightarrow S$	
	2. $H \wedge K \wedge R \wedge \neg A$	$\underline{/\therefore\ S}$
	3. $\neg A$	2d, Simpl.
	4. S	3, 1, MP
3)	1. $(F \rightarrow C) \wedge (E \rightarrow W)$	
	2. E	$\underline{/\therefore\ W}$
	3. $E \rightarrow W$	1b, Simpl.
	4. W	2, 3, MP
4)	1. $D \wedge F \wedge J$	
	2. $\neg A \rightarrow \neg F$	$\underline{/\therefore\ A}$
	3. F	1b, Simpl.
	4. $\neg\neg A$	3, 2, MT
5)	$(H \vee E) \rightarrow (S \vee T \vee R)$	
	2. $\neg (S \vee T \vee R)$	$\underline{/\therefore\ \neg (H \vee E)}$
	3. $\neg (H \vee E)$	2, 1, MP
6)	1. $\neg N \rightarrow O$	
	2. $P \wedge \neg O$	
	3. $N \rightarrow \neg A$	$\underline{/\therefore\ \neg A}$
	4. $\neg O$	2b, Simpl.
	5. $\neg\neg N$	4, 1, MT
	6. $\neg A$	5, 3, MP

2.6.4

1)	1. $K \wedge U$	
	2. $B \wedge N$	
	3. $(N \wedge K) \rightarrow S$	$\underline{/\therefore\ S \wedge U}$
	4. N	2b, Simpl.
	5. K	1a, Simpl.
	6. $N \wedge K$	4, 5, Konj.
	7. S	6, 3, MP
	8. U	1b, Simpl.
	9. $S \wedge U$	7, 8, Konj.
2)	5. p	2a, Simpl.
	6. r	3a, Simpl.
	7. q	2b, Simpl.
	8. $r \wedge q$	6, 7, Konj.
	9. $s \rightarrow t$	8, 4, MP
	10. $\neg s$	9, 1, MT
	11. $p \wedge \neg s$	5, 10, Konj.
3)	6. p	4b, Simpl.
	7. q	6, 1, MP
	8. $\neg t \wedge u$	2b, Simpl.
	9. $\neg t$	8a, Simpl.
	10. $\neg y$	9, 5, MT
	11. $q \wedge \neg y$	7, 10, Konj.
4)	5. $t \wedge \neg r$	3b, Simpl.
	6. $\neg r$	5b, Simpl.
	7. $\neg (p \rightarrow q)$	6, 1, MT
	8. s	4b, Simpl.
	9. t	5a, Simpl.
	10. $s \wedge t$	8, 9, Konj.
	11. u	10, 2, MP
	12. $u \wedge \neg (p \rightarrow q)$	11, 7, Konj.

2.6.5

1)

1. $E \to Z$	
2. $Z \to \neg K$	$/\therefore E \to \neg K$
3. $E \to \neg K$	1, 2, HS

2)

1. $\neg F$	
2. $G \to F$	
3. $M \to G$	$/\therefore \neg M$
4. $M \to F$	3, 2, HS
5. $\neg M$	1, 4, MT

3)

1. $V \to Z$	
2. $F \to V$	
3. $R \to F$	$/\therefore R \to Z$
4. $R \to Z$	3, 2, 1, HS

4)

1. $(B \land H) \to S$	
2. G	
3. $R \to (B \land H)$	
4. $G \to R$	$/\therefore S$
5. $G \to S$	4, 3, 1, HS
6. S	2, 5, MP

5)

1. $\neg L \to E$	
2. $\neg S$	
3. $E \to S$	
4. $H \to \neg L$	$/\therefore \neg H$
5. $H \to S$	4, 1, 3, HS
6. $\neg H$	2, 5, MT

6)

1. $A \to P$	
2. $R \land V$	
3. $M \to A$	
4. $V \to M$	$/\therefore P$
5. $V \to P$	4, 3, 1, HS
6. V	2b, Simpl.
7. P	6, 5, MP

7) a) 6. $G \to \neg N$ 1, 2, 3, 4, 5, HS.
In Worten: Wo Glaube, da keine Not.

b) Wir haben die Regel HS nur für Aussagen definiert, nicht für Einzelworte. Der Schluß aus 7) bleibt dennoch gültig, weil die Worte abgekürzte Aussagen sind. „wo Glaube" = „wo der Glaube gelebt wird" oder „wenn der Glaube gelebt wird" usw.

8)

6. $t \to q$	5, 3, 1, HS
7. t	2c, Simpl.
8. q	7, 6, MP

9)

5. $\neg p$	4b, Simpl.
6. $q \to r$	5, 1, MP
7. $r \to s$	6, 2, MP
8. $q \to s$	6, 7, HS
9. $t \to (s \to u)$	8, 3, MP
10. t	4a, Simpl.
11. $s \to u$	10, 9, MP
12. $q \to u$	8, 11, HS

2.6.6

1)

1. $S \vee A$	
2. $A \to V$	
3. $M \wedge \neg V$	$/ \therefore S$
4. $\neg V$	3b, Simpl.
5. $\neg A$	4, 2, MT
6. S	5, 1, DS

2)

1. $R \vee \neg R$	
2. R	$/ \neg R$
3. R	1, 2, DS

‚$\neg R$' läßt sich aus den Prämissen 1 und 2 nicht herausholen. Aufgrund der Regel DS folgt trivialerweise ‚R'.

3)

1. $P \vee V$	
2. $V \to A$	
3. $C \wedge \neg A$	$/ \therefore P$
4. $\neg A$	3b, Simpl.
5. $\neg V$	4, 2, MT
6. P	6, 1, DS

4)

1. $F \wedge M$	
2. $H \rightarrow \neg L$	
3. $H \vee \neg M$	/∴ $F \wedge \neg L$
4. F	1a, Simpl.
5. M	1b, Simpl.
6. H	5, 3, DS
7. $\neg L$	6, 2, MP
8. $F \wedge \neg L$	4, 7, Konj.

5)

1. $S \rightarrow I$	
2. $E \wedge \neg D \wedge W$	
3. N	
4. $S \vee \neg E$	/∴ $N \wedge I$
5. E	2a, Simpl.
6. S	5, 3, DS
7. I	6, 1, MP
8. $N \wedge I$	4, 7, Konj.

6)

1. $P \vee A$	
2. $A \rightarrow B$	
3. $P \rightarrow W$	
4. $(F \vee Z) \wedge S \wedge C \wedge \neg W$	/∴ B
5. $\neg W$	4d, Simpl.
6. $\neg P$	5, 3, MT
7. A	6, 1, DS
8. B	7, 2, MP

2.6.7

1)

5. q	4b, Simpl.
6. $q \vee t$	5, Add.

2)

5. $\neg p$	4, 1, MT
6. r	5, 2, DS
7. $r \rightarrow s$	6, 3, MP
8. s	6, 7, MP
9. $s \vee q$	8, Add.

3)	4. q	1b, Simpl.
	5. $r \wedge s$	4, 2, MP
	6. r	5a, Simpl.
	7. $r \vee s$	6, Add.
	8. $s \rightarrow p$	7, 3, MP
4)	5. q	1b, Simpl.
	6. $q \vee r$	5, Add.
	7. $p \rightarrow t$	6, 3, MP
	8. $s \rightarrow t$	4, 7, HS

2.6.8

1)	1. $(U \rightarrow M) \wedge (W \rightarrow S)$	
	2. $U \vee W$	$/\therefore M \vee S$
	3. $M \vee S$	1, 2, KD
2)	1. $P \rightarrow B$	
	2. $E \rightarrow W$	
	3. $T \rightarrow K$	
	4. $E \vee R$	
	5. $R \rightarrow V$	$/\therefore W \vee V$
	6. $(E \rightarrow W) \wedge (R \rightarrow V)$	2, 4, Konj.
	7. $W \vee V$	4, 6, KD
3)	1. $F \vee S \vee K$	
	2. $(S \rightarrow F) \wedge (K \rightarrow L)$	
	3. $(F \vee L) \rightarrow (F \vee K)$	
	4. $\neg F$	$/\therefore K$
	5. $S \vee K$	4, 1, DS
	6. $F \vee L$	5, 2, KD
	7. $F \vee K$	6, 3, MP
	8. K	4, 7, DS
4)	6. $(q \rightarrow r) \wedge (s \rightarrow t)$	5, 1, Konj.
	7. $\neg p$	2a, Simpl.
	8. $\neg r$	2b, Simpl.
	9. $q \vee s$	7, 8, 3, DS
	10. $u \vee t$	8, 6, KD
	11. $p \vee q \vee r$	10, 4, MP
	12. q	11, 7, 8, DS

2.6.9

1)	6. $(p \to q) \wedge (r \to s)$	2, 3, Konj.
	7. $\neg p \vee \neg r$	4, 6, DD
	8. $\neg r$	1, 7, DS
	9. $\neg (t \wedge u)$	8, 5, MT
2)	5. $(p \to s) \wedge (r \to q)$	2, 4, Konj.
	6. $\neg s \vee \neg q$	3, Add.
	7. $\neg p \vee \neg r$	6, 5, DD
	8. $\neg p \vee \neg r \vee t$	7, Add.
	9. z	8, 1, MP

Statt 2) auch 3)

3)	5. $\neg p$	3, 4, MT
	6. $\neg p \vee \neg r \vee t$	5, Add.
	7. z	6, 1
4)	6. $(s \to \neg q) \wedge (t \to \neg r)$	5, 1, Konj.
	7. $q \vee r$	2, 4, DS
	8. $\neg s \vee \neg t$	7, 6, DD
	9. $p \vee m$	3, 8, MP
	10. m	9, 2, DS

2.6.13

4. $p \vee q$	1, 3, DS
5. $q \vee q$	4, 2, KD
6. q	5, Idemp.

2.6.14

1)	1. $A \to \neg S$	
	2. $R \to S$	$/.\therefore\ A \to \neg R$
	3. $\neg S \to \neg R$	2, Kontr.
	4. $A \to \neg R$	1, 3, HS
2)	5. $\neg p \vee q$	2, Add.
	6. $(u \leftrightarrow v) \to \neg w$	5, 4, MP
	7. $\neg p \vee q \vee \neg r$	5, Add.

	8. $\neg s \rightarrow (t \leftrightarrow u)$	7, 1, MP
	9. $\neg s \rightarrow \neg w$	8, 6, HS
	10. $w \rightarrow s$	9, Kontr.

2.6.15

1)	4. $\neg q \vee r$	2, Komm.
	5. $q \rightarrow r$	4, Impl.
	6. $p \rightarrow r$	1, 5, HS
	7. r	3, 6, MP
2)	1. $T \vee K$	
	2. $P \vee \neg K$	$/\therefore T \vee P$
	3. $\neg T \rightarrow K$	1, Impl.
	4. $\neg K \vee P$	2, Komm.
	5. $K \rightarrow P$	4, Impl.
	6. $\neg T \rightarrow P$	3, 5, HS
	7. $T \vee P$	6, Impl.
3)	6. $p \rightarrow s$	3, 5, HS
	7. $s \rightarrow \neg (q \rightarrow \neg x)$	4, Impl.
	8. $\neg (q \rightarrow \neg x)$	1, Kontr.
	9. $v \rightarrow \neg (t \wedge u)$	2, Kontr.
	10. $p \rightarrow \neg (t \wedge u)$	6, 7, 8, 9, HS
	11. $\neg p \vee \neg (t \wedge u)$	10, Impl.
4)	1. $(T \vee I) \vee K$	
	2. $T \rightarrow I$	$/\therefore K \vee I$
	3. $T \vee (I \vee K)$	1, Assoz.
	4. $\neg T \rightarrow (I \vee K)$	3, Impl.
	5. $\neg I \rightarrow \neg T$	2, Kontr.
	6. $\neg I \rightarrow (I \vee K)$	5, 4, HS
	7. $\neg\neg I \vee (I \vee K)$	6, Impl.
	8. $(I \vee I) \vee K$	7, Assoz.
	9. $I \vee K$	8, Idemp.
	10. $K \vee I$	9, Komm.

2.6.16

1)	3. $\neg p \vee (q \wedge r)$	1, Impl.
	4. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$	3, Dist.
	5. $(r \vee p) \wedge (r \vee \neg q)$	2, Dist.
	6. $(\neg r \rightarrow p) \wedge (\neg r \rightarrow \neg q)$	5, Impl.
	7. $\neg p \vee q$	4a, Simpl.
	8. $r \vee r$	7, 6, DD
	9. r	8, Idemp.
2)	3. $\neg p \wedge (s \wedge \neg(\neg p \wedge q))$	2, Assoz.
	4. $\neg p$	3a, Simpl.
	5. $p \vee (q \vee (r \wedge s))$	1, Assoz.
	6. $q \vee (r \wedge s)$	5, 4, DS
	7. $(q \vee r) \wedge (q \vee s)$	6, Dist.
	8. $q \vee r$	7a, Simpl.
	9. $\neg p \wedge (q \vee r)$	4, 8, Konj.
	10. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$	9, Dist.
	11. $\neg(\neg p \wedge q)$	2b, Simpl.
	12. $\neg p \wedge r$	11, 10, DS
1)	1. $D \leftrightarrow B$	
	2. $\neg D$	$\underline{/ \therefore \neg B}$
	3. $(D \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow D)$	1, Äquiv.
	4. $B \rightarrow D$	3b, Simpl.
	5. $\neg B$	2, 4, MT
2)	5. $\neg s$	4b, Simpl.
	6. $r \rightarrow s$	1a, Simpl.
	7. $\neg r$	5, 6, MT
	8. $\neg p$	4a, Simpl.
	9. $((\neg q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \wedge$ $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r))$	2, Äquiv.
	10. $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$	9b, Simpl.
	11. $\neg q \rightarrow r$	8, 10, MP
	12. q	7, 11, MT
	13. $q \vee u$	12, Add.

2.6.18

1)	1. $\neg (A \wedge B) \vee D$	$/ \therefore A \rightarrow (\neg B \vee D)$
	2. $(A \wedge B) \rightarrow D$	1, Impl.
	3. $A \rightarrow (B \rightarrow D)$	2, Exp.
	4. $A \rightarrow (\neg B \vee D)$	3, Impl.

2.6.19

4. $\neg p \vee (p \wedge q)$	1, Komm.
5. $p \rightarrow (p \wedge q)$	4, Impl.
6. $p \rightarrow q$	5, Abs.
7. $q \rightarrow \neg r$	2, Impl.
8. $\neg r \rightarrow (p \wedge q)$	3, Kontr.
9. $q \rightarrow (p \wedge q)$	7, 8, HS
10. $q \rightarrow (q \wedge p)$	9, Komm.
11. $q \rightarrow p$	10, Abs.
12. $p \rightarrow q$	6, 11, Äquiv.
13. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	12, Äquiv.

2.6.20

1)	1. $\neg (\neg Z \wedge \neg S)$	
	2. $\neg S$	$/ \therefore Z$
	3. $\overline{\overline{Z} \wedge \overline{S}}$	1, Hilbert
	4. $Z \vee S$	3, De M.
	5. Z	4, 2, DS
2)	1. $(B \rightarrow L) \wedge (A \wedge S)$	
	2. $(S \wedge L) \rightarrow G$	
	3. $\neg G$	$/ \therefore B \rightarrow \neg A$
	4. $\neg (S \wedge L)$	3, 2, MT
	5. $\neg S \vee \neg L$	4, De M.
	6. $\neg L \vee \neg S$	5, Komm.
	7. $\neg B \vee \neg A$	6, 2, DD
	8. $B \rightarrow \neg A$	7, Impl.

2.6.21

1)

1. $(D \vee Z) \to (S \wedge W)$	
2. $\neg W$	$/ \therefore \neg Z$
3. $\neg W \vee \neg S$	2, Add.
4. $\neg S \vee \neg W$	3, Komm.
5. $\neg (S \wedge W)$	4, De M.
6. $\neg (D \vee Z)$	5, 1, MT
7. $\neg D \wedge \neg Z$	6, De M.
8. $\neg Z$	7b, Simpl.

2)

1. $\neg (p \leftrightarrow q)$
2. $(p \to q) \wedge (q \to p)$
3. $(p \to q) \vee (q \to p)$
4. $(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{q} \vee p)$
5. $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

3)

1. $(A \to G) \wedge (F \to E)$	
2. $A \vee F$	
3. $(A \to \neg E) \wedge (F \to \neg G)$	$/ \therefore E \leftrightarrow \neg G$
4. $G \vee E$	1, 2, DD
5. $\neg G \to E$	4, Impl.
6. $E \to \neg A$	3a, Simpl. Kontr.
7. $\neg A \to F$	2, Impl.
8. $F \to \neg G$	3b, Simpl.
9. $E \to \neg G$	6, 7, 8, HS
10. $(E \to \neg G) \wedge (\neg G \to E)$	9, 2, Konj.
11. $E \leftrightarrow \neg G$	10, Äquiv.

4)

1. $(N \wedge F) \to S$	
2. $N \wedge E$	
3. $\neg (F \to T)$	
4. $S \to \neg (\neg W \vee \neg E)$	$/ \therefore F \wedge W$
5. $F \vee T$	3, Impl.
6. $F \wedge \neg T$	5, De M.
7. F	6a, Simpl.
8. N	2a, Simpl.
9. $N \wedge F$	8, 7, Konj.
10. S	9, 1, MP
11. $\neg (\neg W \vee \neg E)$	10, 4, MP

	12. $W \wedge E$	11, De M.
	13. W	12a, Simpl.
	14. $F \wedge W$	7, 13, Konj.
5)	1. $M \vee R \vee P$	
	2. $C \rightarrow B$	
	3. $M \rightarrow P$	
	4. $(P \vee E) \rightarrow (P \vee R)$	
	5. $\neg P$	
	6. $R \rightarrow C$	/∴ B
	7. $M \vee R$	5, 1, DS
	8. $(M \rightarrow P) \wedge (R \rightarrow C)$	3, 5, Konj.
	9. $P \vee C$	7, 8, KD
	10. C	9, 5, DS
	11. $(C \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	2, Äquiv.
	12. $C \rightarrow B$	11a, Simpl.
	13. B	10, 12, MP
6)	1. $(G \wedge S) \vee (M \wedge C)$	
	2. $\neg G$	/∴ C
	3. $\neg G \vee \neg S$	2, Add.
	4. $\neg (G \wedge S)$	3, De M.
	5. $M \wedge C$	4, 1, DS
	6. C	5b, Simpl.

7)	6.	3a, Simpl.
	7.	6, Add.
	8.	7, Komm.
	9.	8, 1, MP
	10.	5, Impl.
	11.	10, De M.
	12.	11b, Simpl.
	13.	9, 12, Konj.
8)	3.	1, Impl.
	4.	3, Komm.
	5.	4, Assoz.
	6.	5, Idemp.
	7.	6, Komm.
	8.	2, Äquiv.

9. 7, De M.
10. 9, 8, DS

9) 4. 1, Impl.
5. 4, Idemp.
6. 2, Import.
7. 5, 6, MT
8. 7, De M.
9. 8, 3, DD
10. 9, Impl.

10) 7. 3b, Simpl.
8. 1a, Simpl.
9. 8, Kontr.
10. 2, Kontr.
11. 5, 10, MP
12. 5, De M.
13. 6, Impl.
14. 12, 13, DS
15. 14, 11, Konj.
16. 15, 4, MP
17. 16, Impl.
18. 3a, Simpl.
19. 1b, Simpl.
20. 19, Kontr.
21. 7, 9, 17, 18, 20, HS

11) a) 1. $\neg A \rightarrow \neg C$
2. $\neg C \rightarrow (P \wedge G)$
3. $\neg A \rightarrow (P \wedge G)$ 1, 2, HS
Wenn es keine Auferstehung der Toten gibt, dann ist unsere Predigt leer, und auch der Glaube ist leer.
b) 4. C Zusatzprämisse (1 Kor. 15, 20)
5. A 4, 1, MT Es gibt eine Auferstehung der Toten
ba) Es läßt sich ‚A' ableiten
bb) Über ‚G' folgt nichts, weder Bestätigung noch Widerlegung.
c) ‚$\neg$ A' läßt sich nicht beweisen; es würde auch im Wider-

spruch stehen zu ‚A'. Also hat Paulus nicht gesagt, es gebe keine Auferstehung der Toten.

d) ‚$A \to C$' ist ebenfalls nicht abzuleiten. Folglich hält Paulus die Auferstehung der Toten nicht für die Voraussetzung der Auferstehung Christi.

e)

	3. $C \to A$	1, Kontr.
	4. A	2, 3, MP

12)	4. $\neg(\neg p \to q)$	2a, Simpl.
	5. $\neg(p \vee q)$	4, Impl.
	6. $\neg p \wedge \neg q$	5, De M.
	7. $\neg q$	6b, Simpl.
	8. $\neg q \vee \neg y$	7, Add.
	9. $z \to (s \wedge \neg t)$	8, 1, MP
	10. $\neg q \wedge \neg p$	6, Komm.
	11. $(s \wedge \neg t) \to x$	10, 3, MP
	12. $z \to x$	9, 1, HS
	13. $\neg z \vee x$	12, Impl.
	14. $\neg(\neg x \wedge z)$	14, De M.

13)	4. $p \vee \neg q$	1, Impl.
	5. $\neg q \vee p$	4, Komm.
	6. $\neg q \vee p \vee h$	5, Add.
	7. $h \vee \neg q \vee p$	6, Komm.
	8. $(h \vee \neg q) \vee p$	7, DN
	9. $(h \vee \neg q) \to p$	8, Impl.
	10. $\neg(h \vee \neg q) \to p$	9, Hilbert

14)		/∴ $t \to r$
	6. $\neg(q \wedge \neg r)$	4, 1, DS
	7. $\neg q \vee r$	6, De M.
	8. $q \to r$	7, Impl.
	9. $\neg(t \wedge \neg q)$	5, 3, MP
	10. $\neg t \vee q$	9, De M.
	11. $t \to q$	10, Impl.
	12. $t \to r$	11, 8, HS
	13. $\neg t \vee r$	12, Impl.
	14. $\neg(t \wedge \neg r)$	13, De M.

15)	4. $p \vee (q \wedge r)$	1, Impl.
	5. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	4, Dist.
	6. $\overline{(\bar{s} \vee \bar{t})} \vee (\neg t \wedge \neg p)$	2, Impl.
	7. $(s \wedge t) \vee (\bar{t} \wedge \bar{p})$	6, De M.
	8. $(s \vee \bar{t}) \wedge (s \vee \bar{p}) \wedge (t \vee \bar{t}) \wedge (t \vee \bar{p})$	7, Dist.
	9. $p \vee r$	5b, Simpl.
	10. $\neg p \rightarrow r$	9, Impl.
	11. $\overline{(t \vee s)} \vee r$	3, Impl.
	12. $(\bar{t} \wedge \bar{s}) \vee r$	11, De M.
	13. $r \vee (\bar{t} \wedge \bar{s})$	12, Komm.
	14. $(r \vee \bar{t}) \wedge (r \vee \bar{s})$	13, Dist.
	15. $r \vee \bar{s}$	14b, Simpl.
	16. $\bar{s} \vee r$	15, Komm.
	17. $(\neg p \rightarrow r) \wedge (s \rightarrow r)$	10, 16, Konj.
	18. $s \vee \bar{p}$	8b, Simpl.
	19. $\neg p \vee s$	18, Komm.
	20. $r \vee r$	19, 17, KD
	21. r	20, Idemp.
16)	3. $(\neg q \vee p) \vee p$	1, Komm.
	4. $\neg q \vee (p \vee p)$	3, Ass.
	5. $\neg q \vee p$	4, Idemp.
	6. $(\neg p \vee q) \vee q$	2, Komm.
	7. $\neg p \vee (q \vee q)$	6, Ass.
	8. $\neg p \vee q$	7, Idemp.
	9. $(\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$	5, 8, Konj.
	10. $(\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) \vee (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$	9, Dist.
	11. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	10, Komm.

2.7

1) 1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
   2. $\bar{p} \vee (\bar{q} \vee p)$
   3. $\bar{p}\bar{q}p$

2) 1. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow m)$
   2. $\bar{p} \vee q \vee \bar{q} \vee m$
   3. $\bar{p}q\bar{q}m$

3) 1. $\underline{(p \vee q)} \to (q \vee p)$
2. $\overline{(p \vee q)} \vee (q \vee p)$
3. $(\bar p \cdot \bar q)\, qp$
4. $\bar p q p \cdot \bar q q p$

4) 1. $\underline{(p \to q)} \to (\neg q \to \neg p)$
2. $\overline{(\bar p \vee q)} \vee (\bar{\bar q} \vee \bar p)$
3. $(p \cdot \bar q)\, q \bar p$
4. $p q \bar p \cdot \bar q q \bar p$

5) 1. $\underline{(p \to (q \to r}))\ \underline{\to ((p \to q)} \to (p \to r))$
2. $\overline{(\bar p \vee (\bar q \vee r))} \vee (\overline{(\bar p \vee q)} \vee (\bar p \vee r))$
3. $(p \cdot (q \cdot \bar r)) \vee (p \cdot \bar q) \vee (\bar p \vee r)$
4. $(p \cdot q \cdot \bar r) \vee p \bar p r \cdot \bar q \bar p r$
5. $p \bar q \bar p r \cdot q \bar q \bar p r \cdot \bar r \bar q \bar p r$

6) 1. $(\underline{(p \to q) \wedge (q \to r}))) \to (p \to r)$
2. $\overline{(\underline{(\bar p \vee q)} \wedge \underline{(\bar q \vee r)})} \vee (\bar p \vee r)$
3. $\overline{(\bar p \vee q)} \vee \overline{(\bar q \vee r)} \vee \bar p r$
4. $(p \cdot \bar q) \vee (q \cdot \bar r)\, \bar p r$
5. $(p \cdot \bar q) \vee q \bar p r \cdot \bar r \bar p r$
6. $p q \bar p r \cdot \bar q q \bar p r$

7) 1. $\underline{((p \to q) \wedge} \neg q) \to \neg p$
2. $\overline{\underline{(\bar p \vee q)} \wedge \bar q} \vee \bar p$
3. $\overline{\bar p \vee q} \vee \bar{\bar q} \vee \bar p$
4. $(p \cdot \bar q)\, q \bar p$
5. $p q \bar p \cdot \bar q q \bar p$

8) 1. $\underline{(q \vee \neg ((p \to r) \to (\neg q \to \neg p)))} \to \neg (p \wedge \neg p)$
2. $\overline{(q \vee \overline{(\underline{(p \to q)} \to (\neg q \to \neg p))}} \vee \bar p \vee p$
3. $\bar q \cdot \overline{(\bar p \vee q)} \vee (q \vee \bar p) \vee \bar p p$
4. $\bar q \cdot (p \cdot \bar q) \vee q \bar p \bar p p$
5. $\bar q q \bar p \bar p p \cdot p q \bar p \bar p p \cdot \bar q q \bar p \bar p p$

9) 1. $\neg (p \to q) \leftrightarrow (r \to \neg s)$
2. $(\underline{\underline{\neg (p \to q)}} \to \overline{(r \to \neg s))} \wedge \overline{((r \to \neg s)} \to \neg (p \to q))$
3. $(\overline{\overline{(\bar p \vee q)}} \vee (\bar r \vee \bar s)) \wedge \overline{(r \vee \bar s)} \vee \overline{(\bar p \vee q)}$
4. $(\bar p \vee q) \vee (\bar r \vee \bar s) \wedge (\bar r \wedge s) \vee (p \wedge \bar q)$
5. $\bar p q \bar r s \wedge (\bar r p \cdot \bar r \bar q \cdot s p \cdot s \bar q)$
6. $\bar p q \bar r s \bar r p \cdot \bar p q \bar r s \bar r \bar q \cdot \bar p q \bar r s s p \cdot \bar p q \bar r s s \bar q$

10) 1. $(p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
2. $\overline{(\bar{p} \vee (\bar{q} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee q))} \vee (\bar{p} \vee r)$
3. $\overline{(\bar{p} \vee (\bar{q} \vee r)} \vee \overline{(\bar{p} \vee q))} \vee \bar{p}r$
4. $(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee (p\bar{p}r \cdot \bar{q}\bar{p}r)$
5. $(p \cdot q \cdot \bar{r}) \vee \bar{q}\bar{p}r$
6. $p\bar{q}\bar{p}r \cdot q\bar{q}\bar{p}r \cdot \bar{r}\bar{q}\bar{p}r$

2.8.1

1)	2. $A \vee \neg B$	1, Add.
	3. $\neg B \vee A$	2, Komm.
	4. $B \rightarrow A$	3, Impl.
2.	1. $p \rightarrow q$	$/\therefore \neg q \rightarrow \neg p$
	2. $\neg q$	KA
	3. $\neg p$	2, 1, MT
	4. $\neg q \rightarrow \neg p$	2-3, KB
3)	4. p	KA
	5. $\neg s$	4, 3, MP
	6. q	5, 2, DS
	7. $p \rightarrow q$	4–6, KB
	8. r	7, 1, MP
4)	1. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$/\therefore p \rightarrow r$
	2. p	KA
	3. $p \rightarrow q$	1a, Simpl.
	4. q	2, 3, MP
	5. $q \rightarrow r$	1b, Simpl.
	6. r	4–5, MP
	7. $p \rightarrow r$	2–6, KB
5)	4. s	KA
	5. $t \wedge p$	4, 2, MP
	6. p	5b, Simpl.
	7. $q \rightarrow r$	6, 1, MP
	8. r	3, 7, MP
	9. $s \rightarrow r$	4–8, KB

6)	1. –	$/\therefore\ p \rightarrow (q \rightarrow p)$
	2. p	KA
	3. $p \vee \neg q$	2, Add.
	4. $\neg q \vee p$	3, Komm.
	5. $q \rightarrow p$	4, Impl.
	6. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$	2–5, KB

7)	1. –	$/\therefore\ (p \wedge q) \rightarrow p$
	2. $p \wedge q$	KA
	3. p	2a, Simpl.
	4. $(p \wedge q) \rightarrow p$	2–3, KB
	oder	
	2. $\neg p$	KA
	3. $\neg p \vee \neg q$	2, Add.
	4. $\neg (p \wedge q)$	3, De M.
	5. $\neg p \rightarrow \neg (p \wedge q)$	2–4, KB
	6. $(p \wedge q) \rightarrow p$	5, Kontr.

8)	1. –	$/\therefore\ (p \rightarrow r) \rightarrow ((q \wedge q) \rightarrow r)$	
	2. $p \rightarrow r$	KA	$/\therefore\ (p \wedge q) \rightarrow r$
	3. $p \wedge q$	KA	$/\therefore\ r$
	4. p	3a, Simpl.	
	5. r	4, 2, MP	
	6. $(p \wedge q) \rightarrow r$	3, 5, KB	
	7. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$	2–6, KB	

9)	1. –	$/\therefore\ (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$	
	2. $p \rightarrow q$	KA	$/\therefore\ (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$
	3. $p \vee r$	KA	$/\therefore\ q \vee r$
	4. $\neg q \rightarrow \neg p$	2, Kontr.	
	5. $\neg p \rightarrow r$	3, Impl.	
	6. $\neg q \rightarrow r$	4, 5, HS	
	7. $q \vee r$	6, Impl.	
	8. $(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$	3, 7, KB	
	9. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee r))$	2–8, KB	

10)

4. p	KA
5. q	KA
6. r	KA
7. s	KA
8. $(r \wedge v) \rightarrow \neg q$	1, Exp.
9. $\neg (r \wedge v)$	5, 8, MT
10. $\neg r \vee \neg v$	9, De M.
11. $r \rightarrow \neg v$	10, Impl.
12. $\neg v$	6, 11, MP
13. $w \vee t$	12, 3, MT
14. $(p \wedge s) \rightarrow \neg w$	2, Kontr.
15. $p \wedge s$	4, 7, Konj.
16. $\neg w$	15, 14, MP
17. t	16, 13, DS
18. $s \rightarrow t$	7–17, KB
19. $r \rightarrow (s \rightarrow t)$	6–18, KB
20. $q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t))$	5–19, KB
21. $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))$	4–20, KB

2.8.2

1)

4. $\neg t$	IA
5. $\neg (q \vee s)$	3, 4, MT
6. $\neg q \wedge \neg s$	5, De M.
7. $\neg s$	6b, Simpl.
8. p	7, 2, DS
9. $q \vee s$	8, 1, MP
10. t	9, 3, MP
11. $t \wedge \neg t$	10, 4, Konj.
12. t	4–11, IB

2)

4. $p \vee r$	IA
5. $q \vee s$	4, 1, KD
6. t	5, 2, MP
7. $t \wedge \neg t$	6, 3, Konj.
8. $\neg (p \vee r)$	4–7, IB

3)	2. $\neg(q \vee \neg q)$	IA
	3. $\neg q \wedge q$	2, De M.
	4. $q \vee \neg q$	2–3, IB
4)	3. $\neg s$	IA
	4. $\neg s \vee t$	3, Add.
	5. $s \rightarrow t$	4, Impl.
	6. $p \wedge r$	5, 2, MP
	7. p	6a, Simpl.
	8. $p \vee q$	7, Add.
	9. $r \rightarrow s$	8, 1, MP
	10. r	6b, Simpl.
	11. s	10, 9, MP
	12. $s \wedge \neg s$	11, 3, Konj.
	13. s	3–12, IB
5)	3. p	IA
	4. $p \vee q$	3, Add.
	5, $r \wedge s$	4, 1, MP
	6. r	5a, Simpl.
	7. $r \vee t$	6, Add.
	8. $s \rightarrow \neg p$	7, 2, MP
	9. s	5b, Simpl.
	10. $\neg p$	9, 8, MP
	11. $p \wedge \neg p$	3, 10, Konj.
	12. $\neg p$	3–11, IB
6)	3. $\neg(\neg p \vee \neg p)$	IA
	4. $p \wedge q$	3, De M.
	5. $r \wedge s$	4, 1, MP
	6. s	5b, Simpl.
	7. $\neg q$	6, 2, MT
	8. q	4b, Simpl.
	9. $q \wedge \neg q$	8, 9, Konj.
	10. $\neg\neg(\neg p \vee \neg q)$	3–9, IB
	11. $\neg p \vee \neg q$	10, DN

7)

1.	$\neg s$	$/ \therefore \neg (((p \to q) \land (q \to r)) \land ((p \to r) \to s))$
2.	$((p \to q) \land (q \to r) \land (p \to r) \to s)$	IA
3.	$p \to q$	2a, Simpl.
4.	$q \to r$	2b, Simpl.
5.	$p \to r$	3, 4, HS
6.	$(p \to r) \to s$	2c, Simpl.
7.	s	5, 6, MP
8.	$s \land \neg s$	7, 1, Konj.
9.	$\neg (((p \to q) \land (q \to r)) \land ((p \to r) \to s))$	2–8, IB

8)

		$/ \therefore r \leftrightarrow \neg p$
		$/ \therefore (r \to \neg p) \land (\neg p \to r)$
3.	r	KA
4.	p	IA
5.	q	4, 2, MP
6.	$p \land q$	4, 5, Konj.
7.	$\neg r$	1 Impl.; 6, 1 MP
8.	$r \land \neg r$	3, 7, Konj.
9.	$\neg p$	4–8, IB
10.	$r \to \neg p$	3–9, KB
11.	$\neg p$	KA
12.	$\neg r$	IA
13.	$p \land q$	12, 1, Äquiv.; Impl.
14.	p	13a, Simpl.
15.	$p \land \neg p$	14, 11, Konj.
16.	$\neg\neg r$	12–15, IB
17.	$\neg p \to r$	11–16, KB
18.	$(r \to \neg p) \land (\neg p \to r)$	10, 17, Konj.
19.	$r \leftrightarrow \neg p$	18, Äquiv.

2.9

1) a) $\neg (q \land (\neg p \land \neg q))$
   b) $\neg q \lor (p \lor q)$
   c) $q \to (\neg p \to q)$

2) a) $\neg (p \wedge \neg q) \wedge \neg (q \wedge \neg p)$
b) $\neg ((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg p))$
c) $\neg ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg (q \rightarrow p))$

3)
1. Die Funktoren der Aussagenlogik sollen reduziert werden.
2. Rejektion oder Nicht-Konjunktion sind genau so streng definierte Funktoren wie Disjunktion oder Implikation. Von Inkonsistenz kann keine Rede sein.
3. In keine Weise. Die Prozeßmetaphysik von Whitehead ist deshalb so hoch geschätzt, weil Whitehead nicht die geringsten Abstriche an der Logik gemacht hat. Als Mitverfasser der *Principia Mathematica* hat er gezeigt, wie brüchig das Klischee ist, ein Logiker sei kein Philosoph.

2.10

1. EAppp
2. EpApp
3. ECpqApq
4. CKCpqqp
5. CKpqApq

6)
$$\begin{array}{ccccc}
p & \rightarrow & (p & \vee & q) \\
C & p & A & p & q \\
\not{C} & \bar{p} & \not{A} & p & q \\
 & \bar{p} & & p & q
\end{array}$$

7)
$$\begin{array}{ccccccc}
(p & \rightarrow & q) & \vee & (q & \rightarrow & p) \\
A & C & p & q & C & q & p \\
\not{A} & \not{C} & \bar{p} & q & \not{C} & \bar{q} & p \\
 & & \bar{p} & q & & \bar{q} & p
\end{array}$$

8)
$$\begin{array}{cccccc}
(p & \wedge & \neg & p) & \rightarrow & q \\
C & K & p & \bar{p} & q & \\
\not{C} & \not{\bar{K}} & \bar{p} & \bar{\bar{p}} & q & \\
 & & \bar{p} & p & q &
\end{array}$$

9) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

$$\begin{array}{ccccccc} C & K & p & q & A & p & q \\ \not{C} & \bar{\not{K}} & \bar{p} & \bar{q} & \not{A} & p & q \\ & & \bar{p} & \bar{q} & & p & q \end{array}$$

10) Zeigen Sie, daß $Cpq = \bar{K}p\bar{q}$ ist.

$$\begin{array}{cccccccc} C & p & q & & \bar{K} & p & \bar{q} \\ \not{C} & \bar{p} & q & & \bar{\not{K}} & \bar{p} & \bar{\bar{q}} \\ & \bar{p} & q & = & & \bar{p} & q \end{array}$$

11) $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$

$$\begin{array}{ccccccc} C & K & C & p & q & q & p \\ \not{C} & \bar{\not{K}} & \bar{\not{C}} & p & \bar{q} & \bar{q} & p \\ & & & p & & \bar{q} & p \\ & & & & \bar{q} & \bar{q} & p \end{array}$$ (falsch)

12) $r \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

$$\begin{array}{ccccccc} C & r & C & C & p & q & r \\ \not{C} & \bar{r} & \not{C} & \bar{\not{C}} & p & \bar{q} & r \\ & & & & p & & r \\ \bar{r} & & & & & & \\ & & & & \bar{q} & r & \end{array}$$

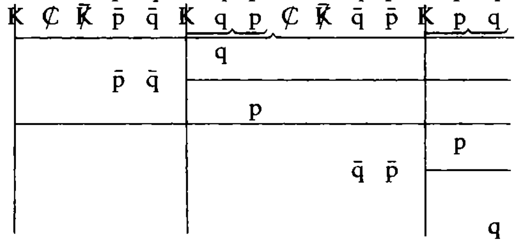
13) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge m) \rightarrow q)$

$$\begin{array}{ccccccccc} C & C & p & q & C & K & p & m & q \\ \not{C} & \bar{\not{C}} & p & \bar{q} & \not{C} & \bar{\not{K}} & \bar{p} & \bar{m} & q \\ & & p & & & & \bar{p} & \bar{m} & q \\ & & & \bar{q} & & & \bar{p} & \bar{m} & q \end{array}$$

14) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

$((p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)) \wedge ((q \wedge p) \rightarrow (p \wedge q))$

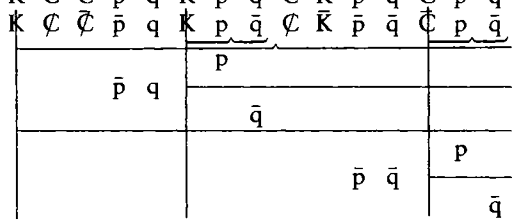
K C K p q K q p C K q p K p q



15) $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

$(\neg (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg (p \rightarrow q))$

K C $\bar{C}$ p q K p $\bar{q}$ C K p $\bar{q}$ $\bar{C}$ p q



3.2

1) 1. *Darii*
2) 2. *Baroco*
3) 2. AAA falsch
4) Alle Kühe sind Pflanzenfresser 1. *Barbara*
5) Einige Zeitungsleute sind unglaubwürdig 3. *Datisi*
6) 1. AEE falsch
7) 1. EEE falsch
8) 3. *Felapton*
9) 3. *Bocardo*
10) 1. *Barbara*
11) Also sind einige Bemitleidenswerte arm. 4. AII falsch
12) Einige Säugetiere sind nicht Vierbeiner. 1. *Ferio*
13) 4. EII falsch
14) 4. AAA falsch

3.3

15) Galilei war ein Europäer
16) Nach Umstellung der Prämissen 1. *Barbara*, aber G M
17) *Celarent*
18) Es handelt sich nicht um eine Quaternio terminorum, sondern um unklare Sprache. Das wird sichtbar, sobald man versucht, die Modi der Prämissen zu bestimmen. Die zweite Prämisse ist offensichtlich eine A-Prämisse. Doch wie steht es mit der ersten? Wird sie ebenfalls als A-Prämisse gedeutet, dann ist sie nicht wahr, denn Marmor, Bergkristalle, Smaragde sind kaum als billiges Straßenpflaster zu betrachten. Aus einer unwahren Prämisse kann mühelos ein unwahrer Schluß folgen. Wird indessen die 1. Prämisse als I-Prämisse aufgefaßt, dann liegen die Modi IA vor, aus denen in der 1. Figur der gewünschte Schluß nicht folgt.

19) Wir vermögen einigermaßen mit Begriffen und Worten umzugehen, aber wie ein „Begriffswort" zu behandeln ist, das können wir ohne Anleitung nicht herausfinden. Auch das übrige Vokabular (Typ, Allgemeinbegriff) ist dermaßen inadäquat, daß der Autor seiner eigenen Verschwommenheit zum Opfer fällt. „Der Gelehrte ist vergeßlich" ist eine harmlose Allaussage und drückt das abgegriffene Klischee vom Gelehrten aus „Alle Gelehrten sind vergeßlich". Die zweite Prämisse enthält ein konkretes Subjekt. Mit „du" ist ein bestimmtes Individuum gemeint, das wir auch mit seinem Namen bezeichnen dürfen. Dann lautet die 2. Prämisse etwa „Sokrates ist ein Gelehrter". Es ist eine A-Prämisse. Aus AA ergibt sich in der ersten Figur *Barbara* und wir kommen zum Schluß: „Also ist Sokrates vergeßlich". Wenn wir, wie im Original, das „du" beibehalten, dann ergibt sich die eindeutige Folgerung: „Also bist du vergeßlich", genau das, was der Autor in Abrede stellt.

20) Hier handelt es sich nicht um verschwommene Sprache, sondern um Unkenntnis der logischen Regeln. Es liegt nämlich eine 2. Figur vor, dazu die Modi AA. Daraus darf nichts geschlossen werden.

21) Der Verfasser fühlt sich unwohl, weil er offenbar die Konklusion positiv faßt als „Einige Tiere sind Menschen". Wir fragen

zuerst nach den Modi der Prämissen. Während die 1. eine O-Prämisse ist, gleicht die 2. einem Worträtsel. Übersetzt dürfte es etwa so zu verstehen sein: „Kein Elefant ist ein Mensch". Das ist freilich eine E-Prämisse. Aus OE – zwei negativen Prämissen – läßt sich weder in der 4. Figur noch sonstwo gültig schließen. Um seinem fehlerhaften Syllogismus mehr Autorität zu verleihen, beruft sich der Verfasser auf das „Prinzip des Größeren und Kleineren", eine Regel, die auf rege Phantasie, aber nicht auf Logikkenntnisse schließen läßt.

3.4

1)	2. Fig.	*Festino*	*Ferio*
	W	K	Kein Mitglied im Blauen Kreuz ist Weinbauer
	X	K	Einige Walliser sind Mitglieder im Blauen Kreuz
	X	W	Also sind einige Walliser nicht Weinbauern
2)	3. Fig.	*Datisi*	*Darii*
	S	L	Alle Säugetiere atmen durch Lungen
	S	W	Einige Wassertiere sind Säugetiere
	W	L	Einige Wassertiere atmen durch Lungen
3)	4. Fig.	*Dimatis*	*Darii*
	T	A	Alle Arzneien sind nützliche Substanzen
	A	S	Einige Tiergifte sind Arzneien
	S	T	Also sind einige Tiergifte nützliche Substanzen
4)	3. Fig.	*Felapton*	*Ferio*
	A	R	Kein Auto ist rostfrei
	A	T	Einige teuren Dinge sind Autos
	T	R	Einige teuren Dinge sind nicht rostfrei

5)	3. Fig. *Disamis*		*Darii*
	K	G	Alle Kirchen sind Gotteshäuser
	R	K	Einige renovierte (Gebäude) sind Kirchen
	R	G	Einige renovierte (Gebäude) sind Gotteshäuser
6)	4. Fig. *Fresion*		*Ferio*
	V	M	Keine Mutter ist Vater
	M	W	Einige Veteranen sind Mütter
	W	V	Einige Veteranen sind nicht Väter

3.4

7)	2. *Baroco*		*Barbara*
	Q	V	Alle Quadrate sind viereckig
	F	V	Alle Figuren sind Quadrate
	F	Q	Alle Figuren sind viereckig
8)	3. *Bocardo*		*Barbara*
	B	V	Alle Mitglieder der Pensionskasse sind verheiratet
	B	P	Alle Beamten sind in der Pensionskasse
	P	V	Alle Beamten sind verheiratet
9)	2. *Baroco*		*Barbara*
	L	T	Alle Lose sind Treffer
	P	T	Alle Papiere sind Lose
	P	L	Alle Papiere sind Treffer
10)	3. *Bocardo*		*Barbara*
	B	G	Alle Kostbarkeiten sind gebunden
	B	K	Alle Bücher sind Kostbarkeiten
	K	G	Alle Bücher sind gebunden

3.5

1)	D	T		D	T	1. Fig. *Darii*		
	R	D		R	D			
	R	L		R	T	Einige Regierungs-		
	L	T		R	L	vertreter sind taktvoll		
				L	T	3. Fig. *Disamis*		
						Einige Leute des öffentlichen Le-		
						bens sind taktvoll		
2)	F	U		U	V			
	V	A		F	U	1. Fig. *Barbara*		
	U	V		F	V			
	F	A		A	V	2. Fig. *Camestres*		
				A	F	Kein Autofahrer ist eine Frau		
			oder	F	U			
				U	V	4. *Dimatis*		
				F	V			
				A	V	A	V	
						F	V	2. Fig. *Festino*
						F	A	Einige Frauen sind nicht Autofahrer

Eine Unklarheit liegt in der 1. Prämisse. Ist es eine A oder I-Prämisse? Den Tatsachen widerspricht die A-Prämisse eindeutig, denn es gibt – auch wenn es der Volksmund anders will – keine Anzeichen dafür, daß Frauen mit den logischen Regeln mehr Mühe hätten als Männer. Die Frauen sehen zwar die Welt anders, aber das ist eine Frage der Erkenntnistheorie und berührt die Logik nicht.

3)	G	L	G	L	
	V	R	F	L	2. Fig. *Camestres*
	F	L	F	G	
	F	R	R	G	Jeder Richter ist geistig gesund. Umformung von V R. Jetzt können wir mit 2. Fig. und *Cesare* schließen
			R	F	

3.7

A) 1)
$$\begin{array}{r} fw' = 0 \\ sf \neq 0 \\ \hline (sw \neq 0) \\ sw = 0 \\ fw'sf = 0 \\ sf = 0 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} sf' = 0 \\ jf' \neq 0 \\ \hline (js' \neq 0) \\ js' = 0 \\ sf'jf' = 0 \\ jf' = 0 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} km' = 0 \\ dm' = 0 \\ \hline (kd' = 0) \\ kd' \neq 0 \\ km'dm' = 0 \\ \text{falsch} \end{array}$$

4) und 5) können nur kontrolliert werden, wenn auch die Konklusion vorliegt.

6)
$$\begin{array}{rl} hz' = 0 & \\ kh = 0 & \\ \hline (kz = 0) & \\ kz \neq 0 & \\ hz'kh = 0 & \quad \text{falsch} \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{rl} ov = 0 & \\ fo = 0 & \\ \hline (fv = 0) & \\ fv \neq 0 & \\ ovfo = 0 & \quad \text{falsch} \end{array}$$

3.7

B) 8)
$$\begin{array}{r} mp = 0 \\ mg' = 0 \\ \hline (gp' \neq 0) \\ gp' = 0 \\ \text{falsch} \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r} pn' \neq 0 \\ pl' = 0 \\ \hline (ln' \neq 0) \\ ln' = 0 \\ pl'ln' = 0 \\ pn' = 0 \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{r} ng' = 0 \\ vn' = 0 \\ \hline (vg' = 0) \\ vg' \neq 0 \\ ng'vn' = 0 \\ vg' = 0 \end{array}$$

11) und 12) sind nicht kontrollierbar, weil die Konklusion fehlt.

13)
$$\begin{array}{r} sn = 0 \\ nl \neq 0 \\ \hline (sl \neq 0) \\ sl = 0 \\ snsl = 0 \\ \text{falsch} \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{rl} pe' = 0 & \\ es' = 0 & \\ \hline (sp' = 0) & \\ sp' \neq 0 & \\ pe'es' = 0 & \\ s'p = 0 & \quad \text{falsch} \end{array}$$

		1. Fig.	2. Fig.	3. Fig.	4. Fig.
C)	a)	$mp = 0$	$pm = 0$	$mp = 0$	$pm = 0$
		$sm \neq 0$	$sm \neq 0$	$ms \neq 0$	$ms \neq 0$
		$(sp' \neq 0)$	$(sp' \neq 0)$	$(sp' \neq 0)$	$(sp' \neq 0)$
		$sp' = 0$	$sp' = 0$	$sp' = 0$	$sp' = 0$
		$sm = 0$	$sm = 0$	$sm = 0$	$sm = 0$
		Ferio	*Festino*	*Ferison*	*Fresison*

		1. Fig.	2. Fig.	3. Fig.	4. Fig.
	b)	$mp' = 0$	$pm' = 0$	$mp' = 0$	$pm' = 0$
		$sm' \neq 0$	$sp' \neq 0$	$ms' \neq 0$	$ms' \neq 0$
		$(sp' \neq 0)$	$(sm' \neq 0)$	$(sp' \neq 0)$	$(sp' \neq 0)$
		$sp' = 0$	$sp' = 0$	$sp' = 0$	$sp' = 0$
		falsch	*Baroco*	falsch	falsch

	1. Fig.	2. Fig.	3. Fig.	4. Fig.
C)	$mp' = 0$	$pm' = 0$	$mp' = 0$	$pm' = 0$
	$sm' = 0$	$sm' = 0$	$ms' = 0$	$ms' = 0$
	$(sp' = 0)$	$(sp' = 0)$	$(sp' = 0)$	$(sp' = 0)$
	$sp' \neq 0$	$sp' \neq 0$	$sp' \neq 0$	$sp' \neq 0$
	$sp' = 0$	falsch	falsch	falsch
	Barbara			

In den Figuren 2 und 3 fällt der Mittelterm nicht weg und in der 4. sind die Komplemente vertauscht.

4.1

1. Bo
2. $\neg Bo$
3. $Bo \wedge \neg Fa$
4. $Bo \wedge Fi$
5. $Bo \rightarrow \neg Fd$
6. $\neg If \vee Mf$
7. $(Rf \vee Gf) \rightarrow Df$
8. $(Rf \wedge Gf) \leftrightarrow Qf$

4.2

1. $(\forall x)Tx$
2. $\neg (\exists x)Tx$
3. $\neg (\forall x)Tx$
4. $(\exists x)Tx$
5. $(\exists x)\neg Vx$

6a. $(\forall x)\neg Kx$; 6b. $\neg (\forall x)Kx$

7. $\neg (\exists x)\neg Kx$
8. $(\forall x)Kx$
9. $\neg (\forall x)Kx$
10. $\neg (\exists x)Kx$

Die Formulierung 6. ist zweideutig. Sie kann bedeuten:

a) alles ist unverkäuflich

b) nicht alles ist käuflich

Äquivalent sind:

a) 5, 9, 6b; b) 7, 8; c) 6a, 10.

11. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow Kx)$	11′. $\neg\ (\exists x)\ (Sx \wedge \neg\ Kx)$
12. $\neg\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow Kx)$	12′. $(\exists x)\ (Sx \wedge \neg\ Kx)$
13. $(\exists x)\ (Sx \wedge Kx)$	13′. $\neg\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg\ Kx)$
14. $(\exists x)\ (Sx \wedge \neg\ Kx)$	14′. $\neg\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow Kx)$
15. $\neg\ (\exists x)\ (Sx \wedge Kx)$	15′. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg\ Kx)$
16. $(\exists x)\ (Tx \wedge Gx)$	16′. $\neg\ (\forall x)\ (Tx \rightarrow \neg\ Gx)$
17. $\neg\ (\exists x)\ (Mx \wedge Gx)$	17′. $(\forall x)\ (Mx \rightarrow \neg\ Gx)$
18. $(\exists x)\ (Ex \wedge \neg\ Rx)$	18′. $\neg\ (\forall x)\ (Ex \wedge Rx)$

20. a), b), f), i)

21. 1. (i) $(\forall x) \neg\ Rx$

(ii) $(\exists x) \neg\ Rx$

Sie sind offensichtlich nicht identisch.

2. (i) Alle Dinge sind nicht Raben = Es gibt keine Raben.

(ii) Es gibt ein Ding [z.B. meine Schreibmaschine], das nicht ein Rabe ist.

4.3.3

1)
1. Sk
2. $(\forall x)\ (Kx \rightarrow Sx)$
3. $(\forall x)\ (Tx \rightarrow Bx)$
4. Gt
5. $(\forall x) Fx$
6. $\neg\ (\exists x) \neg\ Vx$

2)
1. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Wx)$
2. $(\forall x)\ (Px \rightarrow \neg\ Ax)$
3. $(\exists x)\ (Px \wedge Vx)$
4. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Zx)$
5. $(\exists x)\ (Px \wedge Ax)$
6. $(\exists x)\ (Px \wedge Ex)$

3) 1. $(\exists x)\ (Ix \wedge Ex)$
2. $\neg\, (\exists x)\ (Tx \wedge Sx)$
3. $\neg\, (\forall x)\ ((Ex \wedge Px) \rightarrow Dx)$
4. $(\exists x)\ (Vx \wedge \neg\, Bx)$
5. $(\exists x)\ (Ux \wedge (Vx \wedge Sx))$
6. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Bx)$
7. $(\forall x)\ ((Px \wedge Kx) \rightarrow Bx)$
8. $(\forall x)\ (Bx \rightarrow (Px \wedge Kx))$
9. $(\forall x)\ ((Px \wedge Bx) \leftrightarrow Kx)$
10. $(\forall x)\ ((Sx \wedge Jx \wedge Tx) \rightarrow Mx)$
11. $(\forall x)\ (Tx \rightarrow (Fx \wedge Gx \wedge Hx \wedge Ix))$
12. $(\forall x)\ ((Ax \vee Bx) \rightarrow Nx)$
13. $\neg\, (\exists x)\ (Rx \wedge \neg\, Sx)$
14. $\neg\, (\forall x)\ (Rx \rightarrow Sx)$
15. $(\exists x)\ (Gx \rightarrow (Mx \wedge Ux))$
16. $\neg\, (\forall x)\ (Gx \rightarrow Ax)$

4) 1. $(\exists x)\ (Vx \wedge Rx)$
2. $(\forall x)\ (Kx \rightarrow Fx)$
3. $(\forall x)\ ((Px \vee Kx) \rightarrow (Bx \wedge Vx))$
4. $(\exists x)\ (Lx \wedge Mx \wedge \neg\, Tx)$
5. $\neg\, (\exists x)\ (Ax \wedge Zx \wedge Bx \wedge Rx)$
$(\forall x)\ (Ax \rightarrow \neg\, (Zx \wedge Bx \wedge Rx))$
6. $\neg\, (\exists x)\ (Lx \wedge Ex \wedge \neg\, Gx)$
1'. $\neg\, (\forall x)\ (Vx \rightarrow \neg\, Rx)$
2'. $\neg\, (\exists x)\ (Kx \wedge \neg\, Fx)$
3'. $\neg\, (\exists x)\ ((Px \vee Kx) \wedge \neg\, (Bx \vee Vx))$
4'. $\neg\, (\forall x)\ ((Lx \wedge Mx) \rightarrow Tx)$
5'. $(\forall x) \neg\, (Ax \wedge Zx \wedge Bx \wedge Rx)$
$(\forall x)\ ((\neg\, Ax \vee \neg\, Zx \vee \neg\, Bx) \vee \neg\, Rx)$
$(\forall x)\ (Ax \rightarrow (Zx \rightarrow (Bx \rightarrow \neg\, Rx)))$
6'. $(\forall x) \neg\, (Lx \wedge Ex \wedge \neg\, Gx)$
$(\forall x)\ (\overline{Lx \wedge Ex \wedge \overline{Gx}})$
$(\forall x)\ (\neg\, ((Lx \wedge Ex) \vee Gx)$
$(\forall x)\ ((Lx \wedge Ex) \rightarrow Gx)$

5) 1. $(\exists x)\ (Nx \wedge Hx \wedge Bx)$
2. $(\forall x)\ (Nx \rightarrow (Hx \wedge Bx)$
3. $(\exists x)\ ((Nx \wedge Hx) \wedge Bx)$

4. $(\forall x)\ (Bx \rightarrow (Nx \wedge Hx))$
5. $(\forall x)\ ((Hx \wedge Nx) \leftrightarrow Bx)$
6. $(\forall x)\ ((Nx \wedge \neg Hx) \rightarrow \neg Bx)$
7. $(\exists x)\ ((Nx \wedge \neg Bx) \wedge \neg Hx)$
8. $(\forall x)\ ((Nx \wedge Hx) \rightarrow \neg\neg Bx)$
9. $(\forall x)\ ((Nx \wedge Hx) \rightarrow Bx)$
10. $(\exists x)\ ((Nx \wedge Hx) \rightarrow Bx)$

Äquivalent sind 1, 3 sowie 8, 9.

6)
1. $\neg (\forall x)\ (Gx \rightarrow Ex)$
2. $(\forall x)\ (Hx \rightarrow Gx)$
3. $(\forall x)\ ((Rx \vee Dx) \rightarrow Kx)$
4. $(\forall x)\ ((Rx \vee Dx) \rightarrow (Sx \wedge Vx))$
5. $(\forall x)\ ((Vx \wedge \neg Sx) \rightarrow \neg (Rx \wedge Dx))$
6. Bh
7. $(\forall x)\ ((Fx \vee Gx) \rightarrow Vx)$
8. $\neg (\forall x)\ ((Sx \wedge Bx) \rightarrow Tx)$
9. $\neg (\exists x)\ (Mx \wedge Ex)$
10. $(\forall x)\ ((Ux \wedge Vx) \rightarrow (Px \vee Fx))$
11. $(\forall x)\ ((Ax \wedge Dx) \rightarrow Ex)$
11. $(\forall x)\ ((Zx \wedge Lx) \rightarrow Bx)$
13. $(\forall x)\ ((Bx \wedge \neg Sx) \rightarrow Vx)$
14. $(\forall x)\ ((Px \wedge Ux) \rightarrow (Bx \vee Ox))$

4.4.4

1)

1.	$(\forall x)\ (Lx \rightarrow Ux)$	
2.	$(\exists x)\ (Lx \wedge Zx)$	$\underline{/\therefore (\exists x)\ (Zx \wedge Ux)}$
3.	$La \rightarrow Ua$	1, $-\forall$
4.	$La \wedge Za$	2, $-\exists$
5.	La	4a, Simpl.
6.	Ua	5, 3, MP
7.	Za	4b, Simpl.
8.	$Za \wedge Ua$	7, 6, Konj.
9.	$(\exists x)\ (Zx \wedge Ux)$	8, $+\exists$

2)

1.	$(\forall x)\ (Fx \rightarrow Ax)$	
2.	$(\exists x)\ (Ax \wedge Bx)$	$\underline{/\ (\exists x)\ (Fx \wedge Bx)}$
3.	$Fa \rightarrow Aa$	1, $-\forall$

	4.	$Aa \wedge Ba$	$2, -\exists$
		falsch	
3)	1.	$(\forall x)\ (Kx \rightarrow \neg Bx)$	
	2.	$(\exists x)\ (Kx \wedge Hx)$	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Hx \wedge \neg Bx)}$
	3.	$Ka \rightarrow \neg Ba$	$1, -\forall$
	4.	$Ka \wedge Ha$	$2, -\exists$
	5.	Ha	4b, Simpl.
	6.	$\neg Ka$	4a, Simpl.
	7.	$\neg Ba$	6, 3, MP
	8.	$Ha \wedge \neg Ba$	5, 7, Konj.
	9.	$(\exists x)\ (Hx \wedge \neg Bx)$	$8, +\exists$
4)	1.	$(\forall x)\ (Sx \rightarrow Gx)$	
	2.	$La \wedge Sa$	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Lx \wedge Gx)}$
	3.	$Sa \rightarrow Ga$	$1, -\forall$
	4.	Sa	2b, Simpl.
	5.	La	2a, Simpl.
	6.	Ga	4, 3, MP
	7.	$La \wedge Ga$	5, 6, Konj.
	8.	$(\exists x)\ (Lx \wedge Gx)$	$7, +\exists$
5)	1.	$(\forall x)\ (Sx \rightarrow (Rx \vee Fx))$	
	2.	$(\forall x)\ (Rx \rightarrow Jx)$	
	3.	$(\exists x)\ (Sx \wedge \neg Jx)$	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Sx \wedge Fx))}$
	4.	$Sa \rightarrow (Ra \vee Fa)$	$1, -\forall$
	5.	$Ra \rightarrow Ja$	$2, -\forall$
	6.	$Sa \wedge \neg Ja$	$3, -\exists$
	7.	Sa	6a, Simpl.
	8.	$Ra \vee Fa$	7, 4, MP
	9.	$\neg Ja$	6b, Simpl.
	10.	$\neg Ra$	9, 5, MT
	11.	Fa	10, 8, DS
	12.	$Sa \wedge Fa$	7, 4, Konj.
	13.	$(\exists x)(Sx \wedge Fx)$	$12, +\exists$
6)	1.	$(\forall x)\ (Bx \rightarrow Ax)$	
	2.	$(\forall x)\ (Ax \rightarrow Dx)$	$\underline{/\ (\exists x)\ (Bx \wedge Dx)}$
	3.	$Ba \rightarrow Aa$	$1, -\forall$
	4.	$Aa \rightarrow Da$	$2, -\forall$

5.	$Ba \rightarrow Da$	3, 4, HS
6.	$(\exists x)\ (Bx \rightarrow Dx)$	5, $+\exists$

In der modernen Logik ist es verpönt, von einigen Dingen das zu sagen, was offensichtlich von allen gilt.

7)

1.	$(\forall x)\ (Px \rightarrow (Ex \vee Fx))$	
2.	$\neg (\exists x)\ (Ex \wedge Gx)$	
3.	$(\exists x)\ (Px \wedge Gx)$	$/\therefore\ (\exists x)\ (Px \wedge Fx)$
4.	$(\forall x)\ (Ex \rightarrow \neg Gx)$	2, QA
5.	$Pa \wedge Ga$	3, $-\exists$
6.	Pa	5a, Simpl.
7.	$Pa \rightarrow (Ea \vee Fa)$	1, $-\forall$
8.	$Ea \vee Fa$	6, 7, MP
9.	Ga	5b, Simpl.
10.	$Ea \rightarrow \neg Ga$	4, $-\forall$
11.	$\neg Ea$	9, 10, MT
12.	Fa	11, 8, DS
13.	$Pa \wedge Fa$	6, 12, Konj.
14.	$(\exists x)\ (Px \wedge Fx)$	13, $+\exists$

8)

1.	$\neg (\exists x)\ (Ex \wedge Wx)$	
2.	$\neg (\exists x)\ (Ox \wedge \neg Wx)$	
3.	$(\forall x)\ (Bx \rightarrow Ex)$	$/\therefore\ \neg (\exists x)\ (Bx \wedge Ox)$
4.	$(\forall x)\ (Ex \rightarrow \neg Wx)$	1, QA
5.	$(\forall x)\ (Ox \rightarrow Wx)$	2, QA
6.	$Ba \rightarrow Ea$	3, $-\forall$
7.	$Ea \rightarrow \neg Wa$	4, $-\forall$
8.	$Oa \rightarrow Wa$	5, $-\forall$
9.	$\neg Wa \rightarrow \neg Oa$	8, Kontr.
10.	$Ba \rightarrow \neg Oa$	6, 7, 9, HS
11.	$(\forall x)\ (Bx \rightarrow \neg Ox)$	10, $+\forall$
12.	$\neg (\exists x)\ (Bx \wedge Ox)$	11, QA

9)

1.	$(\forall x)\ ((Zx \vee Ax) \rightarrow Vx)$	
2.	$\neg Vd \wedge Sd$	$/\therefore\ \neg Ad$
3.	$(Zd \vee Ad) \rightarrow Vd$	1, $-\forall$
4.	$\neg Vd$	2a, Simpl.
5.	$\neg (Zd \vee Ad)$	4, 3, MT
6.	$\neg Zd \wedge \neg Ad$	5, De M.
7.	$\neg Ad$	6b, Simpl.

10)

1.	$(\forall x)\ (Sx \rightarrow (Px \vee Fx))$	
2.	$(\exists x)\ (Sx \wedge Tx)$	
3.	$(\forall x)((Sx \rightarrow Fx) \leftrightarrow \neg Tx)$	
4.	$(\exists x)\ (Sx \wedge \neg Tx)$	$\underline{/ \therefore\ (\exists x)\ (Sx \wedge Fx)}$
5.	$((Sa \rightarrow Fa) \rightarrow \neg Ta) \wedge (\neg Ta \rightarrow (Sa \rightarrow Fa))$	3, $-\forall$
6.	$\neg Ta \rightarrow (Sa \rightarrow Fa)$	5b, Simpl.
7.	$Sa \wedge \neg Ta$	4, $-\exists$
8.	$\neg Ta$	7b, Simpl.
9.	$Sa \rightarrow Fa$	8, 6, MP
10.	Sa	7a, Simpl.
11.	Fa	10, 9, MP
12.	$Sa \wedge Fa$	10, 11, Konj.
13.	$(\exists x)\ (Sx \wedge Fx)$	12, $+\exists$

11)

4. 2, QA
5. 4, $-\forall$
6. 1, $-\forall$
7. 3, $-\exists$
8. 7a, Simpl.
9. 8, 6, MP
10. 7b, Simpl.
11. 10, 5, MT
12. 11, 9, Konj.
13. 12, De M.
14. 13, $+\exists$

12)

3. 2, QA
4. 1, $-\forall$
5. 4, Impl.
6. 5, De M.
7. 6, Komm.
8. 7, Dist.
9. 8a, Simpl.
10. 9, Komm.
11. 10, Add.
12. 11, Ass.
13. 12, Impl.
14. 2, QA, $-\forall$

	15.	13, 14, HS
	16.	15, $+\forall$

13)	3. $Pa \rightarrow Qa$	1, $-\forall$
	4. $(\exists x) \neg Qx$	2, QA
	5. $\neg Qa$	4, $-\exists$
	6. $\neg Pa$	5, 3, MT
	7. $(\exists x) \neg Px$	6, $+\exists$

14)	3. $(\forall x) \neg (Px \rightarrow Mx)$	1, QA
	4. $\neg (Pa \rightarrow Ma)$	3, $-\forall$
	5. $Pa \wedge \neg Ma$	4, De M.
	6. $Sa \rightarrow Ma$	2, $-\forall$
	7. $\neg Ma$	5b, Simpl.
	8. $\neg Sa$	7, 6, MT
	9. $\neg Sa \vee \neg Pa$	8, Add.
	10. $Sa \rightarrow \neg Pa$	9, Impl.
	11. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg Px)$	10, $+\forall$

15)	3. $(\forall x) \neg (Ax \wedge \neg Bx)$	1, QA
	4. $(\forall x) \neg (Cx \wedge Bx)$	2, QA
	5. $\neg (Aa \wedge \neg Ba)$	3, $-\forall$
	6. $Aa \rightarrow Ba$	5, De M.
	7. $\neg (Ca \wedge Ba)$	4, $-\forall$
	8. $Ca \rightarrow \neg Ba$	7, De M.
	9. $Ba \rightarrow \neg Ca$	8, Kontrap.
	10. $Aa \rightarrow \neg Ca$	6, 9, HS
	11. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow \neg Cx)$	10, $+\forall$
	12. $(\forall x) \neg (Ax \wedge Cx)$	11, De M.
	13. $\neg (\exists x)\ (Ax \wedge Cx)$	12, QA

16)	4. $(\exists x)\ (Fx \wedge Hx)$	1b, Simpl.
	5. $Fa \wedge Ha$	4, $-\exists$
	6. $(Fa \wedge Ja) \rightarrow \neg Ha$	2, $-\forall$
	7. Ha	5b, Simpl.
	8. $\neg (Fa \wedge Ja)$	7, 6, MT
	9. $\neg Fa \vee \neg Ja$	8, De M.
	10. Fa	5a, Simpl.
	11. $\neg Ja$	10, 9, DS

	12. $Fa \wedge \neg Ja$	10, 11, Konj.
	13. $(\exists x)(Fx \wedge \neg Jx)$	12, $+\exists$
17)	5. $Ga \wedge Ja$	4, $-\exists$
	6. Ga	5a, Simpl.
	7. $Ga \vee \neg Fa$	6, Add.
	8. $\neg Fa \vee Ga$	7, Komm.
	9. $Fa \rightarrow Ga$	8, Impl.
	10. $(Fa \rightarrow Ga) \rightarrow (Ha \rightarrow \neg Fa)$	1, $-\forall$
	11. $Ha \rightarrow \neg Fa$	9, 10, MP
	12. $Ja \rightarrow Fa$	3, $-\forall$
	13. Ja	5b, Simpl.
	14. Fa	13, 12, MP
	15. $\neg Ha$	14, 11, MT
	16. $(\exists x)\neg Hx$	15, $+\exists$
18)	6. $Aa \wedge (Ua \vee Ia) \rightarrow \neg(Ha \vee Ca)$	1, $-\forall$
	7. $Aa \wedge (Ia \wedge Ba)$	2, $-\exists$
	8. Ia	7b, Simpl.
	9. $(Ua \vee Ia) \rightarrow \neg(Ha \vee Ca)$	6b, Simpl.
	10. $Ia \vee Ua$	8, Add.
	11. $Ua \vee Ia$	10, Komm.
	12. $\neg(Ha \vee Ca)$	11, 9, MP
	13. $\neg Ha \wedge \neg Ca$	12, De M.
	14. $\neg Ha$	13a, Simpl.
	15. $Aa \rightarrow Wa$	4, $-\forall$
	16. Aa	7a, Simpl.
	17. Wa	16, 15, MP
	18. $Aa \wedge Wa$	16, 17, Konj.
	19. $(Aa \wedge Wa) \rightarrow (\neg Ha \rightarrow Da)$	3, $-\forall$
	20. $\neg Ha \rightarrow Da$	18, 19, MP
	21. Da	14, 20, MP
	22. $Aa \wedge Da$	16, 21, Konj.
	23. $(\exists x)(Ax \wedge Dx)$	22, $+\exists$

19) Die 1. Prämisse ist nur scheinbar wohlformuliert. Ohne Negation ausgedrückt lautet sie: Der Mensch lebt von Brot, Milch, Reis usw.
Die Formalisierung: $(\forall x)(Mx(Bx \vee Mx \vee Rx \ldots))$ deutet das „usw.“ an, ist aber ungeeignet für eine Deduktion.

20)

1.	$(\exists x)\ (Px \wedge Gx \wedge \neg Ex)$	
2.	$(\forall x)\ (Px \rightarrow Kx)$	
3.	$(\exists x)\ (Px \wedge \neg Gx)$	
4.	$(\forall x)\ (Hx \rightarrow Gx)$	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Kx \wedge \neg Hx)}$; oder: $\underline{/\therefore\ \neg (\forall x)\ (Kx \rightarrow Hx)}$
5.	$Pa \wedge \neg Ga$	3, $-\exists$
6.	$Pa \rightarrow Ka$	2, $-\forall$
7.	Pa	5a, Simpl.
8.	Ka	7, 6, MP
9.	$\neg Ga$	5b, Simpl.
10.	$Ha \rightarrow Ga$	4, $-\forall$
11.	$\neg Ha$	9, 10, MT
12.	$Ka \wedge \neg Ha$	8, 11, Konj.
13.	$(\exists x)\ (Kx \wedge \neg Hx)$	12, $+\exists$

21)

1.	$(\forall x)\ ((Mx \vee Hx) \rightarrow Gx)$	
2.	$(\forall x)\ ((Rx \vee Ax) \rightarrow Hx)$	
3.	$(\forall x)\ (Gx \rightarrow (Px \wedge Fx))$	$\underline{/\therefore\ (\forall x)\ (Rx \rightarrow (Px \wedge Fx))}$
4.	$(Ma \vee Ha) \rightarrow Ga$	1, $-\forall$
5.	$(Ra \vee Aa) \rightarrow Ha$	2, $-\forall$
6.	$Ga \rightarrow (Pa \wedge Fa)$	3, $-\forall$
7.	$\neg (Ra \vee Aa) \vee Ha$	5, Impl.
8.	$(\neg Ra \wedge \neg Aa) \vee Ha$	7, De M.
9.	$(\neg Ra \vee Ha) \wedge (\neg Aa \vee Ha)$	8, Dist.
10.	$(Ra \rightarrow Ha) \wedge (Aa \rightarrow Ha)$	9, Impl.
11.	$(\neg Ma \wedge \neg Ha) \vee Ga$	4, Impl.
12.	$(\neg Ma \vee Ga) \wedge (\neg Ha \vee Ga)$	11, Dist.
13.	$\neg Ha \vee Ga$	12b, Simpl.
14.	$Ha \rightarrow Ga$	13, Impl.
15.	$Ra \rightarrow Ha$	10a, Simpl.
16.	$Ra \rightarrow (Pa \wedge Fa)$	15, 14, 6, HS
17.	$(\forall x)\ (Rx \rightarrow (Px \wedge Fx))$	16, $+\forall$

22)

1.	$(\forall x)\ ((Mx \wedge \neg Bx) \rightarrow Ax)$	
2.	$(\forall x)\ (Ex \rightarrow Mx)$	
3.	$(\exists x)\ (Ex \wedge \neg Ax)$	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Mx \wedge Bx)}$
4.	$Ea \wedge \neg Aa$	3, $-\exists$
5.	$(Ma \wedge \neg Ba) \rightarrow Aa$	1, $-\forall$

6.	$\neg Aa$	4b, Simpl.
7.	$\neg (Ma \land \neg Ba)$	5, 6, MT
8.	$\neg Ma \lor Ba$	7, De M.
9.	Ea	4a, Simpl.
10.	$Ea \rightarrow Ma$	2, $-\forall$
11.	Ma	9, 10, MP
12.	Ba	11, 8, DS
13.	$Ma \land Ba$	11, 12, Konj.
14.	$(\exists x)\ (Mx \land Bx)$	13, $+\exists$

23)

1.	$(\forall x)\ (Tx \rightarrow Kx)$	
2.	$(\forall x)\ (Ax \rightarrow Sx)$	
3.	$(\forall x)\ (Vx \rightarrow Wx)$	
4.	$(\forall x)\ (Fx \rightarrow Nx)$	
5.	$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Mx)$	
6.	$(\forall x)\ (Gx \rightarrow Tx)$	
7.	$(\forall x)\ (Px \rightarrow \neg Sx)$	
8.	$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Fx)$	
9.	$(\forall x)\ (\neg Gx \rightarrow Vx)$	
10.	$(\forall x)\ (Nx \rightarrow Ax)$	$/\therefore\ (\forall x)\ (Px \rightarrow Wx)$
11.	$Pa \rightarrow \neg Sa$	7, $-\forall$
12.	$\neg Sa \rightarrow \neg Aa$	2, $-\forall$, Kontr.
13.	$\neg Aa \rightarrow \neg Na$	10, $-\forall$, Kontr.
14.	$\neg Na \rightarrow \neg Fa$	4, $-\forall$, Kontr.
15.	$\neg Fa \rightarrow \neg Ma$	8, $-\forall$, Kontr.
16.	$\neg Ma \rightarrow \neg Ka$	5, $-\forall$, Kontr.
17.	$\neg Ka \rightarrow \neg Ta$	1, $-\forall$, Kontr.
18.	$\neg Ta \rightarrow \neg Ga$	6, $-\forall$, Kontr.
19.	$\neg Ga \rightarrow Va$	9, $-\forall$
20.	$Va \rightarrow Wa$	3, $-\forall$
21.	$Pa \rightarrow Wa$	11–21, HS
22.	$(\forall x)\ (Px \rightarrow Wx)$	21, $+\forall$

24)

1.	$(\forall x)\ ((Ux \land Sx) \rightarrow Rx)$	
2.	$\neg (\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg Ax)$	
3.	$(\forall x)\ (Ax \rightarrow ((Sx \land \neg Rx) \rightarrow Ux))$	$/\therefore\ (\exists x)\ (Sx \land Rx)$
4.	$(\exists x)\ (Sx \land Ax)$	2, QA
5.	$Sa \land Aa$	4, $-\exists$

	6.	$(Ua \wedge Sa) \rightarrow Ra$	1, $-\forall$
	7.	$(\neg Ua \vee \neg Sa) \vee Ra$	6, Impl.
	8.	$Aa \rightarrow ((Sa \wedge \neg Ra) \rightarrow Ua)$	3, $-\forall$
	9.	Aa	5b, Simpl.
	10.	$(Sa \wedge \neg Ra) \rightarrow Ua$	9, 8, MP
	11.	Sa	5a, Simpl.
	12.	$\neg Ua \vee Ra$	11, 7, DS
	13.	$\neg Sa \vee Ra \vee Ua$	10, Impl.
	14.	$Ra \vee Ua$	13, 11, DS
	15.	$\neg Ra \rightarrow Ua$	14, Impl.
	16.	$Ua \rightarrow Ra$	12, Impl.
	17.	$\neg Ra \rightarrow Ra$	15, 16, HS
	18.	$Ra \vee Ra$	17, Impl.
	19.	Ra	18, Idemp.
	20.	$Sa \wedge Ra$	11, 19, Konj.
	21.	$(\exists x)\ (Sx \wedge Rx)$	20, $+\exists$
25)	5.	$(\forall x)\ ((Px \wedge Tx) \rightarrow Sx)$	2, QA
	6.	$(Qa \vee Ra) \rightarrow Pa$	1, $-\forall$, Kontr.
	7.	Qa	4, $-\forall$
	8.	$Qa \vee Ra$	7, Add.
	9.	Pa	8, 6, MP
	10.	$(Pa \rightarrow Ta) \wedge (Ta \rightarrow Pa)$	3, $-\forall$
	11.	$Pa \rightarrow Ta$	10a, Simpl.
	12.	Ta	9, 11, MP
	13.	$Pa \wedge Ta$	9, 12, Konj.
	14.	$(Pa \wedge Ta) \rightarrow Sa$	5, $-\forall$
	15.	Sa	13, 14, MP
	16.	$(\forall x)\, Sx$	15, $+\forall$
26)	4.	$(\exists x) \neg (Ax \rightarrow Dx)$	2, QA
	5.	$\neg (Aa \rightarrow Da)$	4, $-\exists$
	6.	$Aa \wedge \neg Da$	5, De M.
	7.	Aa	6a, Simpl.
	8.	$Aa \rightarrow \neg (Ba \wedge \neg Ca)$	1, $-\forall$
	9.	$\neg (Ba \wedge \neg Ca)$	7, 8, MP
	10.	$\neg Ba \vee Ca$	9, De M.
	11.	$(Ca \rightarrow Ea) \wedge Ba$	3, $-\forall$
	12.	Ba	11b, Simpl.

	13.	Ca	12, 10, DS
	14.	$Ca \rightarrow Ea$	11a, Simpl.
	15.	Ea	13, 14, MP
	16.	$(\exists x)\,Ex$	15, $+\exists$
27)	4.	$Wa \rightarrow (Xa \rightarrow Ya)$	1, $-\forall$
	5.	$\neg Wa \vee (\neg Xa \vee Ya)$	4, Impl.
	6.	$Xa \wedge (Za \wedge \neg Aa)$	2, $-\exists$
	7.	Xa	6a, Simpl.
	8.	$\neg Wa \vee Ya$	7, 5, DS
	9.	$Wa \rightarrow Ya$	8, Impl.
	10.	$(Wa \rightarrow Ya) \rightarrow (Ba \rightarrow Aa)$	3, $-\forall$
	11.	$Ba \rightarrow Aa$	9, 10, MP
	12.	$\neg Aa$	6c., Simpl.
	13.	$\neg Ba$	12, 11, MT
	14.	Za	6b, Simpl.
	15.	$Za \wedge \neg Ba$	14, 13, Konj.
	16.	$(\exists x)\ (Zx \wedge \neg Bx)$	15, $+\exists$
28)	5.	$La \wedge \neg Ma$	4, $-\exists$
	6.	La	5a, Simpl.
	7.	$La \vee Ma$	6, Add.
	8.	$((La \vee Ma) \rightarrow ((Na \wedge Oa) \vee Pa) \rightarrow Qa)$	1, $-\forall$
	9.	$((Na \wedge Oa) \vee Pa) \rightarrow Qa$	7, 8, MP
	10.	$(\overline{(Na \wedge Oa) \vee Pa}) \vee Qa$	9, Impl.
	11.	$((\overline{Na} \vee \overline{Oa}) \wedge \overline{Pa}) \vee Qa$	10, De M.
	12.	$(\overline{Na} \wedge \overline{Pa}) \vee (\overline{Oa} \wedge \overline{Pa}) \vee Qa$	11, Dist.
	13.	$(\overline{Na} \wedge \overline{Pa}) \vee (\overline{Oa} \vee Qa) \wedge (\overline{Pa} \vee Qa)$	12, Dist.
	14.	$\overline{NaOa}\,Qa \cdot \overline{NaPa}\,Qa \cdot \overline{Pa\,Oa}\,Qa \cdot \overline{PaPa}\,Qa$	13, Dist.
	15.	$\overline{Na} \vee \overline{Oa} \vee Qa$	14a, Simpl.
	16.	$\neg Na \vee \neg Oa \vee Qa$	15, Hilbert
	17.	$Na \rightarrow (Oa \rightarrow Qa)$	16, Impl.
	18.	$((Oa \rightarrow Qa) \wedge \neg Ra) \rightarrow Ma$	3, $-\forall$
	19.	$\neg Ma \rightarrow \neg((Oa \rightarrow Qa) \wedge \neg Ra)$	18, Kontrap.
	20.	$\neg Ma$	5b, Simpl.
	21.	$\overline{(Oa \rightarrow Qa) \wedge \neg Ra}$	19, 20, MP
	22.	$\overline{(Oa \rightarrow Qa)} \vee Ra$	21, De M.

23.	$(Oa \rightarrow Qa) \rightarrow Ra$	22, Impl.
24.	$Na \rightarrow Ra$	17, 23, HS
25.	$(\exists x)\ (Nx \rightarrow Rx)$	24, $+\exists$

29)

1.	$(\forall x)\ ((Ex \wedge \neg Lx) \rightarrow Ux)$	
2.	$(\forall x)\ ((Ux \wedge Gx) \rightarrow Lx) \vee \neg (\exists x)\ (Ux \wedge \neg Lx \wedge \neg Gx)$	
3.	$\neg Gr \wedge \neg Lr \wedge Ur$	$\underline{/ \therefore\ (\forall x)\ ((Gx \wedge Ex) \rightarrow Lx)}$
4.	$(\exists x)\ (\neg Gx \wedge \neg Lx \wedge Ux)$	3, $+\exists$
5.	$(\exists x)\ (Ux \wedge \neg Lx \wedge \neg Gx)$	4, Komm.
6.	$(\forall x)\ ((Ux \wedge Gx) \rightarrow Lx)$	5, 2, DS
7.	$Ga \wedge Ea$	KA
8.	$(Ua \wedge Ga) \rightarrow La$	6, $-\forall$
9.	$(Ea \wedge \neg La) \rightarrow Ua$	1, $-\forall$
10.	$(Ga \wedge Ua) \rightarrow La$	8, Komm.
11.	$Ga \rightarrow (Ua \rightarrow La)$	10, Exp.
12.	Ga	7a, Simpl.
13.	$Ua \rightarrow La$	12, 11, MP
14.	$Ea \rightarrow (\neg La \rightarrow Ua)$	9, Exp.
15.	Ea	7b, Simpl.
16.	$\neg La \rightarrow Ua$	15, 14, MP
17.	$\neg La \rightarrow La$	16, 13, HS
18.	$\neg\neg La \vee La$	17, Impl.
19.	La	18, Idemp.
20.	$(Ga \wedge Ea) \rightarrow La$	7–19, KB
21.	$(\forall x)\ ((Gx \wedge Ex) \rightarrow Lx)$	20, $+\forall$

30)

1.	$(\forall x)\ ((Ux \vee Lx) \rightarrow (Ix \wedge Sx))$	
2.	$(\forall x)\ ((Ix \vee Ex) \rightarrow ((Fx \vee Zx) \rightarrow Tx))$	
		$/ \therefore (\forall x)\ (Ux \rightarrow (Fx \rightarrow Tx))$
3.	Ua	KA
4.	$(Ua \vee La) \rightarrow (Ia \wedge Sa)$	1, $-\forall$
5.	$Ua \vee La$	3, Add.
6.	$Ia \wedge Sa$	5, 4, MP
7.	$((Ia \vee Ea) \rightarrow ((Fa \vee Za) \rightarrow Ta)$	2, $-\forall$
8.	Ia	6a, Simpl.
9.	$Ia \vee Ea$	8, Add.
10.	$(Fa \vee Za) \rightarrow Ta$	9, 7, MP
11.	Fa	KA
12.	$Fa \vee Za$	11, Add.
13.	Ta	12, 10, MP
14.	$Fa \rightarrow Ta$	11–13 KB
15.	$Ua \rightarrow (Fa \rightarrow Ta)$	3–14, KB
16.	$(\forall x)\ (Ux \rightarrow (Fx \rightarrow Tx))$	15, $+\forall$

31) 1)

1.	$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Gx)$	
2.	Ms	$/\ \neg Gs$
3.	$Ms \rightarrow Gs$	1, $-\forall$

Mx: x ist Mörder
Gx: x übertritt das Gesetz
s: Schopenhauer

Weiter kommen wir nicht. Der Schluß ist logisch falsch, er beruht auf einer Fallacia consequentis.

2) Zur Widerlegung einer Ansicht braucht es a) oder b)

a) Nachweis für die Unwahrheit einer Prämisse
b) Nachweis einer unkorrekten Ableitung

3) Der Satz darf nur so verstanden werden: Auf falschen Voraussetzungen kann ein logisch korrekter Schluß aufgebaut werden.

4) Der Verfasser unterscheidet nicht zwischen Wahrheit und Gültigkeit. Statt dessen benutzt er das schillernde Wort „Folgewidrigkeit“. Er scheint darunter einen Schluß zu verstehen, dessen wahren Prämissen und korrekten logischen Ableitung das unbe-

zwingbare Empfinden gegenüber steht, die Konklusion sei gleichwohl unannehmbar. Aber gerade das gibt es nicht. Im erwähnten Beispiel sind die Prämissen zweifellos wahr. Aus der Beschreibung geht hervor, daß der Autor den Schluß für logisch gültig ansieht. Da er in Wirklichkeit jedoch falsch ist, gibt es keine Folge, also auch keine unangenehme Folge oder Folgewidrigkeit.

32) 1) Entweder ist es ein Modus *Barbara* oder es ist keiner.
2) Im Sinne des Autors dürfen wir so formulieren:

(1) 1. $\underbrace{\text{Jeder Käufer}}_{S}\ \underbrace{\text{ist}}_{K}\ \underbrace{\text{zur Zahlung verpflichtet}}_{P}$

2. $\underbrace{\text{Alfred}}_{S}\ \underbrace{\text{ist}}_{K}\ \underbrace{\text{Käufer}}_{P}$

3. Also: $\underbrace{\text{Alfred}}_{S}\ \underbrace{\text{ist}}_{K}\ \underbrace{\text{zur Zahlung verpflichtet}}_{P}$

3) Der Autor sagt wörtlich „Wenn jemand eine Sache kauft“ (= wenn jemand Käufer ist) könne als Mittelterm behandelt werden. Das führt zu folgendem Syllogismus:

(2) 1. Wenn jemand Käufer ist, ist er zur Zahlung verpflichtet
2. Alfred ist wenn jemand Käufer ist
3. Also ist Alfred zur Zahlung verpflichtet

In der 2. Prämisse erweist sich der Mittelterm, falls er identisch ist mit der Formulierung in der 1. Prämisse, als absurd. Allerdings muß er identisch sein, wenn wir uns nicht den Fehler einer quaternio leisten wollen. Folglich kann „wenn jemand Käufer ist“ nicht Mittelterm sein.

Die Schwierigkeit beginnt schon früher mit einer grundsätzlichen Schwäche. Welches Wort ist die Kopula in der 1. Prämisse? Es sind zwei „ist“ vorhanden, die in der leicht abgewandelten Formulierung unseres Autors verdeckt werden.

a) Jemand ist Käufer
b) Der Käufer ist zur Zahlung verpflichtet

Die beiden sind aber nicht durch eine Kopula, sondern durch eine

Implikation verbunden. Gehen wir dabei von der abgeänderten Fassung 2) aus:

(3) 1. Wenn jemand Käufer ist, ist er zur Zahlung verpflichtet
2. Alfred ist Käufer
3. Also ist Alfred zur Zahlung verpflichtet

Dann stellt sich die Frage: Wie steht die 2. Prämisse zu a)? Aufschluß darüber bekommen wir nur aus der Struktur von a).

„Jemand ist Käufer" ist eine existenzielle Verallgemeinerung. Nach korrektem Sprachgebrauch darf für „jemand" ein Individuum eingesetzt werden, etwa „Alfred". Das ergibt

a′) Alfred ist Käufer

Die Struktur des Schlusses hat daher folgende Gestalt:

(4) 1. Wenn (jemand ist Käufer), dann (der Käufer ist zur Zahlung verpflichtet)
2. Alfred ist Käufer
3. Also ist Alfred zur Zahlung verpflichtet

formal 1. Wenn a), dann b)
2. Nun a′)
3. Also b′)

Da für einen gültigen Schluß des Modus ponens der Vordersatz der Implikation – nicht etwa ein vordersatzähnlicher Ausdruck – gegeben sein muß, wird die 1. Prämisse zuerst umzuformen sein auf: Wenn a′), dann b′). Das ist unproblematisch, weil die Beziehung zwischen a) und a′) das Verhältnis einer existenziellen Verallgemeinerung zu einer Individueneinsetzung ist. Da der Autor dieses Verhältnis nicht kennt, beruht seine Argumentation auf folgender Willküranalyse:

1. $\underbrace{\text{Jemand ist Käufer}}_{S}\ \underbrace{\text{ist}}_{K}\ \underbrace{\text{er ist zur Zahlung verpflichtet}}_{P}$

2. $\underbrace{\text{Alfred}}_{S}\ \underbrace{\text{ist}}_{K}\ \underbrace{\text{Käufer}}_{P}$

Bei 1. wird eine ganze Aussage als Subjekt deklariert, bei 2. ein

Teil der 1. Aussage. Wenn bei 2. „Alfred" Subjekt ist, dann entspricht das genau dem „jemand" von Prämisse 1. Aber das muß der Autor verschweigen, sonst wäre er gezwungen zuzugeben, daß in der ersten Prämisse „jemand" und „er" zwei Subjekte sind, sowie „Käufer" und „zur Zahlung verpflichtet" zwei Prädikate.

Zusammenfassung: Der Autor hat intuitiv korrekt eine existenzielle Einsetzung vorgenommen und anschließend einen MP ausgeführt. Da diese Regeln nicht zu seinem Logikbestand gehören, er jedoch von der Richtigkeit des Schlusses überzeugt ist, beruft er sich dafür auf die Autorität von Aristoteles. Dabei darf er sich nicht auf eine exakte Darstellung einlassen, weil ihm selber die Schwankungen in seinem Subjektbegriff auffallen müßten. Subjekt heißt im einen Fall Subjekt, im andern Fall ganze Aussage mit Subjekt, Kopula und Prädikat. Die Überlegenheit der modernen Logik zeigt sich darin, daß sie bei der Analyse eines Kernbegriffs wie Subjekt nicht nach Laune vom Teil zum Ganzen wechselt.

4.5.1

1) $(\forall x)\ (Lx \rightarrow Mx) \rightarrow (\forall y)\ (Ky \rightarrow My)$
2) $(\forall x)\ (Tx \rightarrow Vx) \rightarrow (\exists y)\ (Ny \wedge Zy)$
3) $(\exists x)\ (Vx \wedge Lx) \rightarrow (\exists y)\ (Ly \wedge Vy)$
4) $(\forall x)\ (Zx \rightarrow \neg Vx) \rightarrow \neg (\forall y)\ (Ry \rightarrow Vy)$

4.5.1

5) $(\forall x)\, Vx \rightarrow (\exists y)\ (By \wedge \neg Zy)$
6) $(\forall x)\ (Mx \rightarrow Hx)$
7) $(\forall x)\ (Fx \wedge (\exists y)\ (Ky \wedge Ay) \rightarrow Vx)$
8) $(\forall x)\ ((Mx \wedge \neg Ex) \rightarrow ((\exists y)\ (Py \wedge Fy) \rightarrow Bx))$
9) $(\forall x)\ ((Px \rightarrow Rx) \wedge ((\forall y)\ (Py \rightarrow \neg Gy) \rightarrow Gx))$

10)
1. $(\forall x)\ (Tx \rightarrow Bx)$
2. $(\exists x)\ (Bx \wedge \neg Rx) \rightarrow \neg (\exists y)\ (Ky \wedge By)$
3. $(\forall x)\ ((Px \wedge Kx) \rightarrow Tx)$ $\quad \underline{/\therefore\ (\forall x)\ ((Tx \wedge \neg Rx) \rightarrow (Px \rightarrow \neg Kx))}$
4. $(\exists x)\ (Bx \wedge \neg Rx) \rightarrow (\forall y)\ (Ky \rightarrow \neg By)$ $\quad$ 2, QA

5.	$Ta \wedge \neg Ra$	KA
6.	$Ta \rightarrow Ba$	1, $-\forall$
7.	Ta	5a, Simpl.
8.	Ba	7, 6, MP
9.	$\neg Ra$	5b, Simpl.
10.	$Ba \wedge \neg Ra$	8, 9, Konj.
11.	$(\exists x)\ (Bx \wedge \neg Rx)$	10, $+\exists$
12.	$(\forall y)\ (Ky \rightarrow \neg By)$	11, 4, MP
13.	$Ka \rightarrow \neg Ba$	12, $-\forall$
14.	$(Pa \wedge Ka) \rightarrow Ta$	3, $-\forall$
15.	$(Pa \wedge Ka) \rightarrow Ba$	14, 6, HS
16.	$Ba \rightarrow \neg Ka$	13, Kontrap.
17.	$(Pa \wedge Ka) \rightarrow \neg Ka$	15, 16, HS
18.	$\neg Pa \vee \neg Ka \vee \neg Ka$	17, Impl.
19.	$\neg Pa \vee \neg Ka$	18, Idemp.
20.	$Pa \rightarrow \neg Ka$	19, Impl.
21.	$(Ta \wedge \neg Ra) \rightarrow (Pa \rightarrow \neg Ka)$	5–20, KB
22.	$(\forall x)\ [(Tx \wedge \neg Rx) \rightarrow (Px \rightarrow \neg Kx)]$	21, $+\forall$

11)

1.	$(\forall x)\ (Ux \rightarrow Zx)$	
2.	$(\forall x)\ [(Rx \wedge Dx) \rightarrow Ux]$	
3.	$(\exists x)\ (Dx \wedge Zx) \rightarrow (\forall y)\ (Zy \rightarrow Vy)$	
	$/\therefore\ (\exists x)\,(Ux \wedge \neg Vx) \rightarrow (\forall y)\ [Zy \vee \neg (Dy \wedge Ry)]$	
4.	$(\exists x)\ (Ux \wedge \neg Vx)$	KA
5.	$(Ra \wedge Da) \rightarrow Ua$	2, $-\forall$
6.	$Ua \rightarrow Za$	1, $-\forall$
7.	$(Ra \wedge Da) \rightarrow Za$	5, 6, HS
8.	$\neg (Ra \wedge Da) \vee Za$	7, Impl.
9.	$Za \vee \neg (Ra \wedge Da)$	8, Komm.
10.	$(\forall y)\ [Zy \vee \neg (Dy \wedge Ry)]$	9, $+\forall$
11.	$(\exists x)\ (Ux \wedge \neg Vx) \rightarrow (\forall y)\ [Zy \vee \neg (Dy \wedge Ry)]$	4–10, KB

4.5.3

1) $(\forall x)\ (\exists y)\ ((Px \rightarrow Qx) \vee (Ry \wedge Sy))$

2) $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (((Px \wedge Qx) \wedge Py) \vee (Fz \rightarrow Gz))$

3)	2. $\overline{p \lor q \land (\forall x)Px}$	1, Hilbert
	3. $\overline{(p \lor q)} \lor \neg (\forall x)Px$	2, De M.
	4. $\neg (p \lor q) \lor (\exists x)\neg Px$	3, QA
	5. $(\exists x)\ (\neg (p \lor q) \lor \neg Px)$	4, QA
	6. $(\exists x)\ (\neg Px \lor \neg (p \lor q))$	5, Komm.
	7. $(\exists x)\ (Px \rightarrow \neg (p \lor q))$	6, Impl.
4)	2. $(\exists x)\neg\neg (\exists y)\neg (p \land (\exists z)Az)$	1, QA
	3. $(\exists x)\ (\exists y)\ \overline{(p \land (\exists z)Az)}$	2, DN
	4. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\neg p \lor \neg (\exists z)Az)$	3, Impl.
	5. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\neg p \lor (\forall z)\neg Az)$	4, QA
	6. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (\neg p \lor \neg Az)$	5, QV
	7. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (\neg Az \lor \neg p)$	6, Komm.
	8. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (Az \rightarrow \neg p)$	7, Impl.

4.5.3

5)	1. $(\exists x)Ax \rightarrow p$	
	2. $\neg (\exists x)Ax \lor p$	1, Impl.
	3. $(\forall x)\neg Ax \lor p$	2, QA
	4. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow p)$	3, Impl.
6)	1. $(\exists x)Ax \leftrightarrow p$	
	2. $((\exists x)Ax \rightarrow p) \land (p \rightarrow (\exists y)Ay)$	1, Äquiv.
	3. $(\neg (\exists x)Ax \lor p) \land (\neg p \lor (\exists y)Ay)$	2, Impl.
	4. $(\forall x)\ (\neg Ax \lor p) \land (\neg p \lor (\exists y)Ay)$	3, QA
	5. $(\forall x)\ (\exists y)\ ((Ax \rightarrow p) \land (p \rightarrow Ay))$	4, QA
7)	1. $\neg ((\forall x)Px \rightarrow (\forall y)Qy)$	
	2. $\overline{((\forall x)Px \rightarrow (\forall y)Qy)}$	1, Hilbert
	3. $\overline{(\overline{(\forall x)Px} \lor (\forall y)Qy)}$	2, Impl.
	4. $(\forall x)Px \land \neg (\forall y)Qy)$	3, De M.
	5. $(\forall x)Px \land (\exists y)\neg Qy)$	4, QA
	6. $(\forall x)\ (\exists y)\ (Px \land \neg Qy)$	5, PN
8)	1. $(\exists x)Ax \rightarrow ((\forall y)By \rightarrow (\exists z)Cz)$	$/\therefore (\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Ax \rightarrow (By \rightarrow Cz))$
	2. $\neg (\exists x)Ax \lor (\neg (\forall y)By \lor (\exists z)Cz)$	1, Impl.

3.	$(\forall x)\neg Ax \vee (\exists y)\neg By \vee (\exists z)\,Cz$	2, QA
4.	$(\forall x)\,(\exists y)\,(\exists z)\,(\neg Ax \vee (\neg By \vee Cz))$	3, PN
5.	$(\forall x)\,(\exists y)\,(\exists z)\,(Ax \to (By \to Cz))$	4, Impl.

5.3.1

1. Tas
2. Spr
3. $\neg$ Glp
4. Brm
5. Vezr
6. Ejmk
7. $\neg$ Efrc
8. Zkbh
9. Wabc
10. Gvmf $\to$ Gmfh

5.3.2

1. $(\forall x)\,(Jx \to Lxa)$
2. $(\exists x)\,(Kfx \wedge Bfx)$
3. $(\exists x)\,(Kfx \wedge Bxf)$
4. $(\forall x)\,(Gx \to \neg Txc)$
5. $(\forall x)\,(Gxa \to \neg Kxb)$

5.3.3

1. $(\exists x)\,(Ex \wedge (\exists y)\,(Sy \wedge Vxy))$

Ex: x ist ein Erdbeben
Sy: y ist ein Schaden
Vxy: x verursacht y

2. $(\exists x)\,(Bx \wedge (\exists y)\,(Ky \wedge \neg Exy)$

Bx: x ist Bauer
Ky: y ist eine Kartoffel
Exy: x erntet y

3. $(\forall x)\,(Gx \to (\exists y)\,(By \wedge Cxy))$

Gx: x ist Gärtner
By: y ist eine Blume
Cxy: x begießt y

4. $(\forall x)\,(Ax \to (\exists y)\,(Ly \wedge Vxy))$

Ax: x ist ein Arbeiter

By: y ist Lohn
Vxy: x verdient y

5. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow (\exists y)\ (Ly \wedge Bxy))$

Ax: x ist Angestellter
Ly: y ist Lift
Bxy: x benutzt y

6. $(\forall x)\ (\exists y)\ ((Ly \wedge Bxy) \rightarrow Ax)$
7. $(\forall x)\ (Ax \leftrightarrow (\exists y)\ (Ly \wedge Bxy))$
8. $(\forall x)\ (Hxx \rightarrow Hgx)$

Hxx: x hilft x
Hgx: Gott hilft x

5.3.4

1. Sa
2. Sat
3. Satb
4. Satbe

Wer sich zur Lebensmaxime macht, Relationsausdrücke zu umgehen, der mag 2. umformen in „Adelheid ist Tennisspielerin“: Ta. Ab 3. versagt die Reduktion auf einstellige Prädikat endgültig.

5. $(\exists x)\ (Px \wedge Rx)$
6. $(\forall x)\ (Px \rightarrow (\exists y)\ (Py \wedge Rxy))$
7. $(\forall x)\ (Px \rightarrow (\exists y)\ (Py \wedge (\exists z)\ (Vz \wedge Rxyz)))$
8. $(\forall x)\ (Px \rightarrow (\exists y)\ (Py \wedge (\exists z)\ (Vz \wedge (\forall w)\ (Aw \rightarrow Rxyzw))))$

5.3.5

1. $(\exists x)\ (Hx \wedge Gx \wedge Rxe)$

Hx: x ist Haar
Gx: x ist grau
Rxy: x hat y

2. $(\forall x)\ ((Px \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge Hxy)) \rightarrow Sx)$
3. $(\forall x)\ (Px \rightarrow (\forall y) \neg Hxy)$
4. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow (\exists y)\ (Vxy \wedge \neg (\forall y)\ (Vy \rightarrow (\exists x)\ (Sxy \wedge Hyx))$
5. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow (\exists y)\ (Py \wedge Hxy))$
6. $(\exists x)\ (Sx \wedge (\forall y) \neg (Py \wedge Hxy))$

5.3.6

1. $(\exists t)\ (\exists u)\ (Rkt \wedge Rbu \wedge (t \neq u))$
2. Umformung: Nach kurzer Zeit setzt sich die Wahrheit durch:
$(\forall t)\ (Kt \leftrightarrow Dwt)$

Kt: t ist kurze Zeitspanne
Dwt: Wahrheit setzt sich in t durch

3. $(\forall t)\ (\exists x)\, Btx \wedge (\exists t)\ (\forall x)\, Btx \wedge \neg\ (\forall t)\ (\forall x)\, Btx$

t: Zeitpunkte
x: Menschen

4. Umformung: Die Zeit ist unbestimmt, aber kurz, zu der die Kuh das Kalb zur Welt bringt.
$(\exists t)\ (Ut \wedge Kt \wedge Kkt)$
Mit 4. will nicht gessagt sein, die Kuh bringe 7 Kälber zur Welt je Woche.

5.3.6

1. $(\exists x)\ (Mx \wedge (\forall y)\ (Ky \rightarrow Sxy))$
2. $(\exists x)\ (Vx \wedge (\forall y)\ (Ky \rightarrow Bxy))$
3. $\neg\ (\forall x)\ (Px \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge Mxy))$
$\leftrightarrow (\exists x)\ (Px \wedge (\forall y)\ (Fy \rightarrow \neg\ Mxy))$
4. $(\forall x)\ (\exists y)\ ((Kyx \wedge Uy) \rightarrow Ux)$
5. $(\forall x)\ (Rx \rightarrow (\exists y)\, Ayx)$
6. $(\forall x)\ (\forall y)\ ((Lxy \wedge Lyx) \rightarrow (Nxy \wedge Nyx))$
7. Alle Menschen irren sich (= machen Irrtümer)
$(\forall x)\ (Px \rightarrow (\exists y)\ (Iy \wedge Mxy))$
8. $(\forall x)\ (Rx \rightarrow (\exists y)\ (Dy \wedge Hxy))$
9. $(\forall x)\ (\forall y)\ (Vxy \rightarrow Vxx)$
10. $(\forall x)\ ((Px \rightarrow \neg\ Bxx) \rightarrow (\exists y)\ (Py \wedge \neg\ Bxy))$

2)
1. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Bx \wedge Ty \wedge Pz \wedge Zxyz)$
2. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ ((Px \wedge Fxy) \rightarrow (Pz \rightarrow Fxz))$
3. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Lxy \rightarrow (Pz \wedge Bzx))$
4. $(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ ((Lx \wedge Py) \rightarrow Kyzx)$
5. $(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (Px \rightarrow Kxyz)$
6. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ ((Px \wedge Py \wedge Wxyz) \rightarrow Dx)$

7. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Zx \land Yy \land Az \land Exyz)$
8. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ ((Px \land Py) \rightarrow Lxyz)$
9. $(\forall x)\ (Sx \land (\exists y)\ (Ay \rightarrow Lxy)) \land \neg\ (\exists x)\ (\forall y)\ (Sx \land Lxy)$
10. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ ((Px \land Py \land Lz \land Gxyz) \rightarrow Fxz)$

3)
1. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (\exists u)\ (Gx \land Ly \land Kz \land Wu \land Uxyzu)$
2. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (\exists u)\ (Px \rightarrow (Lxyz \lor Lxyu))$
3. $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ ((Px \land Py \land Gxyz) \rightarrow \neg\ (\exists z)\ (\forall u)\ Gxzu)$
4. $(\forall x)\ (Ox \rightarrow ((\exists y)\ (Ry \land Hyx) \rightarrow (\exists z)\ (Fz \land Hzx)))$
5. $Vz \rightarrow (\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg\ Gxz)$

5.4

1)

1.	$(\forall x)\ (Bx \rightarrow (\exists y)\ Gyx)$	
2.	$(\forall x)\ (Gxp \rightarrow Exp)$	
3.	$(\forall x) \neg\ Exp$	$/\therefore \neg\ Bp$
4.	$Gbp \rightarrow Ebp$	2, $-\forall$
5.	$\neg\ Ebp$	3, $-\forall$
6.	$\neg\ Gbp$	5, 4, MT
7.	$Bp \rightarrow (\exists y)\ Gyp$	1, $-\forall$
8.	$Bp \rightarrow Gbp$	7, $-\exists$
9.	$\neg\ Bp$	6, 8, MT

2)

1.	$(\forall x)\ (Ax \rightarrow (\forall y)\ (Dy \rightarrow Gxy))$	
2.	$(\forall x)\ (Ax \rightarrow (\forall y)\ (Ky \rightarrow \neg\ Gxy))$	
3.	$(\exists x)\ Ax$	$/\therefore (\forall x)\ (Dx \rightarrow \neg\ Kx)$
4.	$Aa \rightarrow (\forall y)\ (Dy \rightarrow Gay)$	1, $-\forall$
5.	$Aa \rightarrow (Db \rightarrow Gab)$	4, $-\forall$
6.	Aa	3, $-\exists$
7.	$Db \rightarrow Gab$	6, 5, MP
8.	$Aa \rightarrow (\forall y)\ (Ky \rightarrow \neg\ Gay)$	2, $-\forall$
9.	$Aa \rightarrow (Kb \rightarrow \neg\ Gab)$	8, $-\forall$
10.	$Kb \rightarrow \neg\ Gab$	6, 9, MP
11.	$Gab \rightarrow \neg\ Kb$	10, Kontr.
12.	$Db \rightarrow \neg\ Kb$	7, 11, HS
13	$(\forall x)\ (Dx \rightarrow \neg\ Kx)$	12, $+\forall$

3)

1.	$(\forall x)\ (Ex \rightarrow (\forall y)\ (Ry \rightarrow Wxy))$	
2.	Es	$/\therefore (\exists x)\ (Ex \land (\exists y)\ (Ry \rightarrow Wxy))$

	3. $Es \rightarrow (\forall y)\,(Ry \rightarrow Wsy)$	1, $-\forall$
	4. $(\forall y)\,(Ry \rightarrow Wsy)$	2, 3, MP
	5. $Ra \rightarrow Wsa$	4, $-\forall$
	6. $(\exists y)\,(Ry \rightarrow Wsy)$	5, $+\exists$
	7. $(\exists x)\,Ex$	2, $+\exists$
	8. $(\exists x)\,(Ex \wedge (\exists y)\,(Ry \rightarrow Wxy))$	7, 6, Konj., $+\exists$
4)	3. $\neg(\forall y)\,(\neg(Cy \wedge \neg Dy)$	2, QA
	4. $\neg(\forall y)\,(Cy \rightarrow Dy)$	3, De M.
	5. $\neg(\exists x)\,(Ax \wedge Bx)$	4, 1, MT
	6. $(\forall x)\neg(Ax \wedge Bx)$	5, QA
	7. $(\forall x)\,(Ax \rightarrow \neg Bx)$	6, De M.
5)	3. Aa	2, $-\exists$
	4. $Aa \rightarrow (\forall y)\,(\exists z)\,Rayz$	1, $-\forall$
	5. $(\forall y)\,(\exists z)\,Rabz$	3, 4, MP
	6. $(\exists z)\,Rabz$	5, $-\forall$
	7. $Rabc$	6, $-\exists$
	8. $(\exists z)\,Rabz$	7, $+\exists$
	9. $(\exists y)\,(\exists z)\,Rayz$	8, $+\exists$
	10. $(\exists x)\,(\exists y)\,(\exists z)\,Rxyz$	9, $+\exists$

6) 1. $(\exists t)\,Fpt \rightarrow (\forall t)\,(\exists x)\,Bptx$
2. $(\exists x)\,(\forall t)\,Bptx \rightarrow (\forall t)\,Rpt$

/	$(\exists t)\,Fpt \rightarrow (\forall t)\,Rpt$	
	$(\exists t)\,Fpt \rightarrow (\forall t)\neg Fpt$	Substitution
	$\neg(\exists t)\,Fpt \vee (\forall t)\neg Fpt$	Impl.
	$(\forall t)\neg Fpt \vee (\forall t)\neg Fpt$	QA
	$(\forall t)\neg Fpt$	Idemp.
oder	$(\forall t)\,Rpt$	

Der Schluß ist ungültig. Er scheint nach dem Hypothetischen Syllogismus konstruiert zu sein:

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$ also folgt $p \rightarrow r$

Der Fehler wird leicht übersehen, doch der Nachsatz der 1. Prämisse ist nicht identisch mit dem Vordersatz der 2. Prämisse. Die Struktur des Schlusses ist in Wirklichkeit so:

$p \rightarrow q$
$r \rightarrow s$ also ist $p \rightarrow s$ falsch.

In der Umgangssprache wird auf die Quantorenverschiebung zu wenig geachtet. Im vorliegenden Beispiel hängt die Gültigkeit völlig von der Quantorenstellung ab. Es liegt der gleiche Fehler zugrunde wie beim falschen Schluß:

Zu jedem Menschen gibt es einen Mann, der sein Vater ist. Wenn es nun einen Mann gibt, der Vater aller Menschen ist ...

7)

1.	$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Fx)$	$/\therefore\ (\forall x)\ ((\exists y)\ (Ky \wedge Zxy) \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge Zxy))$
2.	$(\exists y)\ (Ky \wedge Zay)$	KA
3.	$Kb \wedge Zab$	2, $-\exists$
4.	$Kb \rightarrow Fb$	1, $-\forall$
5.	Kb	3a, Simpl.
6.	Fb	5, 4, MP
7.	Zab	3b, Simpl.
8.	$Fb \wedge Zab$	6, 7, Konj.
9.	$(\exists y)\ (Fy \wedge Zay)$	$+\exists$
10.	$(\exists y)\ (Ky \wedge Zay) \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge Zay)$	KB
11.	$(\forall x)\ ((\exists y)\ (Ky \wedge Zxy) \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge Zxy))$	10, $+\forall$

5.5.2

1. $C\ P\ a\ \forall\ x\ P\ x$
2. $C\ \forall\ x\ P\ x\ \exists\ x\ \overline{P\ x}$
3. $C\ \forall\ x\ P\ x\ \overline{\exists\ x}\ P\ x$
4. $C\ \forall\ x\ P\ x\ \overline{\exists\ x}\ \overline{P\ x}$
5. $\neg\ (\forall x)\, Px \rightarrow (\exists x) \neg\, Px$

$$C\ \overline{\forall\ x\ P\ x}\ \ \exists\ x\ \overline{P\ x}$$

$$\begin{array}{cccc} & \overset{1}{\overline{\overline{\not\forall\ x\ P\ x}}} & \nexists\ x & \overset{a}{\overline{P\ x}} \\ \not C & & & \\ & P\ 1 & & \overline{P\ a} \end{array} \qquad a = 1$$

6. $(\forall x)\ (Px \vee Qx) \rightarrow (\forall x)\, Px \vee (\forall x)\, Qx$
$CA\forall xPxQxA\forall xPx\forall xQx$

$\quad a$

$\not C \not A \overline{\forall xPx}\overline{Qx} A\forall xPx\forall xQx$

$\quad \overline{Pa} \qquad P1 \quad Q2$ nicht schließbar

$\qquad \overline{Qa} \quad P1 \quad Q2$

7. $\neg (\exists x)Px \leftrightarrow (\forall x)\neg Px$

$\neg (\exists x)Px \rightarrow (\forall x)\neg Px \wedge (\forall x)\neg Px \rightarrow \neg (\exists x)Px$ Q-Skizze

$KC\exists xPx\forall x\overline{Px}\,C\forall x\overline{Px}\,\overline{\exists xPx}$ a 1 und b 2

$\quad a \quad 1 \qquad b \quad 1$

$\not K \not C \overline{\overline{\not\exists xPx}}\not\forall x\overline{Px}\,\not C \not\forall x\overline{\overline{Px}}\,\overline{\not\exists xPx}$ $a = 1$

$\quad Pa \quad \overline{\overline{P1}}$ $b = 2$

$\qquad\qquad Pb \quad \overline{\overline{P2}}$

8. $(\forall x)Px \vee (\forall x)\neg Px$

$A\forall xPx\forall x\overline{Px}$

$\quad 1 \quad 2$

$\not A \not\forall xPx\not\forall x\overline{\overline{Px}}$

$\quad P1 \quad \overline{\overline{P2}}$

richtig: $(\forall x)Px \vee \neg (\forall x)Px$

$A\forall xPx\overline{\forall xPx}$

$\quad 1 \quad a$

$\not A \not\forall xPx\overline{\overline{\not\forall xPx}}$ $a = 1$

$\quad P1 \quad \overline{\overline{Pa}}$

9. $(\exists x)\ (\forall y)Rxy \rightarrow (\forall y)\ (\exists x)Rxy$

$C\exists x\forall yRxy\forall y\exists xRxy$

$\ 1 \quad a \qquad 2\ b$

$\not C \overline{\not\exists x\ \not\forall y\ Rxy}\not\forall y\not\exists xRxy$

$\qquad 1a \qquad b2$ gültig: $1 = b;\ a = 2$

10. $(\forall x)\ (\exists y)Rxy \rightarrow (\exists y)\ (\forall x)Rxy$

$C\forall x\exists yRxy\exists y\forall xRxy$

$\quad a\ \ 1 \qquad b\ \ 2$

$\not C \overline{\not\forall x\ \not\exists y\ Rxy}\not\exists y\not\forall xRxy$

$\qquad a1 \qquad 2b$

ungültig: $\begin{array}{ll} a & \\ \hline 1 & b \\ \hline & 2 \end{array}$

5.6.2

1) 1. Wa oder $a \in W$
2. $B = H$
3. $M \subset L$
4. – Das „ist“ kann nicht symbolisiert werden mit den bisherigen Mitteln; der Logiker ist daran nicht interessiert, denn es ist nur ein zufälliges bestätigendes „ist“, ein verstärktes Ja.
5. $A = A + 1$ Im strengen Sinn ist dies falsch. Es ist jedoch eine Schreibweise, die beim Programmieren üblich ist. Allerdings ist damit nicht die Identität gemeint, sondern eine Zuordnung.

2) Das wäre die aufsehenerregendste Vereinfachung der Logik.

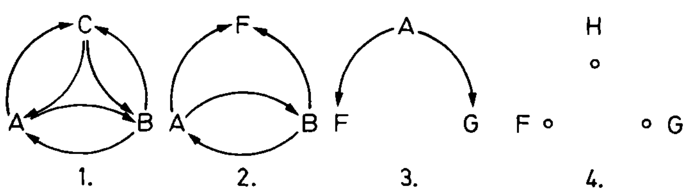
3) 1. ‚A = B‘ ist nicht eine Verallgemeinerung von ‚S ist P‘.
2. Es liegt eine zweifache Konfusion vor, einmal zwischen Prädikataussage und Identität, zum andern in der willkürlichen Zuteilung der einen Aussage zur Philosophie, der andern zur Mathematik.

4) 1. Die Analyse, „ist“ sei ein Binde- und Verhältniswort, erlaubt es dem Autor, an der wichtigen Frage vorbeizureden, welche Bedeutungen von „ist“ zu unterscheiden sind.
2. „Identität ist ein Sachverhalt“ ist eine seltsame Aussage, die mindestens erklärt werden müßte.
3. „x folgt auf y“ in Subjekt, Kopula und Prädikat auseinandergelegt ist gewaltsame Sprachanalyse nach vorgegebenem Gesichtspunkt.

5) 1. formell identisch = Identität
materiell identisch = Prädikataussage
2. Keine Ahnung

5.7

1) 1. reflexiv, symmetrisch, transitiv
2. reflexiv, symmetrisch, transitiv
3. non-reflexiv, non-symmetrisch, non-transitiv
4. irreflexiv, asymmetrisch, transitiv
5. non-reflexiv, non-symmetrisch, non-transitiv
6. irreflexiv, asymmetrisch, transitiv
7. irreflexiv, asymmetrisch, transitiv
8. irreflexiv, asymmetrisch, transitiv
9. irreflexiv, non-symmetrisch, transitiv
10. irreflexiv, symmetrisch, transitiv
11. irreflexiv, symmetrisch, intransitiv
12. irreflexiv, symmetrisch, transitiv
13. a) non-reflexiv, non-symmetrisch, non-transitiv (intransitiv)
    b) irreflexiv, symmetrisch, non-transitiv
14. irreflexiv, symmetrisch, intransitiv

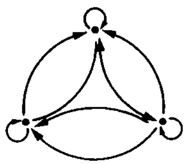


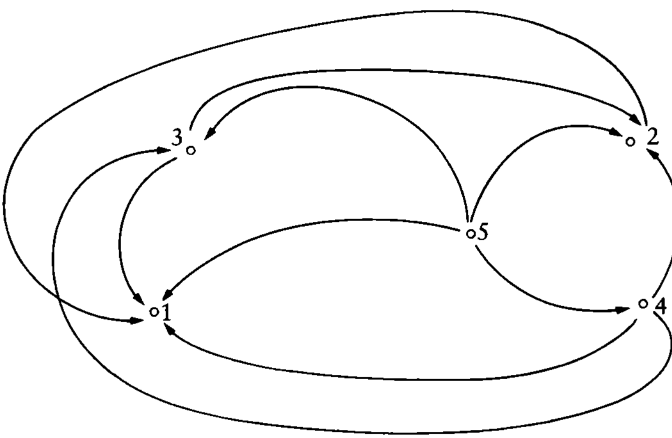
3) 1. irreflexiv, asymmetrisch, intransitiv
2. irreflexiv, asymmetrisch, intransitiv
3. non-reflexiv, asymmetrisch, non-transitiv

4)

1. und 2.

3

1. 



5) 1. irreflexiv, symmetrisch, non-transitiv

2. Die Frage ist unentscheidbar, weil der Autor nirgends definiert, was er unter einem weiten oder engen Relationsbegriff versteht. Das gleiche unklare Vorgehen erlaubt auch nicht zu kontrollieren, worin die Logiker den Geltungsbereich der Relation eingeschränkt hätten.

6) 1. nein, obwohl es Descartes so versteht.

2. a) reflexiv, symmetrisch, transitiv
   b) reflexiv, symmetrisch, intransitiv

3. Es wird die Transitivität verneint. Descartes glaubt *clarę et dinstincte* zu sehen, daß damit auch die Verneinung der Symmetrie verbunden sei.

4. Wenn die Spurenbreite der Deutschen Bundesbahn und der Französischen Nationalbahn nicht mit derjenigen der Transsibirischen Bahn übereinstimmt, so folgt daraus nicht, es müßte beim Übergang von Deutschland nach Frankreich der Radabstand verschoben werden.

7) 1. Es liegt kein aristotelischer Syllogismus mit Subjekt und Prädikat vor.

2. Es gibt keinen Mittelterm. Die Analyse ist falsch, denn wir haben kein Subjekt ‚B', auch kein Prädikat „größer als B", sondern nur die beiden Relationen „A größer als B" und „B größer als C".

3. Der Autor sagt nicht, was für ‚A', ‚B', ‚C' einzusetzen ist. Da er aber nur die Prädikatenlogik kennt, braucht es nicht explizit erwähnt zu werden, daß ohnehin nur Prädikate in Frage kommen. Das erwähnte Beispiel bleibt bei dieser Einsetzung sogar richtig.

4. Erstens läßt sich Maritain offensichtlich leiten von der Vorstellung: Nur was innerhalb der (aristotelischen) Logik als allgemeingültig nachzuweisen ist, verdient diesen Namen. Das Beispiel ist nicht auf den Syllogismus reduzierbar, folglich nicht allgemeingültig.

Zweitens nennen traditionelle Lehrbücher das Beispiel häufig ein „mathematisches Axiom" und erläutern es etwa so: „Wenn $7 > 4$ und $4 > 2$, dann ist auch $7 > 2$". Vermutlich nimmt Maritain mit dieser Traidition an, soweit Zahlen eingesetzt werden, sei das Beispiel immer wahr; Schwankungen im Wahrheitswert machen sich erst bemerkbar bei der Übertragung auf die Philosophie.

Darin liegt die Wurzel für Maritains grundsätzliche Verständnislosigkeit gegenüber der Logik. Zum zweiten Punkt ist zu bemerken, daß Zahlen gewiß nicht dasselbe wie materielle Dinge sind. Dieser Unterschied ist indessen belanglos für die Allgemeingültigkeit des Beispiels, das ja nur die Transitivität der Relation „größer als" festhält. Der Autor unterdrückt den für das Verständnis unerläßlichen Hinweis, nämlich daß für „A", „B", „C" Namen einzusetzen sind. Alles andere ist nebensächlich, weil der Wahrheitswert unberührt bleibt, ob Namen von Zahlen oder etwa Personen – Albert ist größer als Bernhard, Bernhard größer als Cäsar, also ist Albert größer als Cäsar – bevorzugt werden. Maritain legt für seine Behauptung nicht einmal vage Andeutungen zu einem Gegenbeispiel vor.

8) 1. Die Zumutung an die Syntax nimmt mit der Kenntnis des Originaltextes nicht ab: „Tout plus grand que plus grand que C" und „Tout plus grande que B est plus grand que C".

2. Da die erste Prämisse nicht wohlformuliert ist, bleibt die Frage unentscheidbar. Der 1. Syllogismus lautet nämlich:

> „Tout plus grand que plus grand que C est plus grand que C.
> Or B est plus grand que C,
> donc tout plus grand que B est plus grand que C."

Daran schließt sich überdies die Vermutung, ein Druckfehler sei bis zur 15. Auflage noch nicht korrigiert worden, weil in diesem „Syllogismus" kein „A" vorkommt, nur zweimal „B" und viermal „C".

3. Formal sollen Syllogismen aufgestellt werden. Das zeigt sich an der gequälten Formulierung der 1. Prämisse, die als affirmative Allaussage angedeutet wird. Was der Autor inhaltlich sagen will, das wird deutlicher an der zweiten Formulierung. Offenbar meint er:

> Wenn B größer als C
> A größer als B
> dann A größer als C.

Der unbeholfene Ausdruck „Alles größer als" – oder ebenso grotesk auf französisch „Tout plus grande que" – ist nur die Konsequenz aus der Subjekt-Prädikat-Einteilung, der die gesamte Logik unterworfen wird.

4. Maritain hat die Transitivität im Beispiel 7) als nicht allgemeingültig abgelehnt, während er im Beispiel 8) die Eigen-

schaft an derselben Relation exemplifiziert – diesmal nur völlig unzureichend formuliert – für einen einwandfreien Syllogismus hält.

5.8

1) Jeder Student hat genau eine Schuhgröße. Also handelt es sich um eine Funktion.

2) Der Definitionsbereich bestehe aus allen Aussagen der Aussagenlogik. Als Wertebereich sind die Wahrheitswerte wahr oder falsch aufzufassen. Jeder Aussage innerhalb der Aussagenlogik entspricht nun einer dieser Werte. Also liegt eine Funktion vor.

5.9.1

1. Der Autor kennt nur die logischen Kategorien Subjekt-Prädikat. Von da aus sieht er die Verknüpfungen so:

$$\underbrace{\text{B}}_{\text{Subjekt}} \text{ ist } \underbrace{\text{größer als C}}_{\text{Prädikat}}$$

$$\underbrace{\text{A}}_{\text{Subjekt}} \text{ ist } \underbrace{\text{größer als B}}_{\text{Prädikat}}$$

Da der Mittelterm in den beiden Prämissen nicht identisch ist, darf nach der Subjekt-Prädikatlogik nichts geschlossen werden, wie der Autor richtig bemerkt.

2. Erstens ist die Analyse wertlos, weil sich aus den beiden Prämissen keine Konklusion ergeben soll, obgleich uns der gesunde Menschenverstand nicht nur belehrt, daß es sie gibt, sondern auch wie sie lautet. Es müßte sofort eine Begründung angeschlossen werden, warum uns hier der gesunde Menschenverstand im Stich läßt. Der Autor geht nicht darauf ein, weil er keine Gründe aufzählen könnte und überdies zu befürchten hätte, die Beweislast würde sich auf die andere Komponente verschieben, nämlich auf das Subjekt-Prädikatschema. Immerhin muß man dem Autor zugute halten, daß er wenigstens einen – wenn auch untauglichen –

Versuch unternimmt, den Widerspruch aufzulösen. Seine Strategie sieht eine leichte sprachliche Umstellung vor mit der Wirkung, die Anwendung des Subjekt-Prädikatschemas zu rechtfertigen und parallel dazu die Übereinstimmung mit den Erkenntnissen des gesunden Menschenverstandes zu belegen (vgl. das Beispiel 8), Übung 5.7). Er geht so vor:

$$\underbrace{\text{Alles größer als B}}_{\text{Subjekt}} \text{ ist } \underbrace{\text{größer als C}}_{\text{Prädikat}}$$

$$\underbrace{\text{A}}_{\text{Subjekt}} \text{ ist } \underbrace{\text{größer als B}}_{\text{Prädikat}}$$

Das holprige Deutsch der 1. Prämisse – bei Maritain nicht minder ausgefallenes Französisch – ist nicht der Unachtsamkeit des Druckers anzulasten. Der Verfasser nimmt es in Kauf um der Konstruktion eines identischen Mittelterms willen. Denn damit hat er eine der bisher fehlenden Bedingungen nachgeholt und so das Haupthindernis für den Schluß ausgeräumt.

So denkt Maritain. Doch ist das Subjekt des Obersatzes dermaßen ungewohnt formuliert, daß es Verdacht erregen müßte. Vermutlich will der Autor sagen: „Alles, was größer als B ist, ist größer als C". Warum sagt er es nicht so? Weil außer dem Quantor („alles, was") für das Subjekt „größer als B ist" übrigbliebe. Soll das störende „ist", das ja nicht viel beiträgt, weggelassen werden? Seine Harmlosigkeit beweist es, wenn es ohne Schaden zum Prädikat der 2. Prämisse hinzugefügt werden darf, so daß der Untersatz lautet: „A ist größer als B ist". Diese Aussage klingt indessen nicht weniger seltsam als der Obersatz vor der Korrektur.

Aus all diesen Umstellungen ergibt sich: Die Konstruktion des identischen Mitteltermes gelingt nicht ohne Sprachverletzung, die im besten Fall so diskret verdeckt wird, daß der Logikanfänger über sie hinwegliest.

Zweitens versagt die Subjekt-Prädikateinteilung für die Analyse der Relationen bereits auf der Vorstufe zu den Syllogismen. Das sei am folgenden Beispiel gezeigt: „a ist Mutter von b". Aus

$$\underbrace{\text{a}}_{\text{Subjekt}} \text{ ist } \underbrace{\text{Mutter von b}}_{\text{Prädikat}}$$

folgt nichts. Dagegen ist für Relationen immerhin die Konverse definiert, was zur Folge hat, daß aus Mab folgt: $M^{-1}ba$, oder in der Umgangssprache: „a ist Mutter von b, also ist b ein Kind von a". Analog läßt sich aus „B ist größer als C" die vertraute Konverse erschließen „also ist C kleiner als B". Selbstverständlich ist für die Subjekt-Prädikataussage keine Konverse definiert; aus „Die Villa ist alt" folgt keineswegs „Das Neue ist eine Hütte".

Einfache Schlüsse wie ‚$(Gab \wedge Gbc) \rightarrow Gac$' lassen sich nur durch die Relationslogik rechtfertigen. Dasselbe gilt auch für elementare Analysen wie etwa die Konverse von Rxy. Damit ist die Behauptung von Maritain als falsch erwiesen, jede Relation (syllogisme oblique) lasse sich auf einen kategorischen Syllogismus (syllogisme direct) zurückführen (Vgl. J. Maritain, 298). Unfreiwillig zeigen seine Beispiele den Bankrott der Subjekt-Prädikataussagen als logisches Universalschema.

5.9.2

1. Vokabular:

a:	ich selber
Gxy:	x ist Geschwister von y
Fxy:	x ist Sohn von y
Txy:	x ist Tochter von y
Sxy:	x ist Schwester von y
(K/V)xy:	x ist Kind des Vater von y

2. Deduktion

1. $(\forall x)\ (\exists z)\ ((Kxz \wedge Vza) \rightarrow Gxa)$
2. $(\forall x)\ (\exists z)\ ((Fxz \vee Txz) \rightarrow (Kxz \wedge Vza))$
3. Vma $\qquad \underline{/\ (\forall x)\ (Txm \rightarrow Sxa)}$

Wir gehen von der bekannten Verwandtschaftsdefinition aus, daß alle Töchter eines Vaters Schwestern zu seinen übrigen Kindern sind.

4. $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ ((Txz \wedge Vzy) \rightarrow Sxy)$ Zusatzprämisse

Das gilt auch für Mathias, der mein Vater ist.

5. $(\forall x)\ ((Txm \wedge Vma) \rightarrow Sxa)$

Durch logische Umformungen erhalten wir:

6.	$(Tbm \wedge Vma) \rightarrow Sba$	5, $-\forall$
7.	$(Vma \wedge Tbm) \rightarrow Sba$	6, Komm.
8.	$Vma \rightarrow (Tbm \rightarrow Sba)$	7, Exp.
9.	$Tbm \rightarrow Sba$	8, 3, MP
10.	$(\forall x)\ (Txm \rightarrow Sxa)$	9, $+\forall$

3.Überflüssige Regeln

Das Resultat führt uns die überraschende Tatsache vor Augen, daß die 1. und 2. Prämisse nicht einmal benutzt wurden. Wir hätten sie deshalb auch kürzer so schreiben können:

1′. $(\forall x)\ ((K/V)xa \rightarrow Gxa)$
2′. $(\forall x)\ ((Fxm \vee Txm) \rightarrow (K/V)xa)$

Sie tragen deshalb nichts ein, weil „Geschwister" ohnehin als „Bruder oder Schwester" zu definieren ist, so daß wir früher oder später am Enthymem der 4. Prämisse nicht vorbeikommen. Zusammen mit 3. genügt es jedoch für die Ableitung, was auf den ersten Blick nicht vorauszusehen war.

5.10

1)	1.	$Gab \land Gbc$	$/\therefore$ Gac
	2.	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Gxy \land Gyz) \rightarrow Gxz)$	Zusatzhypothese
	3.	$(\forall y)\ (\forall z)\ ((Gay \land Gyz) \rightarrow Gaz$	2, $-\forall$
	4.	$(\forall z)\ ((Gab \land Gbz) \rightarrow Gaz)$	3, $-\forall$
	5.	$(Gab \land Gbc) \rightarrow Gac$	4, $-\forall$
	6.	Gac	1, 5, MP

2)	1.	$(\forall x)\ (Rx \rightarrow (\forall y)\ (Ay \rightarrow Txy))$	
	2.	$(\exists y)\ (Cy \land (\forall z)\ (Vz \rightarrow Tyz))$	$/\therefore (\forall x)\ (Rx \rightarrow (\forall z)\ (Vz \rightarrow Txz))$
	3.	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Txy \land Tyz) \rightarrow Txz)$	Zusatzhypothese
	4.	$(\forall x)\ (Cx \rightarrow Ax)$	Alle Citroëns sind Autos
	5.	Ra	KA
	6.	Vc	KA
	7.	$Cb \land (\forall z)\ (Vz \rightarrow Tbz)$	2, $-\exists$
	8.	Cb	7a, Simpl.
	9.	$Cb \rightarrow Ab$	4, $-\forall$
	10.	Ab	8, 9, MP
	11.	$Ra \rightarrow (\forall y)\ (Ay \rightarrow Tay)$	1. $-\forall$
	12.	$(\forall y)\ (Ay \rightarrow Tay)$	5, 11, MP
	13.	$Ab \rightarrow Tab$	12, $-\forall$
	14.	Tab	10, 13, MP
	15.	$(\forall z)\ (Vz \rightarrow Tbz)$	7b, Simpl.
	16.	$Vz \rightarrow Tbc$	15, $-\forall$
	17.	Tbc	6, 16, MP
	18.	$(\forall y)\ (\forall z)\ ((Tay \land Tyz) \rightarrow Taz)$	3, $-\forall$
	19.	$(\forall z)\ ((Tab \land Tbz) \rightarrow Taz)$	18, $-\forall$
	20.	$(Tab \land Tbz) \rightarrow Tac$	19, $-\forall$
	21.	$Tab \land Tbc$	14, 17, Konj.
	22.	Tac	21, 20, MP
	23.	$Vc \rightarrow Tac$	6–22, KB
	24.	$(\forall z)\ (Vz \rightarrow Taz)$	23, $+\forall$
	25.	$Ra \rightarrow (\forall z)\ (Vz \rightarrow Taz)$	5–24, KB
	26.	$(\forall x)\ (Rx \rightarrow (\forall z)\ (Vz \rightarrow Txz))$	25, $+\forall$

6.1.1

1) $\Box(A \rightarrow B)$. $A \rightarrow \Box B$ wäre falsch.

2) 1. In dieser Terminologie ist der Unterschied nicht greifbar. Der Leser wird den Eindruck nicht los, die Beschreibung erschöpfe sich in harmlosen Wortumstellungen.
2. Beide Texte sind gleicherweise farblos und lassen den Leser im dunklen über das, was gemeint ist. Die Verschiedenheit ist jedoch so einschneidend wie zwischen „Mädchen-Handelsschule“ und „Mädchenhandel-Schule“. Überdies stehen a) und b) im Gegensatz zueinander, denn sie behaupten:

   a) absolute Notwendigkeit = Notwendigkeite des Folgenden
   b) absolute Notwendigkeit = antezedente Notwendigkeit
3. Der Unterschied nach Thomas besteht zwischen $p \rightarrow \Box q$ und $\Box(p \rightarrow q)$. Daher wird das Verbot der absoluten Notwendigkeit ($p \rightarrow \Box q$) mit „Notwendigkeit des Folgenden“ besser ausgedrückt als mit „antezedenter Notwendigkeit“. Man darf sich kaum ausdenken, was denn b) unter der bedingten Notwendigkeit zu verstehen vermag.

3) Bei den Modalaussagen bezieht sich die Modalität auf die Aussagen, bei den Prädikataussagen auf die Prädikate. Es ist wohl metaphysischer Übereifer, der die aristotelische Logik verabsolutiert und von daher die Modalität der Kopula zuschreiben möchte.

4) Diese Behauptung ist eindeutig falsch. Es muß zwischen materialer Implikation und strenger Implikation unterschieden werden. Der Autor ist vermutlich von der Strenge des Modus ponens, der mit Hilfe der materialen Implikation ausgeführt wird, dermaßen bezaubert, daß er darin die höchste Strenge sieht, die er bedenkenlos mit „Notwendigkeit“ bezeichnet.

6.1.2

1) 1. 1. $\Box p \rightarrow p$
A necesse ad esse valet consequentia
2. $p \rightarrow \Diamond p$
Ab esse ad posse valet consequentia
3. $\Box p \rightarrow \Diamond p$ 1, 2, HS

2. Das Gegenteil ist ausdrücklich verboten. Es gibt auch keine Regel, die aus etwas Wirklichem auf Notwendiges schlösse, auch nicht vom Möglichen auf das Wirkliche.

2) 1. Der Satz findet sich in der ganzen Tradition nirgends.
2. Die Konsequenz wäre der Ruin jeglicher Modalitätenlogik, weil ja nur die Repetition, also Banalitäten erlaubt wären. Sie reichen nicht aus zur Entwicklung einer Modalitätenlogik.

6.1.3

1) 1. Kontigenz ist nicht ein Synonym von möglich. Deshalb dürfen die beiden nicht identifiziert werden.

2. Das Beispiel ist schrecklich. Es ist jedoch bei Thomas ein einmaliger „Ausrutscher", der sich denn auch nur in seiner Erstlingsschrift findet. Thomas hat mit etwa 19 Jahren diese Stelle und weitere mißratene Stellen aus einer Vorlage kopiert, die ihrerseits einen Anfänger vermuten läßt.

2) 1. Text (1) verlangt, es dürfe keinen Widerspruch geben. Text (2) behauptet, Gott wolle, daß es widersprüchliche Dinge gebe
Die beiden Texte stehen in kontradiktorischem Gegensatz zueinander.
2. Der lateinische Text spricht von kontingenten Dingen, die Gott will. Das ist völlig kohärent mit der Vorstellung, das Unmögliche müsse ausgeschlossen sein. Nur die Fehlübersetzung (contingens = sein und nichtsein) – ein paar Zeilen später wird nachgedoppelt – konstruiert diesen Widerspruch, den es bei Thomas überhaupt nicht gibt.

3. Einigen Dingen aber kommt nach der Weise ihrer Natur

zu, daß sie sind, obwohl sie nicht zu sein brauchen, also nichtsein könnten. Folglich will er, daß einige kontingente Dinge verwirklicht sind.

3) 1. Der Begriff (1) spricht über das bilateral Mögliche, hingegen (2) über das Nichtnotwendige. Die beiden sagen nicht dasselbe aus.
2. Von der Kontingenz ist Notwendigkeit wie Unmöglichkeit ausgeschlossen. Daher umfaßt kein Kontingenzbegriff das Unmögliche.

4) 1. 1. $\Diamond (\forall x)\ (Lx \rightarrow \neg Bz)$
2. $\Diamond \neg (\exists x)\ (Vx \wedge \neg Lx)$ $\quad \underline{/\ (\exists x)\ (Vx \wedge \neg Bx)}$
2. Es ist ein EAE.
3. $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$
4. Die Umformung dürfte $\Diamond (\forall x) \neg ax$ ergeben oder aufgrund der Kontingenz $\Diamond \neg (\exists x)\, ax \wedge \Diamond (\exists x)\, ax$, bestenfalls $(\exists x)\, ax$.

6.2.1

1)

L	C	K	p	$\bar{p}$	q
1					
$\cancel{L}$	$\cancel{C}$	$\bar{\cancel{K}}$	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$	q
			0	0	0
			1	1	1

2)

C	L	q	L	C	p	q	
	a		1				
$\cancel{C}$	$\bar{\cancel{L}}$	$\bar{q}$	$\cancel{L}$	$\cancel{C}$	$\bar{p}$	q	
		0			0	0	
		a			1	1	a = 1

3)

C	L	p	M	p	
	a		b		
$\cancel{C}$	$\bar{\cancel{L}}$	$\bar{p}$	$\cancel{M}$	p	
		0		0	
		a		b	a = b = 1

4)

C	A	M	p	M	q	A	M	p	M	q	
		1		1			a		b		
$\cancel{C}$	$\cancel{\bar{A}}$	$\cancel{\bar{M}}$	$\bar{p}$	$\cancel{\bar{M}}$	$\bar{q}$	$\cancel{A}$	$\cancel{M}$	p	$\cancel{M}$	q	
			0		0			0		0	
			1		1			a		b	
			$\bar{p}$					p		q	
			0					0		0	
			1					a		b	
					$\bar{q}$			p		q	a = b = 1
					0			0		0	
					1			a		b	

5)

C	K	L	p	L	q	M	K	p	q	
		a		b		c				
$\cancel{C}$	$\cancel{\bar{K}}$	$\cancel{\bar{L}}$	$\bar{p}$	$\cancel{\bar{L}}$	$\bar{q}$	$\cancel{M}$	$\cancel{K}$	p	q	
			0		0			0	0	
			a		b			c	c	
								p		
								0		
			$\bar{p}$		$\bar{q}$			c		
			0		0				q	a = b = c = 1
			a		b				0	
									c	

6)

C	K	L	C	$\bar p$	q	L	C	p	$\bar q$	$\bar M$	p
		a				b				1	
$\cancel{C}$	$\cancel{\bar K}$	$\cancel{\bar L}$	$\bar C$	$\bar p$	$\bar q$	$\cancel{\bar L}$	$\bar C$	p	$\bar{\bar q}$	$\cancel{\bar M}$	p
				0	0			0	0		0
				a	a			b	b		1
								p			p
								0			0
				$\bar p$				b			1
				0					q		p
				a					0		0
									b		1
								p			p
								0			0
						$\bar q$		b			1
						0			q		p
						a			0		0
									b		1

6.2.2

a) Wahrheitstafeln

1) $(\Box\, p \vee \Box\, q) \rightarrow (p \vee q)$

$(\Box$	p	$\vee$	$\Box$	q)	$\rightarrow$	(p	$\vee$	q)
0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1							

2) $\Diamond p \rightarrow (\Box (p \rightarrow q) \wedge \Box (p \rightarrow \neg q))$

$\Diamond$	p	$\rightarrow$	$(\Box$	(p	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	$\Box$	(p	$\rightarrow$	$\neg$	q))
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1

Kein Widerspruch, also ungültig

3) $(\Box\, p \wedge \Box (p \rightarrow q) \rightarrow r)) \rightarrow \Box (q \rightarrow r)$

$(\Box$	p	$\wedge$	$\Box$	(p	$\rightarrow$	q)	$\rightarrow$	r))	$\rightarrow$	$\Box$	(q	$\rightarrow$	r)
						1	1	0		0	1	0	0
							0						

b) Polnische Notation

1) C A L p L q L A p q

$\quad\quad a \quad b \quad 1$

$\cancel{C}\ \cancel{A}\ \cancel{L}\ \bar{p}\ \cancel{L}\ \bar{q}\ \cancel{L}\ \cancel{A}\ p\ q$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$a \quad b \quad 1 \quad 1$

$\bar{p} \quad p \quad q$

$0 \quad 0 \quad 0$

$a \quad 1 \quad 1$ a = b = 1

$\bar{q} \quad p \quad q$

$0 \quad 0 \quad 0$

$b \quad 1 \quad 1$

2) C M p K L C p q L C p q

$\quad 1 \quad 2 \quad 2$

$\cancel{C}\ \cancel{M}\ \bar{p}\ \cancel{K}\ \cancel{L}\ \cancel{C}\ p\ q\ \cancel{L}\ \cancel{C}\ p\ q$

$0 \quad 0\ 0 \quad 0\ 0$

$1 \quad 2\ 2 \quad 2\ 2$

$p\ q$

$\bar{p} \quad 0\ 0$

$0 \quad 2\ 2$ nicht

$1 \quad p\ q$ schließbar

$0\ 0$

$2\ 2$

```
3)   C  K  L  p  L  C  K  p  q  r  L  C  q  r
           a     b                 1
     C̸  K̸̄  L̸̄  p̄  L̸̄  C̸̄  K̸  p  q  r̄  L̸  C̸  q̄  r
              0           0  0  0        0  0
              a           b  b  b        1  1
                    |  |___________
                    |  |  p              q̄  r
                    |  |  0              0  0
                    |  |  b              1  1
                    |  |_______________________
                    |  |     q           q  r
                    |  |     0           0  0
              p̄     |  |     b           1  1
                    |__|_______________________________
              0     |  |        r̄        q̄  r   a = b = 1
              a     |  |        0        0  0
                    |  |        b        1  1
```

```
4)   C  M  p  M  M  p
        1     a  b
     C̸  M̸̄  p̄  M̸  M̸  p
           0        0
           1        a   a = 1
                    b̸
```

```
5)   C  C  p  q  C  L  p  q
                    a
     C̸  C̸̄  p  q̄  C̸  L̸̄  p̄  q
           0  0        0  0
        |______
        |              a
        |  p           p  q
        |  0           0  0
        |              a̸
        |____________________
        |     q̄        p  q
        |     0        0  0
        |              a̸
```

6)

$$
\begin{array}{cccccccccc}
C & L & C & p & q & L & C & L & p & q \\
 & a & & & & 1 & & b & & \\
\not{C} & \not{\bar{L}} & \not{\bar{C}} & p & \bar{q} & \not{L} & \not{C} & \not{\bar{L}} & \bar{p} & q \\
 & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 \\
 & & & a & a & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & b & \\
 & & & p & & & & & p & q \\
 & & & 0 & & & & & 0 & 0 \\
 & & & a & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & \not{b} & \\
\hline
 & & & & \bar{q} & & & & p & q \\
 & & & & 0 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & a & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & \not{b} &
\end{array}
$$

7)

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
L & C & L & C & p & q & L & C & L & p & q & \\
1 & & a & & & & 2 & & b & & & \\
\not{L} & \not{C} & \not{\bar{L}} & \not{\bar{C}} & p & \bar{q} & \not{L} & \not{C} & \bar{L} & \bar{p} & q & \\
 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & a & a & & & & 2 & 2 & \\
 & & & & & & & & & b & & \\
 & & & & p & & & & & \bar{p} & q & \\
 & & & & 0 & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & a & & & & & 2 & 2 & \\
 & & & & & & & & & \not{b} & & \\
\hline
 & & & & & \bar{q} & & & & \bar{p} & q & a = 2 \\
 & & & & & 0 & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & 1 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & a & & & & 2 & 2 & \\
 & & & & & & & & & \not{b} & &
\end{array}
$$

8)

L	C	K	C	p	q	$\bar q$	$\bar p$
1							
$\not L$	$\not C$	$\not{\bar K}$	$\not{\bar C}$	p	$\bar q$	$\bar{\bar q}$	$\bar p$
				0	0	0	0
				1	1	1	1
				p		q	$\bar p$
				0		0	0
				1		1	1
					$\bar q$	q	$\bar p$
					0	0	0
					1	1	1

9)

L	C	K	C	p	q	C	q	r	C	p	r
1											
$\not L$	$\not C$	$\not{\bar K}$	$\not{\bar C}$	p	$\bar q$	$\not{\bar C}$	q	$\bar r$	$\not C$	$\bar p$	r
				0	0		0	0		0	0
				1	1		1	1		1	1
							q			$\bar p$	r
							0			0	0
				p			1			1	1
				0				$\bar r$		$\bar p$	r
				1				0		0	0
								1		1	1
							q			$\bar p$	r
							0			0	0
					$\bar q$		1			1	1
					0			$\bar r$		$\bar p$	r
					1			0		0	0
								1		1	1

10)

L	C	K	p	q	K	p	q
1							
$\not L$	$\not C$	$\not{\bar K}$	$\bar p$	$\bar q$	$\not K$	p	q
			0	0		0	0
			1	1		1	1
						p	
						0	
			$\bar p$	$\bar q$		1	
			0	0			q
			usw.			usw.	

11) L C K K C p q C r s A p r A q s

1

$\cancel{L}\ \cancel{C}\ \cancel{\bar{K}}\ \cancel{\bar{K}}\ \bar{C}$ p $\bar{q}$ $\bar{C}$ r $\bar{s}$ $\bar{A}$ $\bar{p}$ $\bar{r}$ $\cancel{A}$ q s

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
				$\bar{p}$		q	s
		r		0		0	0
		0		1		1	1
		1			$\bar{r}$	q	s
p					0	0	0
0					1	1	1
1				$\bar{p}$		q	s
			$\bar{s}$	0		0	0
			0	1		1	1
			1		$\bar{r}$	q	s
					0	0	0
					1	1	1
				$\bar{p}$		q	s
		r		0		0	0
		0		1		1	1
		1			r	q	s
	$\bar{q}$				0	0	0
	0				1	1	1
	1			$\bar{p}$		q	s
			$\bar{s}$	0		0	0
			0	1		1	1
			1		$\bar{r}$	q	s
					0	0	0
					1	1	1

12)

$\Box$	$(\Diamond$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$(\Diamond$	p	$\wedge$	$\Diamond$	$q))$
L	C	M	K	p	q	K	M	p	M	q
1		2					a		b	
$\cancel{L}$	$\cancel{C}$	$\cancel{\bar{M}}$	$\cancel{\bar{K}}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\cancel{K}$	$\cancel{M}$	p	$\cancel{M}$	q
				0	0			0		0
				1	1			1		1
				2				a		b
								p		
								0		
				$\bar{p}$	$\bar{q}$			1		
				0	0			a		
				1	1					q
				2	2					0
										1
										b

6.2.3

1)

C	L	p	L	L	p	
	a		1	2		
$\cancel{C}$	$\cancel{L}$	p	$\cancel{L}$	$\cancel{L}$	p	
		$\cancel{0}$			$\cancel{0}$	
		a			$\cancel{1}$	
					2	a = 2

2)

C	L	p	L	L	L	L	L	p
	a		1	2	3	4	5	
$\cancel{C}$	$\cancel{L}$	p	$\cancel{L}$	$\cancel{L}$	$\cancel{L}$	$\cancel{L}$	$\cancel{L}$	p
		$\cancel{0}$						$\cancel{0}$
		a						$\cancel{1}$
								$\cancel{2}$
								$\cancel{3}$
								$\cancel{4}$
		a = 5						5

6.2.4

1)

$$
\begin{array}{cccccccc}
C & M & p & L & M & p & & \\
 & 1 & & 2 & a & & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{M}} & \bar{p} & \cancel{L} & \cancel{M} & p & & \\
 & & \emptyset & & & \emptyset & & \\
 & & 1 & & & \cancel{2} & & \\
 & & & & & a & & 1 = a
\end{array}
$$

2

$$
\begin{array}{cccccccccc}
C & M & L & M & L & L & p & L & p & \\
 & 1 & a & 2 & b & c & & 3 & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{M}} & \cancel{\bar{L}} & \cancel{\bar{M}} & \cancel{\bar{L}} & \cancel{\bar{L}} & p & \cancel{L} & p & \\
 & & & & & & \emptyset & & \emptyset & \\
 & & & & & & \cancel{1} & & 3 & \\
 & & & & & & \cancel{a} & & & \\
 & & & & & & \cancel{2} & & & \\
 & & & & & & \cancel{b} & & & \\
 & & & & & & c & & & c = 3
\end{array}
$$

3)

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
C & K & M & q & M & p & M & L & M & L & K & L & M & q & L & L & M & p \\
 & & 1 & & 2 & & a & 3 & b & 4 & & 5 & b & & 6 & 7 & d & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{K}} & \cancel{\bar{M}} & \bar{q} & \cancel{\bar{M}} & \bar{p} & \cancel{M} & \cancel{L} & \cancel{M} & \cancel{L} & \cancel{K} & \cancel{L} & \cancel{M} & q & \cancel{L} & \cancel{L} & \cancel{M} & p \\
 & & & \emptyset & & \emptyset & & & & & & & & \emptyset & & & & \emptyset \\
 & & & 1 & & 2 & & & & & & & & \cancel{a} & & & & \cancel{a} \\
 & & & & & & & & & & & & & \cancel{3} & & & & \cancel{3} \\
 & & & & & & & & & & & & & \cancel{b} & & & & \cancel{b} \\
 & & & & & & & & & & & & & \cancel{4} & & & & \cancel{4} \\
 & & & & & & & & & & & & & \cancel{5} & & & & \cancel{6} \\
 & & & & & & & & & & & & & c & & & & \cancel{7} \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & d \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & q & & & & \\
 & & & \bar{q} & & \bar{p} & & & & & & & & c & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & & & & & & & & & p \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & d
\end{array}
$$

c = 1
d = 2

6.3

1)
$$\begin{array}{lllllll}
C & L & \forall x & Fx & M & \exists x & Fx \\
 & a & b & & c & d & \\
\cancel{C} & \overline{\cancel{L}} & \overline{\cancel{\forall}x} & \overline{Fx} & \cancel{M} & \cancel{\exists}x & Fx \\
 & & & 0 & & & 0 \\
 & & & ab & & & cd
\end{array}$$

$a = c = 1$

2)
$$\begin{array}{lllllllllllll}
C & K & L & \forall x & Fx & L & \forall x & Gx & L & \forall x & K & Fx & Gx \\
 & & a & b & & c & d & & 1 & 2 & & & \\
\cancel{C} & \cancel{K} & \overline{\cancel{L}} & \overline{\cancel{\forall}x} & \overline{Fx} & \overline{\cancel{L}} & \overline{\cancel{\forall}x} & \overline{Gx} & \cancel{L} & \cancel{\forall}x & \cancel{K} & Fx & Gx \\
 & & & & 0 & & & 0 & & & & 0 & 0 \\
 & & & & ab & & & cd & & & & 12 & 12 \\
 & & & & & & & & & & & Fx & \\
 & & & & \overline{Fx} & & & \overline{Gx} & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & & & 0 & & & & 12 & \\
 & & & & ab & & & cd & & & & & Gx \\
 & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & 12
\end{array}$$

$a = c = 1$
$b = d = 2$

3)
$$\begin{array}{lllllllllllll}
C & M & \exists x & K & Fx & Gx & K & M & \exists x & Fx & M & \exists x & Gx \\
 & 1 & 2 & & & & & a & b & & c & d & \\
\cancel{C} & \overline{\cancel{M}} & \overline{\cancel{\exists}x} & \overline{\cancel{K}} & \overline{Fx} & \overline{Gx} & \cancel{K} & \cancel{M} & \cancel{\exists}x & Fx & \cancel{M} & \cancel{\exists}x & Gx \\
 & & & & 0 & 0 & & & & 0 & & & 0 \\
 & & & & 12 & 12 & & & & ab & & & cd \\
 & & & & & & & & & Fx & & & \\
 & & & & \overline{Fx} & Gx & & & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & 0 & & & & ab & & & \\
 & & & & 12 & 12 & & & & & & & Gx \\
 & & & & & & & & & & & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & cd
\end{array}$$

$a = c = 1$
$b = d = 2$

4)

$$
\begin{array}{lllllllll|llll}
C & \overline{\exists x} & M & \overline{A} & \overline{Fx} & Gx & \overline{\exists x} & M & K & Fx & \overline{Gx} & & \\
 & a & 1 & & & & 2 & b & & & & & \\
\cancel{C} & \overline{\overline{\cancel{\exists} x}} & \cancel{M} & \overline{\cancel{A}} & \overline{Fx} & Gx & \overline{\cancel{\exists} x} & \cancel{M} & \cancel{K} & Fx & \overline{Gx} & & \\
 & & & & 0a & 0a & & & & 02 & 02 & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & \underbrace{b \quad b}_{} & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & Fx & & & \\
 & & & & \overline{Fx} & Gx & & & & 02 & & & a = 2 \\
 & & & & 0a & 0a & & & & b & & & b = 1 \\
\hline
 & & & & 1 & 1 & & & & & \overline{Gx} & & \\
 & & & & & & & & & & 02 & & \\
 & & & & & & & & & & b & &
\end{array}
$$

Ausgewählte Bibliographie

Erklärungen:

(1) Aussagenlogik
(2) Prädikatenlogik
(3) Relationen
(4) Modallogik
(x) Zusätzliche Logikgebiete
M Ausführungen über Methoden

1. Die höheren Zahlen enthalten alle niedern, also (3) umfaßt auch (1) und (2).
2. Die Prädikatenlogik schließt die Aristotelische Logik und die Darstellung der Mengenlehre ein.
3. Mit „M“ wird auf Ausführungen zu Methodenfragen verwiesen. Sie können ein Drittel bis zur Hälfte des Buches umfassen. Behandelte Themen sind üblicherweise: Induktion, Wahrscheinlichkeit, Kausalität, Analogie, informelle Fehler usw.

Lehrbücher der formalen Logik

Boddenberg (E.)
(1) Logik
Diesterweg (Frankfurt a.M. 1975) Bd. 1, 103 S.

Bencivenga, (E.)
(4) Il primo libro di logica
Introduzione ai metodi della logica contemporanea
Boringhieri (Torino 1984) 228 S.
Sehr gute, etwas knappe Darstellung. Benutzt Fitsch-Deduktionen

Byerly (H.C.)
(3) + M A Primar of Logic
Harper & Row (New York 1973) 560 S.

Carlsen-Jones (M.T.)
(2) + M Introduction to Logic
McGraw-Hill (New York 1983) 570 S.

Carney (J.D.)/Scheer (R.K.)
(2) + M Fundamentals of Logic
Macmillan (New York ^{6}1968) 474 S.

Copi (I.M.)
(3) Symbolic Logic
Macmillan (London ^{4}1973) 350 S.

Essler (W.K.)/Martinez Cruzado (R.F.)
(3) Grundzüge der Logik
Klostermann (Frankfurt a.M. ^{3}1983) 304 S.
Sehr gute Begriffserklärungen. Beth-Tafeln und Dialogverfahren. Wenig Beispiele.

Fitch (F.B.)
(4) Symbolic Logic. An Introduction
Ronald (New York 1952) 238 S.
Klassisch. Fitch-Deduktionen (= natürliche Deduktionen)

Georgacarakos (G.N.)/Smith (R.)
(3) Elementary Formal Logic
McGraw-Hill (New York 1979) 401 S.

Grize (J.-B.)
(3) Logique moderne
fasc. 1: Logique des propositions et des prédicats. Déduction naturelle
[Mathématiques et sciences de l'homme 10]
Mouton (Paris 1969) 90 S.
(3) fasc. 2: Logique des propositions et des prédicats. Tables de vérité et axiomatisation
[Mathématiques et sciences de l'homme 14]
Mouton (Paris 1971) 79 S.
(4 + x) fasc. 3: Implications-modalités; Logiques polyvalentes; Logique combinatoire; Ontologie et méréologie de Leśniewski

[Mathématiques et sciences de l'homme 22]
Gauthier (Paris 1974) 110 S.

Hacking (I.)
(3) A Concise Introduction to Logic
Random (New York 1972) 337 S.
Aufdringliche Pädagogik

Halverson (W.H.)
(2) + M A Concise Logic
Random House (New York 1984) 405 S.

Hamblin (C.L.)
(3) Elementary Formal Logic
A Programmed Cours
Methuen (London 1966) 182 S.
Elementar. Ist als Begleitung gedacht

Kalish (D.)/Montague (R.)
(3) Logic. Techniques of Formal Reasoning
Brace & World (New York 1964) 350 S.
Ein spezielles Regelsystem wird benutzt; hat Ähnlichkeiten mit der Fitch-Deduktion.

Kegley (Ch. W.)/Kegley (J.A.)
(3) Introduction to Logic
Univ. Press of America (Lanham 1984) 525 S.

Kilgore (W.J.)
(3) + M An Introduction to Logic
Holt (New York ²1979) 530 S.
Mit Wörterbuch der lgischen Fachausdrücke 503–526

Purtill (R.L.)
(4) Logic for Philosophers
Harper & Row (New York 1971) 419 S.
Beispiele aus der Philosophie. Ergänzende Literaturangaben für Philosophen

Schagrin (M.L.)/Rapaport (W.J.)/Dipert (R.R.)
(2) Logic: A Computer Approach

McGraw-Hill (New York 1985) 347 S.
Anleitung (program design = unabhängig von spezieller Programmiersprache) zur Prüfung logischer Deduktionen. Setzt Programmierkenntnisse des eigenen Computers voraus. Originell.

Tapscott (B. L.)
(3) Elementary Applied Symbolic Logic
Prentice-Hall (Englewood Cliffs, N. J. 1976) 496 S.

Thomason (R. W.)
(3) Symbolic Logic. An Introduction
Macmillan (London 1970) 376 S.
Benutzt Fitch-Deduktion

Wayne (A.D.)
(4) An Introduction to Logic
Englewood Cliffs (New Jersey 1986) 585 S.

Nachschlagewerke, Übersichten, Einführungen mit wenig Beispielen

Ballard (K. E.)
Study Guide for Copi: Introduction to Logic
A Self-instructional Supplement
Macmillan (New York ^{4}1972) 274 S.
Zusatzübungen zu Copi

Blanchę (R.)
(4) Introduction à la logique contemporaine
Colin (Paris ^{2}1957) 208 S.
Wenig formaler, gut lesbarer Überblick

Borkowski (L.)
(3 + x) Formale Logik. Logische Systeme. Einführung in die Metalogik. (Hg.) L. Kreiser
Akademie (Berlin 1976) 578 S.
Nichtklassische Kalküle, Metalogik. Anspruchsvoll, aber sehr gut

Bradley (R.)/Swartz (N.)
(4) Possible Worlds. An Introduction to Logic and its Philosophy
Blackwell (Oxford 1979) 391 S.
Gut lesbar

Chenique (F.)
(3) Comprendre la logique moderne
(4 + x) Dunod (Paris 1974) vol. 1: 300 S.
vol. 2: 186 S.
Enzyklopädieartige Zusammenfassung

Church (A.)
(3) Introduction to Mathematical Logic
Univ. Press (Princeton, N.J. 1956) vol. 1: 378 S.
Mathematisch ausgerichtet. Standardwerk. Wertvolle historische Anmerkungen

Copi (I.M.)
(2) + M Introduction to Logic
Macmillan (London ^{6}1982) 604 S.
Sehr breite Einführung. Dazu Übungsbuch siehe Ballard

Dopp (J.)
Logiques construites par une méthode de déduction naturelle
Nauwelaerts (Louvain 1962) 191 S.
Natürliches Schließen

Dopp (J.)
(3) Formale Logik
Benziger (Einsiedeln 1969) 327 S.
Verweise auf Logikgeschichte. Für Philosophen empfehlenswert. Sehr gute und kommentierte Bibliographie

Gentzen (G.)
Untersuchungen über das logische Schließen
Wissenschaftl. Buchges. (Darmstadt [1934] 1969) 62 S.
Natürliches Schließen

Hinst (P.)
(3) Logische Propädeutik. Eine Einführung in die deduktive Methode und logische Sprachanalyse
Fink (München 1974) 457 S.

Kirwan (Ch.)
(4) Logic and Argument
Duckworth (London 1978) 296 S. + Appendix two
Angewandte Logik in Theorie

Klaus (G.)
Moderne Logik. Abriß der formalen Logik
VEB (Berlin $^{6\text{erw.}}$1972) 501 S.

Kleinknecht (R.)/Wüst (E.)
(1) Lehrbuch der elementaren Logik
(2 + 3) dtv (München 1976) 1–256 S. Bd. 1: Aussagenlogik
257–493 S. Bd. 2: Prädikatenlogik
Exakt, abstrakt und gründlich

Kutschere (F.) von
(3) Elementare Logik
Springer (Wien 1967) 392 S.
Ausführlich. Sehr exakt.

Lewis (C.I.)
A Survey of Symbolic Logic
Univ. of California Press (New York ^{2}1960)

Lewis (C.I.)/Langford (D.)
(4 + x) Symbolic Logic
Dover (New York ^{2}1959) 518 S.
Historisch bedeutsam für die Modallogik. Geht auf mehrwertige Logik ein

Mates (B.)
(3) Elementary Logic
Oxford Univ. Press (New York ^{2}1972) 237 S.
Im Anhang wertvoller Kurzüberblick zur Geschichte

McCawley (J.D.)
(5) Everything that Linguists have Always Wanted to Know about Logic but were ashamed to ask
Blackwell (Oxford 1981) 508 S.
Mehrwertige Logik, Fuzzy Logik und Montague Grammatik. Deduktion nach Fitch. Gut lesbare Übersicht

Menne (A.)
(4 + x) Einführung in die formale Logik
Wissenschaftl. Buchges. (Darmstadt 1985) 192 S.
Intuitionistische und mehrwertige Logiken. Gute, sehr knappe Übersicht

Prior (A.N.)
(4 + x) Formal Logic
Clarendon Press (Oxford ^{2}1962) 341 S.
Standardwerk. Behandelt auch die dreiwertige Logik. Alles in polnischer Notation.

Quine (W.v.O.)
(3) Grundzüge der Logik
Suhrkamp (Frankfurt a.M. 1974) 344 S.
Anspruchsvoll

Salmon (W.C.)
(3) Logik
Reclam (Stuttgart 1983) 287 S.
Gut lesbar. Zu wenig formal. Ergänzende Lektüre zu einem Lehrbuch

Segeth (W.)
(2) + M Elementare Logik
VEB (Berlin 1971) 297 S.

Serebrjannikov (C.L.)
(1 + x) Heuristische Prinzipien und logische Kalküle
Deutscher Verl. d. Wissensch. (Berlin 1974) 233 S.
Natürliche Kalküle und Sequenzenkalküle der Aussagenlogik, im Anhang Aussagenmodallogik.

Sinowjew (A.)/Wessel (H.)
(4 + x) Logische Sprachregeln
Fink (München 1975) 592 S.
Nichtklassische Logiken. Sehr formal, umfassend, anspruchsvoll

Suppes (P.)
(2 + x) Introduction to Logic
van Nostrand (New York [1957] [12]1969) 312 S.
Klassisch. Mathematisch ausgerichtet. Guter Teil zur Mengenlehre

Tarski (A.)
(2) + M Einführung in die mathematische Logik
Vandenhoeck & Ruprecht (Göttingen [5]1977) 285 S.

Tugendhat (E.)/Wolf (U.)
Logisch-semantische Propädeutik
Reclam (Stuttgart 1983) 268 S.
Sehr gute Begriffsbeschreibungen. Nicht formal. Ergänzung zu einem Lehrbuch

Varga (T.)
Mathematische Logik für Anfänger
Bd. 1: Aussagenlogik
VEB (Frankfurt 1970) 172 S.
Bd. 2: Prädikatenlogik
Deutsch (Zürich 1973) 255 S.
Einfach, unterhaltsam

Wessel (H.)
(4 + x) Logik
VEB (Berlin [2]1986) 395 S.
Gründlich, anspruchsvoll, sehr gut, mit polnischer und russischer Literaturangabe zur Logik.

Whitehead (A.N.)/Russell (B.)
(3) Principia Mathematica
Univ. Press (Cambridge 1910–13) 3 vols.
Teilausgabe: Principia Mathematica to *56

Univ. Press (Cambridge 1962) 410 S.
Standardwerk der Logik. Methodisch veraltet

Wright (R. A.)/Tohinaka (K.)
(2) + M Logical Thinking. A Integrated Introduction
Prentice-Hall (New Jersey 1984) 322 S.
Aussagen- und 1-stellige Prädikatenlogik mit Übersicht zur Methodologie.

Modallogik

Chellas (B. F.)
Modal Logic. An Introduction
Univ. Press (Cambridge 1980) 295 S.
Übersicht über weitere Modalsysteme. Ausgewählte Bibliographie

Feys (R.)
Modal Logics
(Ed.) J. Dopp. Nauwelaerts (Louvain 1965) 219 S.
Wertvolle Übersicht. Ausgezeichnete Bibliographie

Gardies (J.-L.)
Essai sur la logique des modalités
PUF (Paris 1979) 239 S.
Kein Lehrbuch. Gute Übersicht

Hughes (G. E.)/Cresswell (M. J.)
Einführung in die Modallogik
de Gruyter (Berlin 1978) 340 S.
Als erste Einführung in die Modallogik geeignet

Hughes (G. E.)/Cresswell (M. J.)
A Companion to Modal Logic
Methuen (London 1984) 203 S.
Weitere Entwicklungen der Modallogik. Sehr anspruchsvoll. Bibliographie

Lemmon (E. J.)
An introduction to Modal Logic. (Ed. K. Segerberg)

„Lemmon Notes". Monograph No. 11
Blackwell (Oxford 1977) 94 S.
Anspruchsvoll. Kein Lehrbuch

Snyder (D.P.)
Modal Logic and ist Applications
Van Nostrand (New York 1971) 335 S.
Sehr gute Einführung. Benutzt polnische Schreibweise

Logische Zeichen und Abkürzungen

$'$	Komplement 32
$\in$	ist ein Element von 22, 27ff.
$\notin$	ist kein Element von 23
$\subset$	echte Teilmenge = Inklusion: enthält 25, 27ff.
$\not\subset$	nicht echte Teilmenge 28
$\subseteq$	unechte Teilmenge 25
$\emptyset$, $\{\ \}$	leere Menge 24
$\cap$	Durchschnitt 34
$\cup$	Vereinigung 34
$\setminus$	Differenz 36
$\neg$, $-$	Negator, s. Negation 46, 59, N, s. Hilbert
$\wedge$, $\cdot$	Konjunktor, s. Konjunktion 47, 58, 60, 115, K
$\vee$	Disjunktor, s. Disjunktion 47, A
$\rightarrow$	Implikator, s. Implikation 47, 64ff., C
$\Rightarrow$	strikter Implikator, s. strikte Implikation, C′ 244, 257
$\leftrightarrow$	Äquivalentor, s. Äquivalenz 47, 54, 67f., E
$\Leftrightarrow$	strikter Äquivalentor, s. strikte Äquivalenz, E′ 262
$=$	Identität 223ff.
$\neq$	nicht identisch 156f.
$\downarrow$	Peircefunktion 124
$\mid$	Sheffer-Strich 124
R/S	Relationsprodukt 237f.
$p/\neg p$	Substitution von ‚p' durch ‚$\neg$ p' 242
$\Box$	Notwendigkeitsoperator 242
$\Diamond$	Möglichkeitsoperator 242
$/\underline{\qquad\qquad}$	abgeleitetetes oder abzuleitendes Resultat 88
$\therefore$	Quod erat demonstrandum (=Theorem) 89
$(\forall x)\ldots$	Allquantor, universaler Operator 164
$(\exists x)\ldots$	Existenzquantor, partikulärer Operator 165, 168
$-\forall$	UE oder $\forall$-Elimination 176
$+\forall$	UV oder $\forall$-Einführung 176
$-\exists$	EE oder $\exists$-Elimination 177
$+\exists$	EV oder $\exists$-Einführung 177
$\cancel{A}$, $\cancel{C}$, $\cancel{K}$	Streichungsregeln für Funktoren 129

$\not\forall x$	Streichungsregel für Allquantor 218ff.
$\not\exists x$	Streichungsregel für Existenzquantor 218ff.
$\cancel{A}\ p\ q$	Aufsplitterung 131
↱	KA 117 oder IA 119
$sp' = 0$	Alle s sind p 157, 169
$sp = 0$	Kein s ist p 157, 169
$sp \neq 0$	Einige s sind p 157, 169
$sp' \neq 0$	Einige s sind nicht p 157, 169
A, B, C	1. Mengen (Mengenlehre) 22
	2. Aussagenkonstante (Aussagenlogik) 44
A^2	Relationspotenz 236
a, b, c	1. Elemente (Mengenlehre), häufiger: 1, 2, 3 ... 22
p, q, r	2. Aussagenvariable 44
A, E, I, O	s. a, e, i, o 136, 141, 169
a	Alle 136, 169
e	Kein 136, 169
i	Einige 136, 169
o	Einige ... nicht 136, 169
A	Disjunktion 127
$\cancel{A}$-Regel	Streichungsregel 129
Abs.	Absorption 107
Add.	Addition 100
Äquiv.	Äquivalenz 67f.
Ass.	Assoziation 105
BF	Barcan-Formel 273ff.
C	Implikation 127
C′	Strikte Implikation 244, 257
c	per contradictionem 148ff.
$\cancel{C}$-Regel	Streichungsregel 129, 131
D	Kontravalenz 62ff.
DD	Destruktives Dilemma 103
De M	De Morgan 108
Distr.	Distribution 106
DN	Doppelte Negation 91
DS	Disjunktiver Syllogismus 99
E	Äquivalenz 127
E′	strikte Äquivalenz 262

EE	Existenzielle Einsetzung s. ∃-Elimination
EP	Ad esse ad posse valet consequentia 246
Exp.	Exportation 107
EV	Existenzielle Verallgemeinerung s. ∃-Einführung
G	großer Term 138f.
gdw	genau dann, wenn ... 67 s. Äquivalenz
Hilbert	andere Schreibweise der Negation 108, 115
HS	Hypothetischer Syllogismus 96
IA	Indirekte Annahme 119f.
IB	Indirekter Beweis 121f.
Idemp.	Idempotenz 105
Impl.	Implikation 47, 53, 64ff.
K	Konjunktion 127
K	kleiner Term 138f.
$\cancel{K}$-Regel	Streichungsregel 129, 131
KA	Konditionale Annahme 117ff.
KB	Konditionaler Beweis 117f.
KD	Konstruktives Dilemma 102
Komm.	Kommutation 105
Konj.	Konjunktionsregel 60ff.
Kontr.	Kontraposition 105
L	Notwendigkeitsoperator 257
M	Mittelterm 138
M	Möglichkeitsoperator 257
m	mutare 148
Mod.	Austausch von Modaloperatoren 242
MP	Modus ponens 87ff.
MT	Modus tollens 90f.
N	Negation 127f.
NE	A necesse ad esse valet consequentia 246
p	conversio per accidens 148
PN	Pränexe Normalform 193f.
QA	Quantorenaustausch 170, 189f.
QV	Quantorenverschiebung s. Pränexe Normalform
P, Q, R	Prädikate 162ff.
R, S, T	Relationen 201ff.
Rep.	Repetition 119
Rxy	zweistellige Relation 202

s	conversion simplex 148
S_1	Modalsystem 255
S_2	Modalsystem 255
S_3	Modalsystem 255
S_4	Modalsystem 263ff., 273, 278
S_5	Modalsystem 266f., 278
S_6	Modalsystem 266
Simpl.	Simplifikation 93
T	Modalsystem 258ff.
U	Bestimmtes im Hexagon 249
UE	Universale Einsetzung s. $\forall$-Elimination
UV	Universale Verallgemeinerung s. $\forall$-Einführung
Y	Kontingenz 249
Z-Relation	Zugänglichkeitsrelation 272, 277

Sachverzeichnis

Regeln

1) Aussagenlogik

1. Modus ponens (MP)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \quad q \end{array}$$

2. Modus tollens (MT)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \quad \neg p \end{array}$$

3. Simplifikation (Simpl.)

$$\begin{array}{l} p \land q \\ \hline p \end{array}$$

4. Konjunktion (Konj.)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \land q \end{array}$$

5. Hypothetischer Syllogismus (HS)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline p \to r \end{array}$$

6. Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \neg p \\ \hline \quad q \end{array}$$

7. Addition (Add.)

$$\begin{array}{l} p \\ \hline p \lor q \end{array}$$

8. Konstruktives Dilemma (KD)

$$\begin{array}{l} (p \to q) \land (r \to s) \\ p \lor r \\ \hline \qquad\qquad q \lor s \end{array}$$

9. Destruktives Dilemma (DD)

$$\begin{array}{l} (p \to q) \land (r \to s) \\ \neg q \lor \neg s \\ \hline \qquad\qquad \neg p \lor \neg r \end{array}$$

10. Doppelte Negation (DN) $\quad p \leftrightarrow \neg\neg p$

11. Kommutation (Komm.) $\quad (p \land q) \leftrightarrow (q \land p)$
$\quad (p \lor q) \leftrightarrow (q \lor p)$

12. Assoziation (Ass.) $\quad [p \land (q \land r)] \leftrightarrow [(p \land q) \land r]$
$\quad [p \lor (q \lor r)] \leftrightarrow [(p \lor q) \lor r]$

13. Idempotenz (Idemp.) $\quad p \leftrightarrow (p \land p)$
$\quad p \leftrightarrow (p \lor p)$

14. Kontraposition (Kontr.) $\quad (p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

15. Implikation (Impl.) $\quad (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$

16. Distribution (Distr.) $\quad [p \land (p \lor r)] \leftrightarrow [(p \land q) \lor (p \land r)]$
$\quad [p \lor (p \land r)] \leftrightarrow [(p \lor q) \land (p \lor r)]$

17. Äquivalenz (Äquiv.) $\quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \land (q \to p)]$
$\quad (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)]$

18. Exportation (Exp.) $\quad [(p \land q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$

19. Absorption (Abs.) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$

$$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$
$$p \to (p \wedge q) \leftrightarrow (p \to q)$$

20. De Morgan (De M) $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$$\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

2) Aristoteles, Mengenlehre, Prädikatenlogik

Barbara, *Celarent*, primae, *Darii*, *Ferio*que.	
Cesare, *Camestres*, *Festino*, *Baroco*, secundae.	Alle A sind B
Tertia grande sonans recitat (*Darapti*), (*Felapton*),	Kein A ist B
Disamis, *Datisi*, *Bocardo*, *Ferison*. Quartae	Einige A sind B
sunt (*Bamalip*), *Calemes*, *Dimatis*, (*Fesapo*), *Fresison*.	Einige A sind nicht B

Klassisch	Mengenlehre		Prädikatenlogik	
S a P	$A \cap B' = 0$	$sp' = 0$	$(\forall x)\ (Sx \to Px)$	$\leftrightarrow \neg (\exists x)\ (Sx \wedge \neg Px)$
S e P	$A \cap B = 0$	$sp = 0$	$(\forall x)\ (Sx \to \neg Px)$	$\leftrightarrow \neg (\exists x)\ (Sx \wedge Px)$
S i P	$A \cap B \neq 0$	$sp \neq 0$	$(\exists x)\ (Sx \wedge Px)$	$\leftrightarrow \neg (\forall x)\ (Sx \to \neg Px)$
S o P	$A \cap B' \neq 0$	$sp' \neq 0$	$(\exists x)\ (Sx \wedge \neg Px)$	$\leftrightarrow \neg (\forall x)\ (Sx \to Px)$

3) Quantorenlogik

$$\frac{(\forall x)\,Px}{Pa} - (UE) \qquad \frac{(\exists x)\,Px}{Pa} - (EE)$$

$$\frac{Pa}{(\forall x)\,Px} + (UV) \qquad \frac{Pa}{(\exists x)\,Px} + (EV)$$

4) Polnische Schreibweise und Streichungsregeln

Negation	$\neg p$	$\bar{p}$	$A\ p\ q$	$\cancel{A}\ p\ q$	$K\ p\ q$	$\cancel{K}\ p\ q$
Konjunktion	$p \wedge q$	$K\ p\ q$				
Disjunktion	$p \vee q$	$A\ p\ q$	$C\ p\ q$	$\cancel{C}\ \bar{p}\ q$	$\bar{C}\ p\ q$	$\cancel{C}\ p\ \bar{q}$
Implikation	$p \to q$	$C\ p\ q$				
Äquivalenz	$p \leftrightarrow q$	$E\ p\ q$	$\bar{K}\ p\ q$	$\cancel{K}\ \bar{p}\ \bar{q}$	$\bar{A}\ p\ q$	$\cancel{A}\ \bar{p}\ \bar{q}$

5) Modallogik

$\Box p \ \therefore\ p$	NE	A necesse ad esse valet consequentia
$p \ \therefore\ \Diamond p$	EP	Ab esse ad posse valet consequentia

$$p \Rightarrow q =_{df} \Box (p \to q): \quad C'pq =_{df} L\ C\ p\ q$$
$$p \Leftrightarrow q =_{df} \Box (p \leftrightarrow q): \quad E'pq =_{df} L\ E\ p\ q$$
$$= L\ K\ C\ p\ q\ C\ q\ p$$

$$T: p \to \Diamond p \quad \begin{array}{cc} & a \\ \cancel{C}\bar{p} & \cancel{M}p \\ 0 & 0 \\ & \cancel{a} \end{array} \qquad S_4: \Box p \to \Box \Box p \quad \begin{array}{cc} a & 12 \\ C\overline{\cancel{L}p} & \cancel{L}\cancel{L}p \\ 0 & 0 \\ a & \cancel{1} \\ & 2 \end{array} \qquad S_5: \Diamond p \to \Box \Diamond p \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & a \\ C\cancel{M}p & \cancel{L} & \cancel{M}p \\ \emptyset & & \emptyset \\ 1 & & \cancel{2} \\ & & a \end{array}$$