6. Modallogik

Die Modallogik stellt eine Erweiterung dar, jedoch in einem tiefgreifenderen Sinn als etwa die Prädikatenlogik eine Erweiterung der Aussagenlogik ist. Auf der Ebene der Symbolisierung betrachtet, kommen bloß einige neue Funktoren hinzu und die entsprechenden Regeln. Inhaltlich liegt jedoch der folgenschwere Unterschied in der Tatsache, daß die Modallogik nicht mehr wahrheitsfunktional ist.

Das besagt, daß in den bisher behandelten Gebieten die Kenntnis der Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen genügt, um die Wahrheit einer Aussagenverknüpfung zu bestimmen. So belehren uns beispielsweise die Historiker, der Satz „Henri Dunant hat das Rote Kreuz gegründet" sei wahr. Formal mag diese Aussage mit ‚D' symbolisiert werden. Wenn ich nun weiß, daß ‚D' wahr ist, dann darf ich behaupten. ‚$D \vee X$' sei ebenfalls wahr – welche Aussage auch immer ‚X' darstellen mag –, ferner ‚$\neg D$' sei falsch usw. Diese Voraussetzung erlaubt auch die Konstruktion von Tautologien, wo nur die logischen Ausdrücke wesentlich vorkommen und die deskriptiven unwesentlich sind.

Philosophen halten manchmal auch noch andere Ausdrücke für wichtig, wie „möglich", „notwendig" usw. Das führt zur Modallogik. Eine geänderte Lage gegenüber der bisherigen Logik zeigt sich darin, daß der Satz „$7 = 7$" nicht nur wahr, sondern darüber hinaus notwendig wahr ist. Wie wir gesehen haben ist der Satz ‚D' gleichfalls wahr, doch notwendig ist er durchaus nicht; es hätte etwa ein Stoiker den Gedanken der humanen Behandlung von Kriegsverletzten vorwegnehmen können, wobei er in der Zeit vor Christus und als Nicht-Schweizer vielleicht eine rote Palme als Fahne ausgesucht hätte. Die damit höchst wahrscheinlich verbundene Namensänderung läßt die Tatsache unberührt, daß die Notwendigkeit nicht von der Wahrheit des Satzes allein abhängt, sondern im weiteren Sinn von der Bedeutung. Ist also der Wahrheitswert von Aussagen bestimmt, dann sind die Wahrheitswerte der Verknüpfungen dieser Aussagen eindeutig festgelegt; über die

Notwendigkeit ist indessen nichts vorentschieden, so daß wir zu einer Vielfalt von Systemen gelangen, die sich in der Stärke der zu beweisenden Theoreme unterscheiden. Damit geraten wir von der formalen Logik in die philosophische Logik. Die strenge Analogie mit der Aussagenlogik, die ein eindeutiges, fest umrissenes, abgeschlossenes System darstellt, ist durchbrochen. Der Status der Modallogik mit ihren vielfältigen Systemen im Verhältnis zur klassischen Logik ist vergleichbar mit den nichteuklidischen Geometrien und dem Euklidsystem.

Wir schalten uns hier in ein Gebiet ein, das noch im Stadium der Entwicklung begriffen ist. Immerhin ist die Modallogik der Aussagen unbestritten. Bis Anfang der 60er Jahre unseres Jahrhunderts hat der heftigste Gegner der modallogischen Prädikatenlogik, Willard van Orman Quine, eine große Zahl Philosophen hinter sich vereinigen können. Doch mit den semantischen Deutungen von Hintikka, Kanger, Kripke, Montague haben diese Einwände ihre Überzeugungskraft eingebüßt.

6.1 Allgemeine Begriffe

Unter Modalitäten versteht man Ausdrücke wie „notwendig", „möglich" usw. Sie haben Ähnlichkeit mit den Wahrheitswertfunktoren und stimmen mindestens in der Hinsicht gegenseitiger Definierbarkeit überein nach dem Muster wie die Funktoren „$\wedge$", „$\rightarrow$", „$\leftrightarrow$" usw. durch Disjunktion und Negation darstellbar sind.

In der Modallogik legen wir den Möglichkeitsbegriff zugrunde. Er wird einer Aussage vorangestellt und gibt ihr dann die entsprechende Modalität.

Beispiel:

Augustinus war ein Philosoph
Es ist möglich, daß (Augustinus war ein Philosoph)

Es ist unwesentlich, daß in korrektem Deutsch die Worte innerhalb der Klammer leicht umzustellen sind. Wir wollen für die

Möglichkeit den Funktor „$\Diamond$" einführen. Entsprechend formalisieren wir die beiden Aussagen:

A	Augustinus war ein Philosoph
$\Diamond$ A	Es ist möglich, daß Augustinus ein Philosoph war

Da wir das Gesetz der doppelten Negation weiterhin aufrechterhalten wollen, gibt es nur die folgenden vier Kombinationsmöglichkeiten mit der Negation:

$\Diamond$ A	Es ist möglich, daß Augustinus ein Philosoph war
$\Diamond \neg$ A	Es ist möglich, daß Augustinus kein Philosoph war
$\neg \Diamond$ A	Es ist nicht möglich, daß Augustinus ein Philosoph war
$\neg \Diamond \neg$ A	Es ist nicht möglich, daß Augustinus nicht ein Philosoph war

Der letztgenannte Ausdruck ist gleichbedeutend mit: „Es ist notwendig, daß Augustinus ein Philosoph war". Diese Einsicht erlaubt uns, aufgrund der Möglichkeitsdefinition einen Notwendigkeitsoperator einzuführen. Als symbolisches Zeichen wählen wir: $\Box$. Wie beim Möglichkeitsoperator, so erlaubt auch hier die unterschiedliche Stellung der Negation vier verschiedene Bedeutungen anzuzeigen. Das Verhältnis der beiden Funktoren zueinander ist so definiert:

$$\Box p =_{df} \neg \Diamond \neg p$$

Die beiden sind also äquivalent:

(1) $\Box p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$ (Mod.)

Wir ersetzen in (1) ‚p' durch ‚$\neg$ p', also p/$\neg$ p und erhalten:

$$\Box \neg p \leftrightarrow \neg \Diamond \neg \neg p$$

Da sich die doppelte Negation aufhebt, folgt:

(2) $\Box \neg p \leftrightarrow \neg \Diamond p$

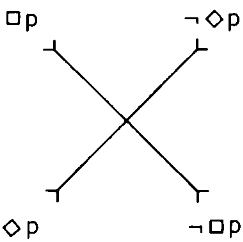
Nach der genannten Definition ist $\neg \Diamond \neg$ jederzeit ersetzbar durch $\Box$, so daß auch gilt:

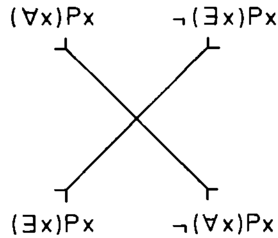
(3) $\neg \Box \neg p \leftrightarrow \Diamond p$

Das Verhältnis zwischen Modaloperatoren und Negationen läßt sich mit All- und Existenzoperator und ihren Verneinungen in Parallele setzen, weil die Beziehungen bis in Einzelheiten vergleichbar sind. Der Quantorenaustausch ist wie der Austausch der Modaloperatoren eine echte Substitution.

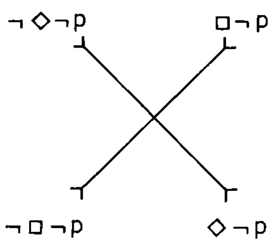
$$(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$$
$$\neg\ (\exists x) \neg\ (Px \rightarrow Qx) \qquad (\forall x)/\neg\ (\exists x)\neg$$

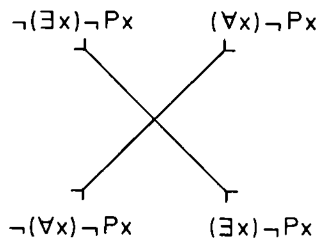
Entsprechend läßt sich das logische Quadrat weiterhin als Paradigma verwenden:





Die Beziehungen des Quadrats bleiben gewahrt, wenn $(\forall x)$ Px durch $\neg\ (\exists x)\neg$ und $\Box$ durch $\neg \Diamond \neg$ ersetzt werden.





6.1.1 Zur Definition der Modaloperatoren

Negation, Konjunktion und Disjunktion werden wie bisher verwendet, hingegen erfährt die Implikation und in ihrem Gefolge dann auch die Äquivalenz eine Veränderung. Die bisher benutzte

Implikation heißt nicht sonderlich glücklich materiale Implikation. Weniger mißverständlich ließe sie sich nach dem Erfinder *Philonische Implikation* nennen, ein Name, der sich leider nicht durchgesetzt hat. Wichtiger für uns ist im Augenblick zu wissen, daß diese Implikation seit der Antike als irritierend empfunden wurde, weil sich daraus die sogenannten Paradoxa der Implikation ergeben. Sie treten auf, sobald eine Aussage als wahr oder falsch bekannt ist.

Beispiel:
- ‚p' sei falsch. Dann ist jede Aussage ‚$p \rightarrow q$' wahr, was immer ‚q' an Wert annehmen mag.
- ‚p' sei wahr. Dann ist jede Aussage ‚$q \rightarrow p$' wahr, welchen Wert auch immer ‚q' annehmen mag.
- Und schließlich, wenn von zwei Aussagen ‚p' und ‚q' beide Werte als falsch oder als wahr bekannt sind, dann ist ‚$p \rightarrow q$', ‚$q \rightarrow p$' und folglich auch ‚$p \leftrightarrow q$' wahr.

Die Philonische Implikation schien Lewis zu schwach. Er suchte nach einem Wenn-dann-Funktor, der eine logische Verknüpfung zwischen Vorder- und Nachsatz ausdrückt. Die logische Verbindung wollte er als notwendige Verknüpfung verstehen. Mit Modaloperatoren läßt sich diese *logische Implikation* oder wie er sie nannte, diese *strikte Implikation* ausdrücken. Sie ist konstruierbar, indem wir der materialen Implikation den Notwendigkeitsoperator voranstellen, also: $\Box (p \rightarrow q)$

Die strikte Implikation ist so definiert:

$$p \Rightarrow q =_{df} \Box (p \rightarrow q)$$

was sich mit dem Möglichkeitsoperator so darstellen läßt:

1.	$p \Rightarrow q$	
2.	$\Box (p \rightarrow q)$	
3.	$\Box \neg (p \wedge \neg q)$	2, De M.
4.	$\neg \Diamond (p \wedge \neg q)$	3, $\Box \neg / \neg \Diamond$

Daher gilt auch

$$p \Rightarrow q =_{df} \neg \Diamond (p \wedge \neg q)$$

Mit diesen Definitionen halten wir uns im Bereich des Alltagsverstandes auf. Und dennoch gibt es in diesem einfachen Rahmen eine Verknüpfung, die häufig fehlerhaft gedeutet wird.

Es soll beachtet werden, daß $\Box(p \rightarrow q)$ nicht gleichwertig ist mit $p \rightarrow \Box q$. In der Umgangssprache werden häufig irreführende Wendungen benutzt wie „Wenn p, dann muß es der Fall sein, daß q". Was der Sprecher tatsächlich sagen will oder wozu er einzig berechtigt ist, das ist $\Box(p \rightarrow q)$.

> Wenn ein Auto den Vortritt hat, dann hat ihn notwendigerweise der Stadtbus.

Damit will man sagen, daß „Der Stadtbus hat den Vortritt" folgt notwendig aus „Autos haben den Vortritt". Das mag sinnvoll sein, aber eine Notwendigkeit liegt darin keineswegs, denn die Verkehrsgesetze lassen sich jederzeit abändern. Das Mittelalter hat deshalb eindringlich gewarnt: Verwechsle nicht $p \rightarrow \Box q$ (necessitas consequentis) mit $\Box(p \rightarrow q)$ (necessitas consequentiae).

Übung 6.1.1

1) Wenn Marius am 1. August in Spanien ist, dann ist er notwendigerweise am Tag der Bundesfeier im Ausland.

Formalisieren Sie diese Aussagenverknüpfung.

2) a) Aus dem Vorauswissen Gottes, das unabänderlich ist, „kann man nicht schließen, unsere Akte seien mit der absoluten Notwendigkeit notwendig, die man die Notwendigkeit des Folgenden (necessitas consequentis) nennt; sondern mit bedingter Notwendigkeit, die Folgenotwendigkeit (necessitas consequentiae) heißt (Boethius, Trost der Philos.)." Thomas, De Ver. q. 24, a. 1, ad 13. Des hl. Thomas v. Aquin Untersuchung über die Wahrheit. In deutscher Übertragung von Edith Stein (Breslau 1932–34) 2, 285.

b) „Die aristotelische Unterscheidung zwischen absoluter Notwendigkeit (oder antezedenter) und bedingter (oder konsequenter) Notwendigkeit erscheint explizit im Innersten der Theologie selbst." J. Isaac, Le Peri Hermeneias en Occident de Boèce à Saint Thomas (Paris 1953) 48.

1. Worin besteht der Unterschied zwischen Notwendigkeit des Folgenden und Folgenotwendigkeit im Text a)?
2. Ist die Terminologie von Text b) mit antezedenter und konsequenter Notwendigkeit vorzuziehen, und wie stehen die beiden Texte zueinander?
3. Gibt es nach Thomas einen greifbaren Unterschied zwischen den beiden Notwendigkeiten, und steht ihm die Formulierung von a) oder b) näher?

Wie beurteilen Sie die folgenden Aussagen 3) und 4)?

3) „Die Modalität betrifft die Kopula." W. Brugger, Die Modalität einfacher Aussagenverbindungen. Scholastik 17 (1942) 218.

4) „Die hypothetischen Aussagen [= Implikationen] tragen alle die Modalität der Notwendigkeit." W. Brugger, Ebd. 220.

6.1.2 Grundregeln

Obwohl die Modaloperatoren nicht streng wahrheitsfunktional sind, müssen einige Wahrheitsbedingungen festgelegt werden. Generell zu beachten sind zunächst die folgenden vier negativ formulierten Bedingungen:

$$\Box p \nleftrightarrow \neg p$$
$$\Box p \nleftrightarrow p$$
$$\Box p \nleftrightarrow (p \vee \neg p)$$
$$\Box p \nleftrightarrow (p \wedge \neg p)$$

Dagegen sind folgende drei Prinzipien intuitiv gültig und offensichtlich auch annehmbar:

1) 1.1 $\dfrac{\Box p}{p}$ NE (A necesse ad esse valet consequentia)

1.2 $\dfrac{p}{\Diamond p}$ EP (Ab esse ad posse valet consequentia)

Die beiden Prinzipien 1.1 und 1.2 gehen auf Aristoteles zurück und haben ihre lateinischen Namen im Mittelalter erhalten. Das erste heißt auch Notwendigkeitsaxiom, das zweite Möglichkeitsaxiom.

2) Weiter scheint annehmbar, daß jede wahre Aussage nicht bloß wahr, sondern notwendig wahr ist. Wenn ‚p' eine wahre Formel ist, dann ist nicht nur jede Aussage wahr, die die Form ‚p' hat, sondern auch jede Aussage, die die Form ‚$\Box$ p' hat. Also wenn ‚p' wahr ist, dann auch ‚$\Box$ p'.

3) Was aus einer notwendigen Wahrheit folgt, ist selbst notwendig. Also

$$\Box p \wedge (p \Rightarrow q) \rightarrow \Box q$$

oder wie üblicherweise geschrieben wird:

$$[\Box p \wedge \Box (p \rightarrow q)] \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$$

In allen Systemen bleiben 1) und 2) unverändert. Doch an die Stelle von 3) hätten wir eine andere Formel setzen können. Das würde zu einem geänderten System führen.

Bevor wir diesen Gedanken weiterverfolgen, sei eine Zwischenbemerkung über einen Begriff eingefügt, der von den Modalbegriffen nicht zu trennen ist und in der philosophischen Tradition bis heute eine große Rolle spielt: die Kontingenz.

Übung 6.1.2

1) „Wenn etwas notwendig ist, dann ist es auch möglich, aber das Gegenteil gilt nicht." Aristoteles, Hermeneutik 22b 10.

1. Zeigen Sie, daß aus dem Notwendigen das Mögliche folgt.
2. Zeigen Sie, daß das Gegenteil unerlaubt ist.

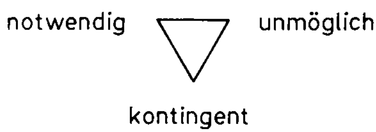
2) „Aus dem Notwendigen folgt nur das Notwendige". R. Jolivet, Traité de Philosophie (Paris 1949) 102.

1. Was halten Sie von diesem grundlegenden Satz?
2. Welche Konsequenzen ergeben sich?

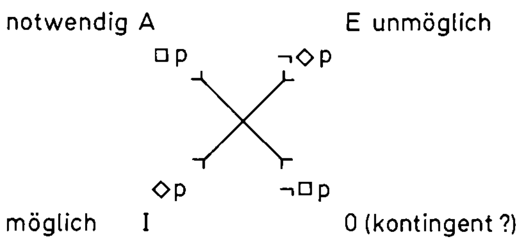
6.1.3 Zum Kontingenzbegriff

Aristoteles zögert zunächst bei der Wahl des Grundfunktors, entschließt sich dann aber doch für den Möglichkeitsbegriff. Mit welchen Schwierigkeiten er dabei zu kämpfen hat, das läßt sich schematisch darstellen.

In den *Analytica Priora* legt Aristoteles sinngemäß einen Kontingenzbegriff zugrunde, der sich in einem Dreieck darstellen läßt:



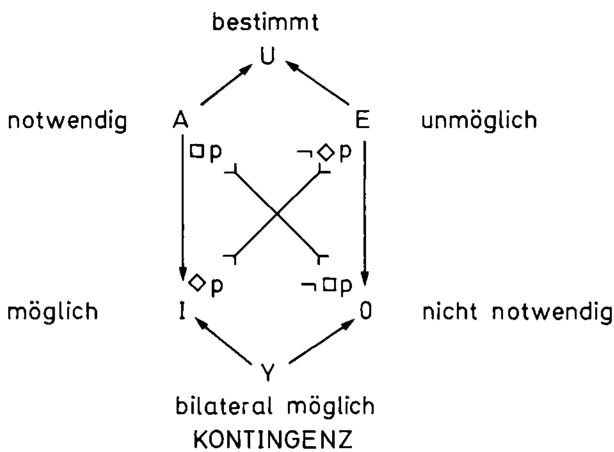
Dabei wird kontingent auf nicht genauer bezeichnete Art in Gegensatz gestellt zu Notwendigkeit und Unmöglichkeit. Aristoteles' Schüler Theophrast hat es vorgezogen, zur Erklärung das logische Quadrat zu benutzen, worin im die Renaissance und in neuerer Zeit die Neothomisten gefolgt sind.



Häufig wird zweideutig gesagt, kontingent sei das, was möglich sei, manchmal auch, unter Kontingenz sei das zu verstehen, was nicht notwendig sei. Am logischen Quadrat lesen wir ab, daß die beiden Begriffe *möglich* und *nicht notwendig* durchaus nicht identisch sind, sondern im subkonträren Gegensatz stehen.

Tatsächlich haben die Lateiner unterschieden zwischen possibile und contingens. Wahrscheinlich mit der Absolutsetzung der aristotelischen Logik seit der Renaissance dürfte das Logische Quadrat seinen Platz als eine Art Naturkonstante erobert haben. Daraus hat sich die unsorgfältige Redeweise verbreitet, das kontradiktorische Gegenteil zu notwendig sei als Kontingenz zu verstehen. Damit wäre zwar eine hinreichende Abgrenzung eingeleitet zwischen dem Möglichkeits- und Kontingenzbegriff. Doch die Schwankung im Kontingenzbegriff wird ersichtlich, sobald wir auf die vorherige Definition zurückgehen, wonach das Kontingente das ist, was sein kann aber auch nicht sein kann. Ist das nun gleichbedeutend mit *möglich* oder mit *nicht notwendig*?

Von den Modalitäten her ist eine einleuchtende Lösung denkbar. Statt am Logischen Quadrat lassen sich die gegenseitigen Beziehungen an einem Hexagon darstellen. Das sieht so aus:



Zusätzlich zu den bekannten vier Buchstaben wird an der Spitze ein „U" hinzugefügt für die Disjunktion zwischen „A" oder „E", also zwischen notwendig oder unmöglich. Auf der horizontal spiegelbildlichen Gegenseite zeigt „Y" die Konjunktion zwischen „I" und „O" an, dem zweiseitig Möglichen.

Die hexagonale Zeichnung macht deutlich, daß mit Kontingenz jeweils das bilateral Mögliche gemeint ist. Wenn das Nichtnotwendige als kontingent bezeichnet wird, so ist darunter nur verschwommene Sprache zu erkennen, die in Wirklichkeit eben doch das bilateral Mögliche meint. Für das bilateral Mögliche gibt es zwei Formulierungen:

1) a) möglich, aber
   b) möglicherweise auch nicht: $\Diamond p \wedge \Diamond \neg p$
2) a) nicht unmöglich, aber
   b) auch nicht notwendig: $\neg\neg \Diamond p \wedge \neg \Box p$

Da die Kombinationen 1a + 2b und 1b + 2a nichts wesentlich Neues beitragen, sind die Möglichkeiten erschöpft, gemäß denen die Kontingenz darstellbar ist. Wenn jeweils von kontingent oder nicht notwendig gesprochen wird, so muß der Kontext darüber Auskunft geben, ob damit eine undeutliche Abkürzung für 1) oder 2) gemeint ist oder ob ein schlichter Fehler vorliegt.

Der Möglichkeitsbegriff schließt eine Mehrdeutigkeit ein, je nachdem ob seine Beziehungen zu den übrigen Modalitäten am Dreieck, am logischen Quadrat oder am Hexagon erläutert werden. Beim Kontingenzbegriff liegt der Fall insofern einfacher als höchst bescheidene logische Mittel bereits zu einer brauchbaren Explikation führen. Im Zug weiterer Entwicklungen ist das possibile dem einseitig Möglichen reserviert worden, während das zweiseitig Mögliche als kontingent bezeichnet wird. Das Wesentliche an diesem Kontingenzbegriff liegt darin, daß die Negation einer kontingenten Tatsache nicht mehr kontingent ist, sondern den kontradiktorischen Gegensatz zu „U“ anzeigt.

Übung 6.1.3

1) „Möglich und kontingent besagen dasselbe.“ Thomas von Aquin, De propositionibus modalibus (Vivès *27*, *550*).

1. Wie beurteilen Sie diese Behauptung?
2. Wie schätzen Sie Thomas von Aquin in der Logik ein?

2) (1) Gott kann nicht wollen, daß die Bejahung und Verneinung gleichzeitig wahr sei. Das ist aber in jeder Unmöglichkeit eingeschlossen, die sich selbst widerspricht, sofern sie also einen Widerspruch einschließt. (2) „Einigen Dingen aber kommt nach

der Weise ihrer Natur zu, daß sie sein und nichtsein können und nicht notwendig sind. *Also will er* [Gott], *daß einige Dinge sein und nichtsein können*" (Thomas von Aquin, Summa contra Gentiles, Kap. 85, Übersetzung von Karl Albert usw. (Darmstadt 1974) 315–317).

1. Wie verhalten sich die Texte (1) und (2) zueinander?
2. Wie beurteilen Sie das Verhältnis, wenn der Kursivtext aus (2) so lautet: Igitur vult aliquas res esse contingentes?
3. Wie würden Sie (2) sinngemäß formulieren?

3) (1) Es gibt Dinge, „von denen es möglich ist, daß sie bestehen, aber auch möglich ist, daß sie nicht bestehen. Dafür ist der Ausdruck ‚kontingent' gebräuchlich." ... (2) „‚Kontingent' heißt zunächst soviel wie nicht notwendig. Das würde auch das Unmögliche umfassen." O. Muck, Philosophische Gotteslehre (Düsseldorf 1983) 130–131.

1. Drücken die beiden Kontingenzdefinitionen dasselbe aus?
2. Welcher Kontingenzbegriff umfaßt das Unmögliche?

4) „Ein Syllogismus in AEA kann nach AAA (Barbara) umgewandelt werden. Gegeben sei der Syllogismus:

– Es ist möglich, daß jeder Logiker (b) unverstanden (a) ist.(A)
– Es ist möglich, daß kein vernünftiger Mensch (c) ein Logiker (b) ist. (E)
– Es ist möglich, daß jeder vernünftige Mensch (c) unverstanden (a) ist. (A)

Würde dieser Syllogismus kategorisch aufgefaßt, dann wäre er unkorrekt. Doch können wir die minor [= 2. Prämisse] umformen dank der Antistrophe, einer Sondereigenschaft kontingenter Aussagen:

– Es ist möglich, daß kein vernünftiger Mensch (c) ein Logiker (b) ist $\Diamond\neg(\exists x)\,ax$

wird zu:

– Es ist möglich, daß jeder vernünftige Mensch (c) ein Logiker (b) ist $\Diamond(\forall x)\,ax$

F. Chenique, Eléments de logique classique (Paris 1975) *2*, 273–4.

1. Formalisieren Sie den Syllogismus
2. Handelt es sich, wenn die Modaloperatoren gestrichen werden, um einen kategorischen Syllogismus des Modus AEA?
3. Auf welche Sondereigenschaften dürfte der Autor bei den kontingenten Aussagen anspielen?
4. Wie rechtfertigen Sie die Umformung von $\Diamond \neg (\exists x) ax$ in $\Diamond (\forall x) ax$?

6.1.4 Wahrheitsmatrizen

Nach welchen Gesichtspunkten dürfen abgeänderte Formeln hinzugefügt und neue Systeme konstruiert werden? Lewis hat dazu brauchbare Beispiele vorgelegt. Er hat eine Reihe von Systemen entwickelt, die unter den Namen S_1 bis S_5 bekannt sind. Vorderhand sei nur bemerkt, daß es noch Zwischensysteme gibt und Systeme, die außerhalb dieses Rahmens stehen. Aus dieser Fülle wählen wir zunächst ein System aus, um anhand von Wahrheitsmatrizen begreiflich zu machen, warum sich dabei nicht eine unbestrittene Lösung aufdrängt. Als Grundlage für diese Diskussion wählen wir das System S_3.

Für die Modallogik gibt es kein Entscheidungsverfahren, wonach sich die Wahrheit nach einer Anzahl endlicher Schritte bestimmen läßt wie bei der Aussagenlogik. Es gibt indessen eine logische Technik, die erlaubt, bestimmte Aussagenverknüpfungen als nicht logische Wahrheiten auszuschließen. Damit sind wir nebenbei auch schon mit der grundsätzlichen Frage konfrontiert, warum es mehrere Modalsysteme gibt. Logikgegner sehen darin bisweilen den Beweis für die sprichwörtliche Veranlagung der Philosophen zum Monolog, was sie daran hindern soll, sich auf ein einziges System zu einigen. In Wirklichkeit steckt dahinter weder ein Mangel an Gesprächsbereitschaft noch an Toleranz, sondern die Tatsache, daß wir bis heute nicht eindeutig wissen, ob es ein einziges System geben wird, mit dem wir die Realität erfassen können. Die besten Systeme, die wir zur Zeit besitzen sind nicht so gut, daß sie alle Qualitäten der übrigen Systeme integriert hätten.

Es lassen sich intuitiv verschieden strenge Modalausdrücke unterscheiden. Schon Leibniz hat aufmerksam gemacht auf den Unterschied zwischen logischer und physischer Notwendigkeit. Zu den logischen Notwendigkeiten gehören logische oder mathematische Gesetze, zu den physischen die Gesetze der Experimentalwissenschaften. Das Verhältnis der beiden läßt sich kurz so andeuten: Was beispielsweise physikalisch notwendig (unmöglich) ist, braucht diese Modalität logisch nicht zu besitzen. Hingegen was logisch notwendig (unmöglich) ist, muß es auch physikalisch sein. 1 dm^3 Gold ist 19,3 kg schwer. Das ist eine physikalische Notwendigkeit, auf die sich die Prüfstelle für die Reinheit des Goldes definitionsmäßig verläßt, indem sie Fälschungen mit der Waage nachweist, ohne den Block in Pulver zu zerreiben. Das Gewicht ist nicht logisch notwendig, denn auf dem Mond wäre es bloß 3,1845 kg. Dagegen ist eine logische Notwendigkeit wie etwa „$2 + 2 = 4$“ immer richtig, ob wir uns auf der Erde oder auf dem Mond aufhalten.

In dieser Situation geht man theoretisch vor; es werden Modelle entwickelt mit bestimmten Eigenschaften, zu denen etwa die Widerspruchsfreiheit gehört. Einige Systeme sind besser geeignet, unsere Einstellungen zur Wirklichkeit darzulegen als andere. Deshalb werden sie auch bevorzugt.

Der Begriff der Wahrheitsmatrizen darf hier nur analog verstanden werden. Wir behelfen uns genauer gesagt mit Quasi-Wahrheitstafeln. Die Einschränkung auf Quasi-Tafeln ist deshalb erforderlich, weil sich den Zahlen keine zufriedenstellende Wahrheitswerte zuschreiben lassen. Wir wählen 4 Zahlen, die wir so interpretieren wollen:

1	logisch wahr
2	wahr, aber nicht logisch wahr
3	falsch, aber nicht logisch falsch
4	logisch falsch

Bei dieser 4wertigen Logik könnten wir sagen, 1 oder 2 würden für wahr (1), 3 oder 4 für falsch (0) stehen.

Die Definition der Funktoren zeigt einleuchtend, warum es mehrere Systeme geben kann. Während die Negation eindeutig zu definieren ist, lassen sich für die beiden Modaloperatoren folgende Werte vorschlagen:

p	$\neg p$		$\Diamond$	$\Box$
1	4		1	2
2	3		1	4
3	2		1	4
4	1		3	4

Der Notwendigkeitsoperator ist abhängig vom Möglichkeitsoperator. Deshalb übertragen sich abgeänderte Werte des Möglichkeitsoperators entsprechend auf den Notwendigkeitsoperator. Die folgenden Beispiele mögen andeuten, mit welch differenzierten Werten der Möglichkeitsoperator zu belegen ist:

$\Diamond p$ (S_1)	$\Diamond p$ (S_3)	$\Diamond p$ (S_4)	$\Diamond p$ (S_5)
2	1	1	1
2	1	2	1
2	1	1	1
4	3	4	4

Von der Wahl des Modaloperators hängen die Definitionen der strengen Implikation und strengen Äquivalenz ab. Im Anhang 1 wird ausführlicher auf den Aufbau des Systems S_3 eingegangen.

6.1.5 Systematik der Modalsysteme

Die Abweichungen der Systeme lassen sich am besten von der Axiomatik her verstehen. Lewis geht von 10 Axiomen aus:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 & (p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p) \\ A_2 & (p \wedge q) \Rightarrow p \\ A_3 & p \Rightarrow (p \wedge p) \\ A_4 & ((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \\ A_5 & ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \\ A_6 & p \Rightarrow \Diamond p \end{array}\right\} S_1$$

$$\begin{array}{ll} A_7 & \Diamond (p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p \\ A_8 & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q) \\ A_9 & \Box p \rightarrow \Box \Box p \\ A_{10} & \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p \end{array}$$

Die ersten fünf Axiome sind diejenigen des Aussagenkalküls mit strikter Implikation. Sie können ersetzt werden surch jedes beliebig bewährte Axiomensystem, also jenes von Frege, Russell, Hilbert, Curry usw. Fügt man dem Aussagenkalkül A_6 hinzu, so erhalten wir damit das erste Modalsystem S_1. Es ist allerdings unvollständig in dem Sinn, daß sich neue Axiome und Schlußregeln hinzufügen lassen, ohne daß es widersprüchlich wird. Diesen Umstand nutzte Lewis aus, denn die Erweiterung um je eines der vier Axiome A_7–A_{10} bringt ein neues System hervor und zwar in Richtung auf zunehmende Strenge. Im einzelnen heißt das: Wenn das in S_1 nicht enthaltene und nicht ableitbare Axiom A_7 beigefügt wird, entsteht daraus:

$$S_2: \quad S_1 + \Diamond(p \wedge q) \Rightarrow \Diamond p$$

Lewis hat sein System S_2 als das eigentliche System der strikten Implikation angesehen. Aber darin folgen ihm nicht alle Logiker. Analog zu den Paradoxien der materialen Implikationen in der Aussagenlogik treten nämlich in S_2 Paradoxien der strikten Implikation auf, nämlich

$$\neg \Diamond p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \quad \text{und}$$
$$\neg \Diamond p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

Viele Logiker halten diese Sätze für falsch und lehnen deswegen das System S_2 ab. – Wenn wir dem S_1 anstelle von A_7 ein anderes Axiom beifügen, nämlich A_8, dann erhalten wir S_3.

$$S_3: \quad S_1 + (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\Diamond p \Rightarrow \Diamond q)$$

Analog lassen sich S_4 und S_5 konstruieren, die aufgrund von A_9 oder A_{10} zustande kommen. Die fünf S-Systeme sind also folgendermaßen aufgebaut:

$$S_1 = \text{Die 5 Axiome} + A_6$$
$$S_2 = S_1 + A_7$$
$$S_3 = S_1 + A_8$$
$$S_4 = S_1 + A_9$$
$$S_5 = S_1 + A_{10}$$

Es gibt noch zahlreiche Zwischenstufen und Ergänzungen. Beispiele: S0.5 ist schwächer als S_1. Fügt man S_2 das Axiom

$$\Diamond \Diamond p$$

hinzu, so erhalten wir S_6, das unabhängig von S_1–S_5 ist und unverträglich mit S_4 und S_5 usw.

Diese allgemeine Zusammenstellung mag vorderhand genügen. Wir wollen uns einigen Systemen und deren Entscheidung zuwenden.

6.2 Modale Aussagenlogik

Die modale Aussagenlogik geht schon auf Aristoteles zurück. Im Mittelalter ist die Argumentations- und Wissenschaftssprache eingehend analysiert worden, wobei vor allem die modale Aussagenlogik in den Blickpunkt gerückt ist. Die heutige Logik versucht, die Erkenntnisse zusammenzufassen und auf die modale Prädikatenlogik auszudehnen. Sehr viele Probleme der Modalitäten lassen sich aber bereits auf der Grundlage der modalen Aussagenlogik besprechen.

6.2.1 Ein einfaches System

Wir beginnen mit einem einfachen System. Es ist eingeschränkt in einer Weise wie etwa die aristotelische Syllogistik, die nur dann anwendbar ist, wenn genau zwei Prämissen mit je einer Subjekt-Prädikataussage vorliegen, die überdies weiteren Zusatzbedingungen unterworfen sind. Dadurch ist die praktische Anwendbarkeit eher selten eintreffenden Situationen vorbehalten. Unser Hilfssystem ist in dem Sinne eingeschränkt, daß nur Aussagenverknüpfungen zugelassen sind, deren Atomformeln jeweils die gleiche Anzahl der Modaloperatoren enthalten.

Zugelassen	Ausgeschlossen
$\Box p \rightarrow \Diamond p$	$p \rightarrow \Diamond p$
$\Diamond \Diamond (p \rightarrow p)$	$\Box (p \vee \Box p)$

Zur theoretischen Vervollständigung mag noch eine genauere Beschreibung von der Axiomatik her angeschlossen werden. Das einfache System besteht aus folgenden Elementen:

1. aus den 5 Axiomen der klassischen Aussagenlogik in strikter Implikation
2. aus zwei Modalaxiomen

$$\begin{array}{ll} 2.1 & p \rightarrow \Diamond p \\ 2.2 & \Diamond (p \vee q) \rightarrow \Diamond p \vee \Diamond q \end{array}$$

Das Axiom 2.1 ist genau unser Axiom A_6. Hingegen ist 2.2 nicht genau das charakteristische Axiom S_2, denn 2.2 setzt nicht die strenge Äquivalenz voraus. Unser Hilfssystem ist also ein Zwischensystem zwischen S_1 und S_2. Aber das soll uns nicht weiter beschäftigen.

Zur Auswertung empfiehlt sich hier die polnische Schreibweise mit der Streichungstechnik, die wir früher schon benutzt haben. Den Notwendigkeitsoperator schreiben wir mit L, denjenigen der Möglichkeit mit M und die strenge Implikation als C′. Als Definition gelten die unter 6.1.1 und 6.1.2 genannten Beziehungen. Danach sind die beiden Modalfunktoren gegeneinander austauschbar. In der polnischen Notation ist dies übersichtlich:

$$Lp =_{df} \bar{M}\bar{p}$$

Die große Ähnlichkeit der Modaloperatoren mit den Quantoren der Prädikatenlogik wird dazu benutzt, die Streichungsregeln zu übertragen. Der Notwendigkeitsoperator wird durch eine Zahlen- und der Möglichkeitsoperator durch eine Buchstabenkonstante ersetzt.

$$Lp \quad \overset{1}{\cancel{L}}\, p \qquad \text{und} \qquad Mp \quad \overset{a}{\cancel{M}}\, p$$

Auswertung

Unter jede Variable wird zuerst die Konstante Null „0“ geschrieben und dann folgt die bereits bekannte Auswertung.

Beispiele:

$$\begin{array}{llll} L & C & p & q \\ 1 & & & \\ \cancel{L} & \cancel{C} & \bar{p} & q \\ & & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lllll} K & M & p & M & q \\ & a & & b & \\ \cancel{K} & \cancel{M} & p & \cancel{M} & q \\ & & 0 & & 0 \\ & & a & & b \end{array}$$

Eine modale Aussagenverknüpfung ist unter den bisher bekannten Bedingungen geschlossen, nämlich genau dann, wenn eine Variable gleichzeitig mit ihrer Negation auftritt.

Beispiele:

$$\begin{array}{lllll}
L & C & p & p & \\
1 & & & & \\
\cancel{L} & \cancel{C} & \bar{p} & p & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 & \\
 & 1, & \bar{p} & p & \text{geschlossen} \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & 1 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
M & M & C & p & p & & & & & \\
a & b & & & & & & & & \\
\cancel{M} & \cancel{M} & \cancel{C} & \bar{p} & p & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & a & a & & a,\ b, & \bar{p} & p & \text{geschlossen} \\
 & & & b & b & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & a & a & \\
 & & & & & & & b & b &
\end{array}$$

Übung 6.2.1

1) L C K p $\bar{p}$ q
2) C L q L C p q
3) C L p M p
4) C A M p q A M p M q
5) C K L p L q M K p q
6) C K L C $\bar{p}$ q L C p $\bar{q}$ $\bar{M}$ p

Dieses System gilt als schwach. Wir wenden uns einem stärkeren zu, dem System T.

6.2.2 Das System T

Das System T enthält folgende Elemente:

1. Die Axiome des Aussagenkalküls

2. Die Definitionen von $\Box$, $\Diamond$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$
3. Die zwei zusätzlichen Axiome

   $\Box\, p \rightarrow p$ Notwendigkeitsaxiom

   $\Box\,(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box\, p \rightarrow \Box\, q)$

4. Die Notwendigkeitsregel:
   Wenn p eine wahre Aussage ist, dann auch $\Box$ p

Das System T legt keine Beschränkungen auf in der Anzahl der zugelassenen Modaloperatoren. Deshalb gilt etwa die im Hilfssystem ausgeschlossene Formel

$$p \rightarrow \Diamond p \qquad C\ p\ M\ p$$

geradezu als charakteristisch für T.

S_1 enthält fast die ganze Basis von T. S_2 ist noch stärker als S_1, aber immer noch nicht so stark wie T. T ist deshalb mit S_2 zu vergleichen. Es enthält S_2, ist aber selber nicht in S_2 enthalten. T enthält jedoch S_3 nicht mehr.

Da unser einfaches System in T enthalten ist, sind alle Theoreme dieses Systems auch T-gültig. Es gibt aber T-gültige Formeln, die im einfacheren System nicht als gültig nachweisbar sind. Bevor wir genauer darauf eingehen, soll anhand von einigen Beispielen gezeigt werden, wie zur Entscheidung Wahrheitstafeln und Deduktion eingesetzt werden können.

Wir wählen die Technik der teilweisen Wahrheitstafeln mit nur zwei Wahrheitswerten wahr–falsch. Dabei wird die Formel als falsch angenommen. Stellt sich infolge der Zuordnung der Werte ein Widerspruch ein, so ist damit die Annahme als ungerechtfertigt nachgewiesen.

Als Ergänzung zur Aussagenlogik verlangt die Modallogik eine zusätzliche Anweisung, wie mit $\Box$ und $\Diamond$ umzugehen ist. Es soll gelten: Wenn ‚p' wahr ist, dann muß erst recht ‚$\Diamond$ p' wahr sein. Entsprechend müssen wir ‚p' den Wert „1" zuschreiben, wenn ‚$\Box$ p' den Wert „1" hat. Es wird also genau bestimmt:

wenn $\Box$ p (1), dann auch p (1)
wenn p (1), dann auch $\Diamond$ p (1).

Wird unter diesen Voraussetzungen ein Widerspruch aufgezeigt, so ist damit die T-Gültigkeit bewiesen.

1) Wir zeigen, daß $\Box p \rightarrow p$ richtig ist

1.	$\Box$	p	$\rightarrow$	p
	1	0	0	0
		1		

2) Ist die Formel $\Box \neg p \rightarrow (p \Rightarrow q)$ gültig?

2.	$\Box$	$\neg$	p	$\rightarrow$	$\Box$	$(p$	$\rightarrow$	$q)$
	1	1	0	0	1	0	1	0
			1					

Übung 6.2.2

Beweisen Sie a) mit Wahrheitstafeln, b) in polnischer Notation:

1) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$
2) $\Diamond p \rightarrow [\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(p \rightarrow \neg q)]$
3) $[\Box p \wedge \Box(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow \Box(q \rightarrow r)$

3) Wir beweisen, daß aus $\Box p \rightarrow p$ folgt: $p \rightarrow \Diamond p$

1. $\Box p \rightarrow p$	Pr.
2. $\Box \neg p \rightarrow \neg p$	1, $p/\neg p$
3. $\neg\neg p \rightarrow \neg \Box \neg p$	2, Kontr.
4. $p \rightarrow \neg \Box \neg p$	3, DN
5. $p \rightarrow \Diamond p$	4, Mod.

4) Ferner beweisen wir, daß $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$	Pr.
2. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$	1, $\Box$
3. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$	1, $\Box$
4. $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	2, 3, Konj.
5. $\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	4, Exp.
6. $\Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	5, Modalverschiebung
7. $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	5, 6, HS
8. $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$	7, Exp.
9. $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$	4, 8, Konj.

Das System T enthält keine Reduktionssätze. Darunter verstehen wir logische Gesetze, mit denen sich Anhäufungen von Modaloperatoren vereinfachen lassen. Deshalb kann es im System T eine unendliche Anzahl distinkter Modalitäten geben.

Wenn es bisher den Anschein machte, im System T sei alles intuitiv erfaßbar, so gibt es auch hier gleichwohl Beispiele, die den Rückgriff auf die polnische Notation empfehlen.

Um eine T-Formel zu schließen und damit die Gültigkeit nachzuweisen, gilt weiterhin das beim Hilfssystem geübte Vorgehen. Die charakteristische Regel, mit der eine gültige T-Formel zu schließen ist, lautet: Ein Buchstabe darf in den Auswertungsspalten einheitlich gestrichen werden. Das soll an zwei Beispielen erläutert werden:

$$\begin{array}{cccc} C & p & M & p \\ & & a & \\ \not{C} & \bar{p} & \not{M} & p \\ & 0 & & 0 \\ & & & \not{1} \\ & \bar{p} & & p \\ & 0 & & 0 \\ & & & \not{1} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc|cc} C & K & p & q & M & K & p & q \\ & & & & a & & & \\ \not{C} & \not{\bar{K}} & \bar{p} & \bar{q} & \not{M} & \not{K} & p & q \\ & & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ & & & & & & \underbrace{a \quad a} & \\ \hline & & & & & & p & \\ & & & & & & 0 & \\ & & \bar{p} & \bar{q} & & & \not{1} & \\ \hline & & 0 & 0 & & & q & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & \not{1} & \end{array}$$

Übung 6.2.2

4) C M p M M p
5) C C p q C L p q
6) C L C p q L C L p q
7) L C L C p q L C L p q

Zum System T gehören weiter die früheren Regeln in strikter Form, also der strikte Modus ponens, der strikte Modus tollens usw.

$((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$	SMP
$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$	SMT
$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$	SDS
$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$	SHS
$((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (q \vee s)$	SKD
$p \Rightarrow (p \vee p)$	SAdd.
$(p \wedge q) \Rightarrow p$	SSimpl.
$(p \wedge q) \Rightarrow q$	SSimpl.
$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$	SKonj.

Übung 6.2.2

Zeigen Sie, daß

8) SMT
9) SHS
10) SKonj.
11) SKD

bereits zum Hilfssystem gehören. Wie steht es mit der Modaldistribution 12)?

12) $\Diamond (p \wedge q) \Rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

Die strikte Äquivalenz

Die strikte Äquivalenz bringt keine neuen Schwierigkeiten mit sich. Sie läßt sich so definieren:

$$p \Leftrightarrow q =_{df} \Box (p \leftrightarrow q)$$

Nun können wir einige Äquivalenzen untersuchen, die auch für die strikte Äquivalenz gelten.

$\Box p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow p)$
(strikte consequentia mirabilis)

$\Box \neg p \Leftrightarrow (p \Rightarrow \neg p)$
(strikte negative consequentia mirabilis)

Die bisher genannten strengen Implikationen sind auch strikte Äquivalenzen:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \Box(p \rightarrow q)$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg\Box(p \wedge \neg q)$$
$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \Diamond(p \wedge \neg q)$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$$
$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \Diamond(\neg p \leftrightarrow q)$$
$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \Diamond(p \leftrightarrow \neg q)$$
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow q)$$
$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Die folgenden beiden Austausche der Modaloperatoren lassen sich als strikte Äquivalenzen schreiben:

$$\Box(p \wedge q) \Leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$$
$$\Diamond(p \vee q) \Leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$$

Fügt man dem System T das Brower-Axiom ($p \rightarrow \Box\Diamond p$) hinzu, dann bekommen wir ein System, das zwischen T und S_5 liegt, jedoch unabhängig von S_4 ist. Das soll nicht weiter ausgeführt werden.

6.2.3 Das System S_4

Das System S_4 läßt iterierte Modalitäten zu. Darunter verstehen wir Folgen mehrerer Modaloperatoren hintereinander, etwa $\Box p \rightarrow \Box\Box p$. Um solche Modalhäufungen zu vereinfachen, braucht es Reduktionsgesetze. Das sind Anweisungen, wie iterierte Modalitäten zu eliminieren sind. Das System S_4 kennt eine solche Regel. Danach ist es erlaubt, eine Kette gleicher Modaloperatoren auf einen einzigen Modaloperator zu reduzieren. LLLLp wird zu Lp.

Von der Systematik aus ist die Herkunft von S_4 leicht zu rechtfertigen. Es genügt, dem System S_1 das Axiom A_9 beizufügen, nämlich:

$$A_9 \quad \Box p \rightarrow \Box\Box p$$

Dieses Axiom ist charakteristisch für S_4. An seiner Stelle hätte gleich der Reduktionssatz $\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$ beigefügt werden können. Doch das Axiom genügt, weil die andere Hälfte der Äquivalenz bereits ein Theorem von T ist. $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ ist nämlich entstanden aus:

1. $\Box p \to p$ NE
2. $\Box\Box p \to \Box p$ 1, $p/\Box p$

Aus theoretischen Sparsamkeitsgründen fügen wir deshalb dem S_4 nur die noch fehlende Implikation als Axiom bei. Das ergibt uns gleichwohl den Reduktionssatz $\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$, womit der doppelte Notwendigkeitsoperator jederzeit auf einen einfachen reduziert werden kann. Die gleiche Überlegung gilt nun aber auch für den Möglichkeitsoperator. A_9 läßt sich mit dem Möglichkeitsoperator so darstellen: $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Da hier gleichermaßen der andere Teil der Implikation bereits zu T gehört, gilt ebenfalls der Reduktionssatz: $\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Diamond p$. Das hat zur Folge, daß sich eine ununterbrochene Folge von „$\Box$" oder „$\Diamond$" auf ein einziges Modalzeichen reduzieren läßt. Das sei an zwei Beispielen gezeigt.

Beispiel 1:
Aus $\Box p \to \Box\Box p$ folgt $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$

1. $\Box p \to \Box\Box p$	Axiom S_4
2. $\Box\neg p \to \Box\Box\neg p$	1, $p/\neg p$
3. $\neg\Diamond p \to \neg\Diamond\Diamond p$	2, Mod.
4. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	3, Kontrap.

Beispiel 2
Aus $\Box p \to p$ folgt $\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$

1. $\Box p \to p$	NE
2. $\Box\Diamond p \to \Diamond p$	1, $p/\Diamond p$
3. $\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$	2, $(p \to q) \to (\Diamond p \to \Diamond q)$
4. $p \to \Diamond p$	EP
5. $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$	4, $p/\Diamond p$
6. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	(vorheriges Beispiel)
7. $\Diamond\Box\Diamond p \to \Diamond p$	3, 6, HS

Die polnische Notation bewährt sich vor komplizierteren Formeln einmal mehr. Um eine Auswertungstafel zu schließen, gilt: Von zwei aufeinanderfolgenden Zahlenkonstanten darf die obere gestrichen werden. Diese Regel darf beliebig oft wiederholt werden, nur die ‚0' ist nie zu streichen.

Beispiele:

$$\begin{array}{cccccccc}
C & M & M & p & M & p & & \\
 & 1 & 2 & & a & & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{M}} & \cancel{\bar{M}} & \bar{p} & \cancel{M} & p & & a = 2 \\
 & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & \cancel{1} & & a & & \\
 & & & 2 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A & L & L & L & L & L & p & M & p & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & a & & & \\
\cancel{A} & \cancel{L} & \cancel{L} & \cancel{L} & \cancel{L} & \cancel{L} & \bar{p} & \cancel{M} & p & & a = 5 \\
 & & & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & & \cancel{1} & & a & & \\
 & & & & & & \cancel{2} & & & & \\
 & & & & & & \cancel{3} & & & & \\
 & & & & & & \cancel{4} & & & & \\
 & & & & & & 5 & & & &
\end{array}$$

Übung 6.2.3

1) C L p L L p
2) C L p L L L L p

T ist in S_4 enthalten, doch gibt es neben den formalen auch philosophische Gründe, die es nahelegen, uns mit einem System wie S_4 zu befassen. Da es nicht mehr ohne weiteres einsichtig ist, ob etwas notwendigerweise notwendig sei, falls es notwendig ist, hat dies zu Kontroversen geführt. Nun können wir sagen, daß derjenige, der diese Behauptung aufrecht hält, innerhalb des S_4 Systems argumentiert und er damit seine Behauptungen auf ein vernünftiges System bezieht. Nun gibt es aber auch die Meinung, die nicht nur eine notwendige Aussage für notwendigerweise notwendig ansieht, sondern diese Notwendigkeit jeder Modalität zuschreibt. Wenn etwas möglich ist, dann soll es auch notwendigerweise möglich sein. Wie weit das berechtigt ist, dazu gibt die Modallogik eindeutig Auskunft. Beides ist nämlich möglich. Wer nur die Notwendigkeit für notwendig hält, operiert mit dem System S_4, wer jede Modalität für notwendig hält, legt das System S_5 zugrunde. Die beiden sind wohlunterschieden, sie dürfen nicht gegeneinander ausgespielt werden. Sie stehen in dem Verhältnis zueinander, daß eine Lehrmeinung in einem schwächeren (S_4) oder in einem stärkeren Sinn (S_5) vertreten werden kann. Sehen wir uns S_5 etwas an.

6.2.4 Das System S_5

Das letzte System, das wir besprechen wollen, ist S_5. Hier lassen sich nicht nur gleiche Modaloperatoren reduzieren, sondern auch vermischte. Deshalb läßt sich beispielsweise eine Formel wie $\Box\Diamond\Diamond\Box\Diamond\Box\Box\Box p$ einfach auf $\Box p$ reduzieren.

Von der Systematik her gesehen gehen wir von S_1 aus, dem einzig das Axiom_{10} beigefügt wird. Das Axiom 10 lautet:

$$A_{10} \quad \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$$

Die für S_5 charakteristische Regel heißt auch starkes Reduktionsprinzip, während die von S_4 als schwaches Reduktionsprinzip gilt.

Der Unterschied zwischen S_4 und S_5 geht aus den andern Matrizendefinitionen hervor.

	S_4 $\Diamond$	S_4 $\Box$	S_5 $\Diamond$	S_5 $\Box$
1	1	1	1	1
2	2	4	1	4
3	1	3	1	4
4	4	4	4	4

S_4

$\Rightarrow$	1	2	3	4
1	1	4	3	4
2	1	1	3	3
3	1	4	1	4
4	1	1	1	1

S_5

$\Rightarrow$	1	2	3	4
1	1	4	4	4
2	1	1	4	4
3	1	4	1	4
4	1	1	1	1

Die Schließungsregel lautet: Alle Eintragungen dürfen gestrichen werden mit Ausnahme der letzten.

Dazu zwei Beispiele:

$$
\begin{array}{llllllll}
C & M & L & p & L & p & & \\
 & 1 & a & & & 2 & & \\
\cancel{C} & \cancel{\bar{M}} & \cancel{\bar{L}} & \bar{p} & L & p & & \\
 & & \cancel{0} & & \cancel{0} & & a = 2 & \\
 & & \cancel{1} & & 2 & & & \\
 & & a & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
C & L & p & M & L & L & M & M & L & p & \\
 & a & & b & 1 & 2 & c & d & 3 & & \\
C & \cancel{\bar{L}} & \bar{p} & \cancel{M} & \cancel{L} & \cancel{L} & \cancel{M} & \cancel{M} & \cancel{L} & p & \\
 & & \cancel{0} & & & & & & & \cancel{0} & a = 3 \\
 & & a & & & & & & & \cancel{b} & \\
 & & & & & & & & & \cancel{1} & \\
 & & & & & & & & & \cancel{2} & \\
 & & & & & & & & & \cancel{c} & \\
 & & & & & & & & & \cancel{d} & \\
 & & & & & & & & & 3 &
\end{array}
$$

Übung 6.2.4

1) Zeigen Sie die Gültigkeit des Grundaxioms von S_5.
2) C M L M L L p L p
3) C K M q M p M L M L K L M q L L M q

6.3 Modale Prädikatenlogik

Wie die Aussagenlogik durch die Prädikatenlogik erweitert wird, so ist auch die Modallogik der Aussagen zu erweitern, wenn daraus eine Modallogik der Prädikate entstehen soll.

Die Stellung des Modalperators gibt der Aussage einen anderen Sinn, je nachdem er vor oder hinter dem Quantor steht. Da sind mit wenigen Prädikaten überraschend viele Kombinationen aufstellbar.

Beispiele:

M ∃ x K F x G x	Es ist möglich, daß der Fluß gefroren ist.
∃ x M K F x G x	Es gibt etwas, das möglicherweise ein Fluß und gefroren ist.
∃ x K F x M G x	Es gibt Flüsse, die möglicherweise gefroren sind.
∃ x K M F x G x	Es gibt etwas, das möglicherweise ein Fluß ist und gefroren ist.
M ∀ x C F x G x	Es ist möglich, daß alle Flüsse gefroren sind.
∀ x M C F x G x	Für alle Dinge ist es möglich, daß, wenn es Flüsse sind, sie gefroren sind.
∀ x C F x M G x	Alle Flüsse sind möglicherweise gefroren.
∀ x C M F x G x	Alles, was möglicherweise ein Fluß ist, ist gefroren.

Diese Übersicht deutet bereits an, wie kompliziert der Einzelfall werden kann. Intuitiv hat man beispielsweise den Eindruck, ∃ x K F x M G x würde ∃ x M K F x G x implizieren. Wir dürfen uns nicht auf die bloße Intuition verlassen, sie könnte uns leicht auf Abwege bringen wie im genannten Beispiel. Denn hier ist die gleiche Vorsicht geboten wie bei der Umstellung von All- und Existenzquantoren in der Prädikatenlogik.

Streichungsregeln

Die wichtigste Ergänzung betrifft die Anordnung der Quantoren und Modaloperatoren. Wir legen fest: Es wird wie gewohnt eine „0“ unter die Prädikate gesetzt. Die Zahlen oder Buchstaben der Quantoren werden neben die Null gestellt oder neben die Zahl oder den Buchstaben, die durch Streichen des Modaloperators entstanden sind. Im Hilfssystem sieht das so aus:

$$\begin{array}{llllllllllll}
C & L & \forall & x & F & x & M & \forall & x & F & x & \\
 & a & b & & & & c & 1 & & & & \\
\cancel{C} & \bar{\cancel{L}} & \bar{\cancel{\forall}} & \bar{x} & \bar{\bar{F}} & \bar{x} & \cancel{M} & \cancel{\forall} & x & F & x & \\
 & & & & 0 & & & & & 0 & & b = 1 \\
 & & & & ab & & & & & c1 & & a = c = 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllllll}
C & \forall & x & L & F & x & \exists & x & M & F & x & \\
 & a & & b & & & c & & d & & & \\
\cancel{C} & \bar{\cancel{\forall}} & \bar{x} & \bar{\cancel{L}} & \bar{F} & \bar{x} & \cancel{\exists} & x & \cancel{M} & F & x & \\
 & & & & 0a & & & & & 0c & & a = c = 1 \\
 & & & & b & & & & & d & & b = d = 2
\end{array}$$

Hingegen ist der folgende Ausdruck kein Theorem:

$$\begin{array}{lllllllllll}
C & \forall & x & L & F & x & M & \exists & x & F & x \\
 & a & & b & & c & d & & & & \\
\cancel{C} & \bar{\cancel{\forall}} & \bar{x} & \bar{\cancel{L}} & \bar{x} & \cancel{M} & \cancel{\exists} & x & F & x & \\
 & & & & 0a & & & & & 0 & \\
 & & & & b & & & & & cd &
\end{array}$$

Kein Theorem, weil a und d nicht in Verbindung zu bringen sind.

$$\begin{array}{lllllllllllllllllllll}
C & L & \forall & x & K & F & x & G & x & K & L & \forall & x & F & x & L & \forall & x & G & x & \\
 & a & b & & & & & & & & 1 & 2 & & & & 1 & 2 & & & & \\
\cancel{C} & \bar{\cancel{L}} & \bar{\cancel{\forall}} & \bar{x} & \bar{\cancel{K}} & \bar{F} & \bar{x} & \bar{G} & \bar{x} & \cancel{K} & \cancel{L} & \cancel{\forall} & x & F & x & \cancel{L} & \cancel{\forall} & x & G & x & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & & 0 & & & & & 0 & & \\
 & & & & & ab & & ab & & & & & & 12 & & & & & 12 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 12 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & 12 & & a = 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & b = 2
\end{array}$$

Eine konjunktive Verzweigung mit All- und Notwendigkeitsoperatoren erlaubt, für beide Zweige dieselben Zahlen zu wählen.

Übung 6.3.

1) C L ∀ x F x M ∃ x F x
2) C K L ∀ x F x L ∀ x G x L ∀ x K F x G x

3) $C\ M\ \exists\ x\ K\ F\ x\ G\ x\ K\ M\ \exists\ x\ G\ x\ M\ \exists\ x\ G\ x$
4) $C\ \bar{\bar{\exists}}\ \bar{x}\ M\ \bar{A}\ \bar{\bar{F}}\ \bar{x}\ G\ x\ \bar{\bar{\exists}}\ \bar{\bar{x}}\ M\ K\ F\ x\ \bar{G}\ \bar{x}$

6.3.1 Die verschiedenen Welten von Leibniz

Leibniz entwickelt in seiner *Théodicée* den Gedanken von den verschiedenen Welten. Damit legt er einen Erklärungsversuch vor, der angesichts des Übels in der Welt gleichwohl von einem guten Gott zu reden erlaubt. Das Problem spitzt sich zu mit der Feststellung, die unglücklichen Menschen hätten das Schlechte durch ihre Bosheit verursacht. Wie würde das Lebensende aussehen, wenn diese Individuen für das Gute eingestanden wären? Diese gedachten Lebensabläufe bilden die verschiedenen Welten.

In der bildhaften Darstellung von Leibniz rollt ein möglicher Lebensablauf jeweils in einem Zimmer ab. Die verschiedenen Zimmer versinnbilden den Gedanken, daß der Mensch aus dem reichhaltigen Lebensangebot ständig Auswahlen treffen muß. Ist der Entscheid gefallen, so bedeutet dies nicht nur die Verwirklichung des einen Angebotes, sondern gleichzeitig Ausschluß aller übrigen. Beispiel: Als Ferienort steht mir die ganze Welt offen. Sobald ich die Fahrkarte für Venedig gebucht habe, sind Alicante, Mallorca oder Sörenberg ausgeschlossen. Mit der Verwirklichung der ausgewählten Möglichkeit verblassen die andern, und im Rückblick gelten sie nur noch als Gedankenspiele. Das zeigt Leibniz an einem treffenden Vergleich: Sextus beklagt sich, er sei unglücklich. Jupiter hört davon und weissagt ihm: „Wenn du von Rom fortgehst, dann wirst du ein anderes Schicksal erfahren.“ Der starrköpfige historische Sextus ließ sich davon nicht beeindrukken, er blieb, und so mußte er gerechterweise die Folgen tragen. In einem Traum wird nun gezeigt, wie sich die Welt für Sextus hätte verändern können. Im ersten Zimmer ist Sextus nach Korinth gegangen, findet einen Schatz, wird reich, beliebt, angesehen, hochbetagt und von der ganzen Stadt verehrt. Im zweiten Gemach ist Sextus nach Thrazien ausgewandert, heiratet die Königstochter und wird als Thronerbe eingesetzt; die Untertanen beten ihn an. In den angrenzenden Zimmern sieht man unendlich viele weitere Bilder des Sextus, der dem Jupiter gehorcht hat.

Das sind die verschiedenen Welten. Sie sind in Pyramidenform aneinandergereiht. An der Spitze ist die wirkliche Welt, das Leben, wie es die Geschichte über Sextus berichtet. Die übrigen Zimmer zeigen, wie es ihm hätte ergehen können, wenn er sich an den Rat von Jupiter gehalten hätte.

Die Leibnizstrategie gibt uns ein Bild, wovon die verschiedenen Modalsysteme handeln und verschafft uns Einsicht darüber, wie diese Systeme von den unterschiedlichen Restriktionen abhängen, die wir an die Zugänglichkeitsrelation stellen. Eine mehr technische Darstellung dieser Beziehungen findet sich im Anhang 2.

6.3.2 Die Vielzahl der Modelle

Die Eigenschaften der Reflexivität, Transitivität und Symmetrie erlauben die Kombination einer Vielzahl von Modellen. In der Modallogik erweist sich ferner die Annahme der Existenz sowie die Quasiäquivalenz als einflußreich, so daß wir über folgende Eigenschaften nachdenken wollen:

Existenz	E
Reflexivität	R
Transitivität	T
Symmetrie	S
Quasiäquivalenz	Q

Quasiäquivalenz: Für alle Elemente a, b und c der Menge M: wenn Hab und Hcb, dann Hac.

Aus der Systematisierung dieser 5 Eigenschaften erhalten wir $2^5 = 32$ Kombinationen. Analog zur theoretischen Errechnung der aristotelischen Syllogismen gibt es hier zwar keine verbotenen Kombinationen, jedoch redundante. Da etwa Q und R zusammen S und T implizieren, werden wir einige Wiederholungen auslassen. Immerhin bleiben noch die folgenden 15 Kombinationen übrig.

	E	R	T	S	Q	
1.	1	1	1	1	1	S_5
2.	1	1	1	0	0	S_4
3.	1	1	0	1	0	Brouwer
4.	1	1	0	0	0	T
5.	1	0	1	0	1	
6.	1	0	1	0	0	
7.	1	0	0	1	0	
8.	1	0	0	0	1	
9.	1	0	0	0	0	Hilfssystem
10.	0	0	1	1	1	
11.	0	0	1	0	1	
12.	0	0	1	0	0	
13.	0	0	0	1	0	
14.	0	0	0	0	1	
15.	0	0	0	0	0	

Bei Berücksichtigung der Irreflexivität, Nonreflexivität, Asymmetrie, Nonsymmetrie usw. würde sich die Anzahl möglicher Systeme noch gewaltig vergrößern.

Die verschiedenen Modalsysteme stimmen nun darin überein, daß sie als Quantifizierung über die Zugänglichkeitsrelation der verschiedenen Welten laufen. Sie unterscheiden sich in den unterschiedlichen Einschränkungen, die als exakt definierbare Forderungen an die Zugänglichkeit gestellt werden. Genauer ausgedrückt: Ein Modalsystem ist interpretierbar als ein geordnetes Tripel $\langle 0, W, Z \rangle$, bei dem W die Objektmenge aller Welten ist, 0 ein Element dieser Menge und Z die Relation, die für die Elemente von W definiert ist. Wie die Tabelle zeigt, haben wir nur Modelle mit Existenzannahmen besprochen. Daneben setzen die Systeme folgende Eigenschaften voraus:

T	reflexiv
S_4	reflexiv, transitiv
S_5	reflexiv, transitiv, symmetrisch
Brouwer	reflexiv, symmetrisch

Was die einzelnen Eigenschaften bewirken, ist nun leicht zu erfassen. Wird die Existenzannahme anerkannt, so heißt das, bei der

Formel C L p M p dürften die Buchstaben durch Konstanten ersetzt werden. Anderfalls ist die Formel nicht schließbar. Reflexivität stellt die Beziehung zwischen Modalität und Wahrheit her, etwa bei CLpp. Transitivität führt zur ersten Reduktion der Modalitäten. Während von der Reflexion her offen bleibt ob die Alternative Hac gilt, wenn Hab und Hbc vorliegen, wird diese Beziehung durch die Transitivität entschieden. Und schließlich sorgt die Symmetrie dafür, daß aus der Alternative des Ersten zum Zweiten auch die Alternative des Zweiten zum Ersten zum Zug kommt.

Um nochmals zu Leibniz zurückzukehren, könnten wir jetzt besser verstehen, was es für Sextus bedeutet, die Welt in Korinth sei für ihn vorstellbar. Angenommen, er werde gefragt, ob eine Aussage ‚p' möglicherweise wahr sei, etwa „Im Winter sinkt die Temperatur bis 30 Grad unter Null". Er wird sie so verstehen, daß er sich als Antwort überlegt, ob dies in Rom, Korinth, Thrazien oder an einem anderen ihm bekannten Ort zutrifft. Wenn er nichts von Hochalpen oder vom Nordpol weiß, dann wird er die Frage verneinen. Die Frage, ob im Sommer die Temperatur notwendigerweise über 20 Grad steigt, wird er nur dann bejahen, wenn an allen Orten, die er kennt, diese Wärme tatsächlich vorkommt.

Falls Transitivität vorliegt, braucht es deswegen nicht Symmetrie zu geben. Ich kann mir eine Welt ohne Farben vorstellen. Würde es bei uns aber keine Farben geben, so könnte sich niemand eine Welt mit Farben vorstellen. Falls das Wort „Farbe" im Sprachvorrat vorhanden wäre, so würde es doch nur die Intensität, den Kontrast oder sonst eine Schattierung zwischen schwarz und weiß bedeuten. Die fehlende Symmetrie zeigt an, daß in diesem Fall nur S_4 sagt, was gültig ist.

Der Gedanke an eine Vielfalt möglicher Systeme sollte uns vertraut sein, wenn wir uns an die Barcan-Formel heranwagen.

6.3.3 Die Barcan-Formel

Im Jahre 1946 hat Ruth Barcan eine Formel vorgelegt, die eine große Diskussion ausgelöst hat und einige bisher übersehene Zusammenhänge in ein neues Licht gestellt hat. Die Barcan-Formel lautet:

$$\Diamond (\exists x) Px \rightarrow (\exists x) \Diamond Px$$

Den Unwillen vieler Logiker hat diese Formel hervorgerufen, weil ihre Interpretation der Intuition langjähriger Gepflogenheiten widerspricht. Die Grundlage dazu hat Abelard im Mittelalter ausführlich besprochen in den Modalitäten de dicto und de re, die ihrerseits auf Aristoteles zurückgehen.

In den *Sophistischen Widerlegungen* stellt Aristoteles die Frage, ob ein Mensch gehen kann, wenn er sitzt und schreiben, wenn er nicht schreibt. Sein Lösungsvorschlag lautet, wir hätten zu unterscheiden zwischen sensu composito (= de dicto) und sensu diviso (= de re).

Die Modalität de dicto bezieht die Modalität auf die ganze Aussage. „Es ist möglich, daß ein Mensch sitzt" $\Diamond (\exists x) (Mx \wedge Sx)$. Dagegen beschränkt sich die Modalität de re auf das Prädikat: „Es gibt einen Menschen, der möglicherweise sitzt" $(\exists x) (Mx \wedge \Diamond Sx)$. Die beiden Modalitäten werden als aufeinander rückführbar betrachtet und zwar so: Wenn es einen Menschen gibt, der möglicherweise sitzt, dann ist es möglich, daß ein Mensch sitzt. Mit andern Worten: de re Möglichkeit impliziert de dicto Möglichkeit, aber nicht umgekehrt. Eine gesunde Logik sollte genau das zeigen, nämlich daß

(1) $C \exists x M P x M \exists x P x$ gültig
(2) $C M \exists x P x \exists x M P x$ ungültig

ist. Nun ist aber (2) die berüchtigte Barcan-Formel und die Behauptung lautet nun, die beiden seien gleichermaßen beweisbar.

(3) $(\forall x) \Box (Px \rightarrow Qx) \rightarrow \Box ((\forall x) Px \rightarrow (\forall x) Qx)$

Die Formel (3) ist falsch. Es scheint zwar, sie hätte Ähnlichkeit mit

(4) $\Box (p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

Indessen steht bei (3) „$\Box$" nach dem Allquantor, im Nachsatz vor den Quantoren.

(5) $\Box(\forall x)(Px \rightarrow Qx) \rightarrow \Box((\forall x)Px \rightarrow (\forall x)Qx)$

ist leichter beweisbar. Es ist ein Spezialfall der BF (Barcan-Formel)

BF $(\forall x)\Box Px \rightarrow \Box(\forall x)Px$

Aus BF folgt $\Diamond(\exists x)Px \Rightarrow (\exists x)\Diamond Px$

Die BF ist eine These aus dem Brouwer-System, das aus dem Prädikatenkalkül zusammen mit dem Axiom $p \rightarrow \Box\Diamond p$ besteht.

6.4 Epistemische, deontische und zeitliche Modalitäten

Die Unterscheidung zwischen notwendig und nicht notwendig bezieht sich bei Aristoteles auf Substanz und Akzidens, sie leitet sich direkt von der Metaphysik her. Abstrahiert man von der aristotelischen Metaphysik, dann ist es sinnvoll, neben den alethischen – die auch ontische Modalitäten genannt werden – andere Modalitäten zu beachten. Die wichtigsten sind:

- die epistemischen Modalitäten
  - ich weiß, daß p
  - ich glaube, daß p
- die deontischen Modalitäten
  - es ist vorgeschrieben, daß p
  - es ist erlaubt, daß p
- die zeitlichen Modalitäten
  - es ist immer der Fall, daß p
  - es trifft manchmal zu, daß p
- die evaluativen Modalitäten
  - es ist gut, daß p
  - es ist schlecht, daß p

Wenn die Modallogik in dieser Breite einsetzbar wäre, so dürfte man darin die definitive Beherrschung der Modalitäten sehen. Leider sind wir mit einer unübersehbaren Zahl von Abweichungen konfrontiert, die das erhoffte Ziel hinausschieben. Wie widerspenstig die intuitive Vorstellung der einen Modalität sich zu einer andern verhält, das mögen fünf konkrete Beispiele zeigen.

A-1 C L p M p

Was man weiß, das glaubt man gleichzeitig; was obligatorisch ist, das ist erlaubt, und was immer der Fall ist, das trifft auch auf einzelne Momente zu. Insofern scheint A-1 epistemisch, deontisch und zeitlich plausibel zu sein. Es wäre eine unerhörte Stütze, wenn es uns gelänge, die generelle Übertragbarkeit der alethischen Modalitäten nachzuweisen.

A-2 C L p p

Dieses einfachste Axiom aus S_1 erweist sich nur zeitlich als annehmbar. Es widerstrebt der deontischen Interpretation. Der Satz „Menschenrechte sind nach der UNO-Charta vorgeschrieben, also werden sie eingehalten“ ist ein bedauerliches Gegenbeispiel. Auch epistemisch läßt es sich nicht aufrecht erhalten, denn „ich wußte, daß die Jägerhütte mit Rundhölzern verkleidet ist, doch der Augenschein hat mir einfache Holzladen gezeigt“. Ich kann etwas wissen, was sich nachher als falsch erweist. Die erhoffte Parallele zwischen „möglich“ und „glauben“ bestätigt sich nicht; eine wahre Aussage muß immerhin möglich sein, aber eine wahre Aussage braucht nicht unbedingt von jemandem geglaubt zu werden.

A-3 A M p M p

A-3 gilt für epistemische Modalitäten nicht mehr. „Ich glaube daß der Dollar sinkt, oder ich glaube, daß der Dollar nicht sinkt“ ist nicht erschöpfend; als Laie in Währungsfragen habe ich möglicherweise überhaupt keine Meinung, was gemäß epistemischer Deutung von A-3 nicht vorgesehen ist. Die Äquivalenz zwischen A-2 und A-3 beruht auf der Voraussetzung, daß die Modaloperatoren gegenseitig definierbar sind. Das trifft auf der epistemischen Ebene nicht mehr zu.

A-4 C M p L C p q

Dieses Theorem ist berüchtigt im deontischen Bereich. Es besagt, daß eine Handlung, die moralisch verboten ist und gleichwohl ausgeführt wird, die Verpflichtung in sich trägt, alles zu tun, was man will.

A-5 C p M p

A-5 ist moralisch unannehmbar, weil darin eingeschlossen ist, was es in der Wirklichkeit gebe, das sei erlaubt.

6.5 Das beste System der Modallogik?

Bei der Interpretation der Kalküle hat sich bisher die Hoffnung nicht erfüllt, eine intensivere Beschäftigung mit den Modalitäten würde gleichsam unausweichlich zu einem bestimmten System führen, in dem sich epistemische, deontische und zeitliche Zusammenhänge in einheitliche Strukturbeziehungen zusammenfassen ließen. Formal sind denn auch verschiedene Systeme konstruierbar, je nach der Festlegung der Eigenschaften für die Z-Relation. Bis in die neueste Zeit haben viele Autoren gemeint, es würde letztlich ein geistreiches Formelspiel betrieben, aus dem jeder ein ihm passendes Modalsystem auswählen könne. Einen Ausweg aus dieser unbefriedigenden Situation haben uns die Anstrengungen der semantischen Interpretationen gebracht. Eine derartige Interpretation besteht im Versuch, formale Wahrheitsbedingungen anzugeben unter gleichzeitigem Einbezug von Aspekten der Wirklichkeit, wobei es nahe lag, auf die Welten von Leibniz zurückgreifen.

Durch die semantischen Interpretationen wird die Wahl unseres Systems nicht mehr von der Intuition abhängig, welche Formeln wir als der Wirklichkeit angepaßt ansehen sollen, von wo aus wir uns bestimmen lassen. Wir können uns jetzt fragen, welches Modell im Rahmen einer konkreten Problemstellung unserem Begriff für modale Deduktion am besten entspricht. Bei dieser Entscheidung geht es durchaus nicht willkürlich zu. Wir haben uns darauf zu besinnen, auf welche Art wir bisher bei modalrelevanten Argumentationen vorgegangen sind. Ähnlich wie sich aus der Beurteilung der Goldbachschen Vermutung die Vorliebe für intuitionistische oder klassische Mathematik entnehmen läßt, so lassen sich aus geeigneten Beispielen ablesen, welchem Modalsystem ein Denker den Vorzug gibt.

Nehmen wir etwa an, wir hätten es mit metaphysischer Notwendigkeit und Möglichkeit zu tun. Auf dem Hintergrund von Leibniz können wir fragen: Sind wir der Ansicht, daß das metaphysisch Notwendige sich von Welt zu Welt verändert? Wenn wir diese Frage bejahen, dann haben wir dem T, Brower-System oder S_4 zugestimmt. Denn in all diesen Systemen ändert sich der Notwendigkeitsbegriff, wenn wir von einer Welt in die andere übergehen. Wenn wir aber diese Situationsveränderung hinsichtlich metaphysischer Modalitäten ablehnen, d.h. also, wenn wir metaphysisch Notwendiges als unveränderlich von einer Welt zur andern ansehen, dann haben wir uns für S_5 entschlossen. S_5 ist das einzige System, das mit der Äquivalenzrelation eine entsprechende Zugänglichkeitsrelation definiert. Das ist der Grund, warum sich die meisten Philosophen für S_5 entschieden haben.

Anhang 1

Wahrheitsmatrizen der Modallogik

Da wir schon bei einstelligen Funktoren 4 Zeilen bekommen, würde die Darstellung der zweistelligen auf 16 Zeilen anschwellen.

p	q	$\Rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
1	1	2	1	1	1	1	2
1	2	4	2	1	2	2	4
1	3	4	3	1	3	3	4
1	4	4	4	1	4	4	4
2	1	2	2	1	1	2	4
2	2	2	2	2	1	1	2
2	3	4	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	3	4	4
2	4	4	4	2	3	3	4
3	1	2	3	1	1	3	4
3	2	4	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	2	4	4
3	3	2	3	3	1	1	2
3	4	4	4	3	2	2	4
4	1	2	4	1	1	4	4
4	2	2	4	2	1	3	4
4	3	2	4	3	1	2	4
4	4	2	4	4	1	1	2

Die untereinander geschriebenen 16 Zeilen lassen sich vermeiden durch Kompaktdarstellung, ein Verfahren, das wir schon bei der zweiwertigen Logik hätten verwenden können. Die Funktoren der zweiwertigen Logik lassen sich vergleichsweise so darstellen:

$\wedge$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Für unsere 4wertige Logik ergäbe dies:

$\wedge$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	4	4
3	3	4	3	4
4	4	4	4	4

$\vee$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	3
4	1	2	3	4

$\rightarrow$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	1	3	3
3	1	2	1	2
4	1	1	1	1

$\leftrightarrow$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

$\Rightarrow$	1	2	3	4
1	2	4	4	4
2	2	2	4	4
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

$\Leftrightarrow$	1	2	3	4
1	2	4	4	4
2	4	2	4	4
3	4	4	2	4
4	4	4	4	2

Aus dem Rahmen fallen nur die beiden Definitionen 2, 3 für $\wedge$ und $\vee$. Im einen Fall sind sie logisch falsch, im andern logisch wahr. Aber dieses Ärgernis ist nicht zu umgehen. Gewiß ließe sich auch erwägen, ob nicht die $p \Rightarrow q$ Beziehung abzuändern sei. Freilich hätte dieser Eingriff zur Folge, daß

$$p \Rightarrow (p \wedge q)$$
$$(p \wedge q) \Rightarrow p$$

nicht mehr logische Wahrheiten wären. Soweit wollen wir nicht gehen. Es bleibt indessen zu beachten, daß die 2, 3 Inkonsequenz nicht zerstörend ist. Wir haben nicht „wahr", wo „falsch" sein sollte oder umgekehrt. Wir haben bloß in zwei Fällen strengere Werte als sie gerechtfertigt empfunden werden.

Wir können nicht eine befriedigende Modallogik aufstellen, solange nicht unendlich viele Werte angenommen werden. Aber welche Deutung ließe sich dann bei unendlich vielen Werten geben? Man könnte auf die Vorstellung von Leibniz zurückgreifen mit den verschiedenen Welten. Für 4 Werte ließe sie etwa folgende Deutung zu:

1 wahr in unserer und in der anderen Welt
2 wahr in unserer und falsch in der andern Welt
3 falsch in unserer und wahr in der andern Welt
4 falsch in beiden Welten

Obwohl wir in der Modallogik gegen unendlich viele Werte gedrängt werden, so gibt es doch etliche Aspekte, die nicht von einer unendlichen Anzahl von Werten abhängen. Für zahlreiche Beziehungen sind die 4-Wertetafeln ein ausreichendes Instrumentarium. Das wollen wir uns verdeutlichen an den Quasi-Tafeln, die bei iterierten Modalitäten ihre Nützlichkeit erweisen.

$\Box\Box p$	$\Diamond\Diamond p$	$\Box\Box\neg p$	$\Diamond\Diamond\neg p$	$\Diamond\Box p$	$\Box\Diamond p$
4	1	4	1	1	2
4	1	4	1	3	2
4	1	4	1	3	2
4	1	4	1	3	4

Die Verdoppelung von $\Diamond$ ergibt eine logische Wahrheit, die Verdoppelung von $\Box$ das Gegenteil. Gemischte Operatoren zeigen einige Sonderheiten

$\Box\Diamond p \Rightarrow \Box p$	$\Diamond\Box p \Rightarrow \Box p$	$\Diamond\Box p \Rightarrow \Diamond p$
2	4	2
2	4	2
2	4	2
2	4	2

Zusammenfassung:

1. Jede Aussage ist möglicherweise möglich.
2. Keine ist notwendigerweise notwendig.
3. Wenn eine Aussage möglicherweise notwendig ist, dann folgt nicht, daß sie notwendig ist.
4. Wenn sie möglicherweise notwendig ist, dann ist sie möglich.

Anhang 2

Semantische Deutung der Modallogik

1. Semantische Deutung

Was wir intuitiv über die verschiedenen Welten zu sagen wissen, steht in einer Beziehung zu unserer wirklichen Welt. Diese Beziehung wird an Modellen beschrieben. Eine Semantik für die Modalkalküle geben heißt deshalb, entsprechende Modelle aufbauen. Wir bekommen so ein T-Modell, ein S_4-Modell usw.

Diese Modelle stimmen darin überein, daß sie aus einem geordneten Tripel bestehen, aus $\langle 0, W, Z \rangle$. Dabei gilt:

0 = unsere Welt
$W = \{0, W_1, W_2, W_3 \ldots\}$
Z: Relation zwischen 0 und einer Welt W

W ist die Menge aller Welten und Z eine Relation zwischen unserer Welt 0 und einer Welt W. Die Beziehung Z kann als Zugänglichkeitsrelation gedeutet werden. Unter zugänglich versteht man nicht bloß Sichtbares oder Greifbares; der Begriff ist weit zu fassen und umschließt alles, was irgendwie denkbar ist.

Diese Relation Z steht nun im Zentrum der Untersuchung. Das ist leicht erklärbar, weil nämlich die verschiedenen Modalsysteme die Folge der verschiedenen Eigenschaften von Z sind. Ich möchte diesen wichtigen Sachverhalt zweifach darstellen, zuerst etwas allgemein am T-System und dann etwas exakter für alle Systeme.

1.1 Einführende Darstellung der Z-Relation

Für das T-System ist erforderlich, daß die Relation Z reflexiv ist. Das bedeutet bei unserer Leibnizinterpretation, daß jede Welt sich selber zugänglich ist. Wenn wir *zugänglich* hier als visuelles Sehen auffassen, müßten alle Bewohner einer Welt sehen können, daß sie Bewohner dieser Welt sind.

Das Modell läßt sich deuten als eine binäre Funktion zwischen

Atomsätzen aus T und den möglichen Welten hinsichtlich der Wahrheitswerte. Das bedeutet, daß jede Atomformel von T in jeder Welt wahr oder falsch ist. Dann genügen folgende vier Bedingungen:

1. ‚$\neg$ p' ist wahr in W genau dann, wenn ‚p' in W falsch ist
2. ‚p $\vee$ q' ist wahr in W genau dann, wenn ‚p' in W oder ‚q' in W wahr ist
3. ‚$\Diamond$ p' ist wahr in W genau dann, wenn es wenigstens eine mögliche Welt W_1 gibt, in der ‚p' wahr ist und W_1 ist für 0 zugänglich.
4. ‚$\Box$ p' ist wahr in W genau dann, wenn für alle W, die 0 zugänglich sind, ‚p' in diesen W wahr ist.

Die Regeln 1. und 2. legen den Aussagenkalkül fest; echte Modalregeln sind nur 3. und 4.

Mit diesen Regeln, zusammen mit der Relation Z, die reflexiv ist, lassen sich alle Formeln entscheiden, ob sie T-gültig sind. Daß z.B. das Notwendigkeitsaxiom T-gültig ist, läßt sich so zeigen:

‚$\Box$ p $\rightarrow$ p' soll in allen Welten W gültig sein. In einer beliebigen Welt – etwa W_7 – wird die Formel nur in einem einzigen Fall falsch sein, nämlich wenn der Vordersatz ‚$\Box$ p' wahr und der Nachsatz ‚p' falsch ist. Nun ist aber ‚$\Box$ p' dann wahr, wenn die 4. Regel erfüllt ist, d.h. ‚p' ist wahr für alle Welten, die 0 zugänglich sind, folglich auch für W_7.

1.2 Verallgemeinerung der Z-Relation

Wir haben unsere Welt mit ‚0' bezeichnet. Alle anderen Welten lassen sich als Alternativwelten deuten. Von da aus können wir genauer darstellen, wie die zweistellige Funktion wirkt. Die Sprache des Formalsystems ist die Objektsprache, das semantische Modell ist in der Metasprache beschrieben. Als Namen von Modellmengen in der Metasprache wollen wir ‚a', ‚b', ‚c' benutzen. Ein bestimmtes, festgelegtes Modell ist die wirkliche Welt ‚0'. Wenn ‚p' oder ‚q' Formeln des Systems sind, dann sind [p] und [q] Sätze des Modells. Auf diese Weise lassen sich die Beziehungen zwischen Formalsystem und dem Modell einfacher beschreiben. Denn jetzt können wir exakt sagen: p ist genau dann wahr, wenn [p] ∈ 0 ist. Folglich läßt sich beispielsweise nachweisen, daß C p A p q ein Modell der Welt ‚0' ist.

In einem Modellsystem stehen die Modellmengen alternativ zueinander. Die Modellmenge a sei H-alternativ (Hintikka-alternativ) zur Modellmenge b. Dann läßt sich der Möglichkeitsoperator so definieren: [◇ p] ∈ b, wenn es im Modellsystem wenigstens eine Modellmenge b gibt, sodaß Hab und [p] ∈ a.

Die Interpretation I auf ein Modellsystem M ist eine Funktion der Wahrheit zwischen Formal- und Modellsystem. Auf dieser Grundlage bekommen unsere Matrix-Zahlen einen Sinn:

0	unsere Welt
1	Alternativwelt zu 0
2	Alternativwelt zu 1
3	usw.

Wir schreiben das so: H[2] [1] und H[1] [0]. Der Gedanke der Alternativwelten erlaubt auf einsichtige Weise über die Eigenschaften der Z-Relation zu reden.

Reflexivität

Die Reflexivität im System T besagt nun, daß jedes Modell zu sich selber alternativ ist. Dies wiederum ist eine Rechtfertigung für die Streichungsregel; denn C p M p ergibt nach der Streichung:

$$\begin{array}{cc} \bar{p} & p \\ 0 & 0 \\ & a \end{array}$$

Entweder ist nun [$\bar{p}$] ∈ 0 oder [p] ∈ a, wobei H[a] [0]. Da die Reflexivität gilt, ist 0 auch H-alternativ zu sich selber, so daß wir schreiben dürfen:

$$\begin{array}{cc} \bar{p} & p \\ 0 & 0 \\ 0 & a \end{array}$$

Wir dürfen a durch 0 ersetzen oder besser weglassen, d.h. streichen.

Transitivität

Sofern wir den Blick auf die Reflexivität der Relation Z richten, erhalten wir das System T. Das System T führt zu S_4, sobald die Bedingung der Transitivität hinzugefügt wird: Für alle Modellmengen a, b, c in M gilt, wenn Hab und Hbc, dann auch Hac.

Also

p
0
a
b
c

Da nun H[a] [0] und H[b] [a], so ist aufgrund der Transitivität H[c] [b]. Die Formel ist genau dann wahr, wenn [p] ∈ c. Wenn jedoch H[c] [b], dann auch H[c] [a]. Die Streichung von ‚b' bewahrt den Wahrheitswert der ursprünglichen Formel. Deshalb gilt:

$\not{C}\ \overline{M\ M\ p}\ M\ p$	$\bar{p}$	p
	0	0
	1	a
	2	

Hier darf ‚1' gestrichen werden, weil entweder [$\bar{p}$] ∈ 2 und H[2] [1] sowie H[1] [0] oder [p] ∈ a, wobei [a] eine Alternative zu ‚0' ist. [2] ist eine alternative Menge zu ‚0' genau wie ‚a', so daß ‚a' durch ‚2' ersetzt werden darf.

Symmetrie

Für alle Modellmengen a und b in M gilt: Wenn Hab, dann auch Hba. Wenn nun H[0] [1] und H[1] [0] wie auch H[0] [a] und H[a] [0], aber auch H[a] [2] und H[2] [a], dann stehen alle Zwischenglieder symmetrisch alternativ zueinander und dürfen gestrichen werden. Wir haben das System S_5 vor uns mit seinen bekannten Streichregeln.