5. Die Relationen

Im Jahre 1936 hat Church bewiesen, daß der zweistellige Prädikatenkalkül kein allgemeines Entscheidungsverfahren kennt. Unter einem Entscheidungsverfahren verstehen wir ein eindeutiges Vorgehen, das aufgrund einer endlichen Anzahl von Schritten die Allgemeingültigkeit feststellen läßt. Ein solches Entscheidungsverfahren ist für den Aussagenkalkül mit der Matrizenmethode oder der Distribution gegeben. Wir werden noch eine Sonderform semantischer Tafeln einführen, die ein Entscheidungsverfahren für den einstelligen Prädikatenkalkül liefert. Bei den Relationen ist der Nachweis für die Nicht-Allgemeingültigkeit nicht zu erbringen, und deshalb ist es berechtigt, von den Relationen gesondert zu reden. Abgesehen von diesem wichtigen theoretischen Gesichtspunkt ist die Relationslogik eine natürliche Ausweitung des Prädikatenkalküls.

Wir haben öfters angedeutet, daß nicht alle zusammengesetzten Ausdrücke als Verknüpfung von Aussagefunktionen darstellbar sind. Erinnern wir uns an die Art der Beispiele wie

(1) Othmar und Josef sind Musiker
(2) Othmar und Josef sind Brüder

Die Aussage (1) läßt sich als Konjunktion zweier Aussagen deuten und kann in dieser Form vom Aussagenkalkül behandelt werden. Hingegen läßt die Aussage (2) eine solche Interpretation nicht zu. Überdies scheint es nicht ganz einfach, anzugeben, worin sich (2) von (1) abhebt, da die beiden Sätze scheinbar gleich gebaut sind. Aber diesen Unterschied müssen wir herausstellen.

5.1 Ontologische Voraussetzungen

In einer durch Konjunktion verbundenen Aussagenverknüpfung wird zwei Subjekten dasselbe Prädikat zugesprochen. Seit der Renaissance bis in die neueste Zeit hinein war die Verallgemeinerung verbreitet, ein Urteil lasse sich nur in Subjekt-Prädikatform ausdrücken. Man konnte sich für diese Auffassung neben der vermeintlich klaren Einsicht auf bedeutende Philosophen stützen, selbst auf Kant, der vom Urteil sagt, es sei jener Verstandesakt, worin zwei Begriffe miteinander verbunden werden. Gemäß dieser Auffassung besteht also ein Urteilsakt grundsätzlich darin, daß einem Subjekt ein Prädikat zu- oder abgesprochen wird. Um die Allgemeingültigkeit dieses Schemas zu demonstrieren, sind jene Aussagen, die sich nicht einordnen lassen wollten, gewaltsam umgeformt worden. Aus „Sokrates läuft" und „es regnet" wurden „Sokrates ist laufend" und „Regen ist daseiend" (Vgl. J. Gredt, Die aristotelisch-thomistische Philosophie, Bd. 1, Logik und Naturphilosophie (Freiburg 1935) 39). Das ist die Folge einer bestimmten philosophischen Anschauung, nämlich der aristotelischen Metaphysik.

Alle Probleme lassen sich metaphysisch analysieren. Wenn wir es jedoch für den Aussagen- und Prädikatenkalkül unterlassen haben auf die metaphysische Grundlage einzugehen, so scheint auch jetzt kein Grund vorzuliegen, anders zu handeln. Wir kommen zunächst ohne metaphysische Analyse weiter. Was uns zu diesem Weg ermutigt, das ist der Mißerfolg von Aristoteles. Bei all seiner Einsicht gelang ihm eine logische Analyse der Relationen nicht, so daß er schließlich glaubte, für die Relationen eine andere metaphysische Basis postulieren zu müssen als für die Syllogismen. Das hat zu höchst verworrenen und seltsamen Auffassungen geführt. Inzwischen geben traditionelle Kreise wenigstens für die Theologie zu, die Erfahrung sprenge die antike Aufteilung der Wirklichkeit in die Substanz als das Eigentliche und die Akzidentien als das bloß Zufällige (Vgl. J. Ratzinger, Einführung in das Christentum (München 1968) 143).

Nach Aristoteles besteht die ganze Wirklichkeit aus Substanzen mit ihren Akzidentien. Innerhalb der Sprache werden die Substanzen durch Subjekte ausgedrückt, die Akzidentien durch Prädikate. „Der Tisch ist weiß" besteht aus dem Subjekt Tisch; das Subjekt ist eine Substanz, von der das Prädikat „weiß" ausgesagt wird. Das Prädikat ist ein Akzidens des Tisches, das ebenso gut rot oder blau sein könnte, ohne den Tisch wesentlich zu verändern. Von einer Substanz werden also Akzidentien ausgesagt. Bei der Frage, ob die Relation eine Substanz oder ein Akzidens sei, entschließt sich Aristoteles, wenn auch mit schwerem Herzen, für das Akzidens. Freilich unterläßt er es nicht, die besondere Art hervorzuheben. Die Relation nimmt eine Sonderstellung ein, ihr Sein ist besonders schwach. Was dieses „schwache Sein" jedoch heißen soll, das ist bei weitem nicht klar. Aber nachdem die mittelalterliche Theologie auf dieser Grundlage die Relationen im Zusammenhang mit dem Trinitätsdogma weiter verfolgte, da begann sich allmählich der Eindruck zu verfestigen, es handle sich um ein theologisches Spezialproblem. Historisch gesehen sind die Relationen erst von Leibniz etwas ausführlicher untersucht worden. Unglücklicherweise sind seine Arbeiten fast bis in unser Jahrhundert weitgehend unbeachtet geblieben, so daß man De Morgan als den eigentlichen Begründer der Relationslogik anzusehen hat. Ein weiterer Förderer war Peirce und vor allem Schröder (1841–1902), der den dritten Band (1895) ausschließlich den Relationen widmet. Demgegenüber hält Maritain noch 1946 die Relationen für das Ergebnis einer Konfusion in der Analyse zwischen logischem und wirklichem Subjekt, worauf namentlich Leibniz und Russell hereingefallen seien.

5.2 Die heutige Auffassung der Relationen

Wir stehen wieder vor ähnlichen Grenzen, wie sie uns beim Übergang vom Aussagenkalkül zum Prädikatenkalkül bewußt wurden. Es gibt Aussagen, deren Struktur sich innerhalb eines bestimmten Systems nicht hinreichend klar ausdrücken lassen. Dazu drei Beispiele:

(1) Heidi spielt Klavier und Josef singt
(2) Heidi spielt Klavier und singt
(3) Köln liegt zwischen Basel und Hamburg

Das Beispiel (1) ist im Aussagenkalkül problemlos formulierbar; ‚$H \wedge J$'. Die Art des Beispiels (2) gab Anlaß, den Prädikatenkalkül einzuführen ‚$Kh \wedge Sh$'. Beispiel (3) stellt eine einfache Relation dar. Wir könnten versuchen, das Beispiel nach dem Rat der traditionellen Philosophie so umzuformen: „Köln ist zwischen Basel und Hamburg liegend". Offensichtlich wäre „zwischen" ein Funktor, der sich nicht auf einen der bisher besprochenen Funktoren zurückführen ließe. Wir hätten also:

(3′) (Köln ist) zwischen (Basel und Hamburg liegend)
(3′) K zwischen B

Bei der ausgefallenen Formulierung von (3′) wollen wir uns nicht aufhalten. Das Ungewohnte ist kein ausreichendes Kriterium, um etwas abzulehnen. Hingegen ist „Basel und Hamburg" als einzelnes Prädikat aufgefaßt zu undifferenziert. Zudem drückt nach traditioneller Auffassung das Prädikat eine mögliche Eigenschaft des Attributes aus. Hier wirkt es indessen reichlich befremdend, „Basel und Hamburg" als Eigenschaft von Köln anzusehen. Aus dieser Sackgasse vermochte sich die traditionelle Analyse nicht zu befreien.

Gehen wir von den zwei Beispielen aus:

(4) Franz und Othmar sind musikalisch
(5) Franz und Othmar sind verwandt

Die wesentlich neue Einsicht besteht darin, daß in (4) zwar den beiden Individuen die gleiche Eigenschaft zugesprochen wird; bei (5) ist aber nicht von einer Eigenschaft die Rede, sondern von einem Verhältnis, in dem die beiden Individuen zueinander stehen. Das dürfte in uns die Vermutung aufkommen lassen, daß es beim Urteilen nicht immer darum geht, den Subjekten Prädikate zu- oder abzusprechen; nicht selten steht die Frage im Vordergrund, in welcher Beziehung Dinge zueinander stehen. Diese Sicht ist es, die die Beispiele (4) und (5) voneinander unterscheidet. Die systematische Untersuchung solcher Beziehungen macht den Inhalt der Relationslogik aus. Wir halten also fest, daß Relationen nicht Eigenschaften von Individuen aussagen, sondern die Beziehungen unter den Individuen angeben.

Im Alltag wie in der Wissenschaft sind solche Beziehungen mindestens so bedeutsam, wie das Zu- oder Absprechen von Eigenschaften. Ein Gegenstand kann über, unter, neben einem andern liegen; ein Mensch kann in freundschaftlichen, verwandtschaftlichen, beruflichen Beziehungen zu einem andern stehen; ein Gegenstand kann einer Person gehören, eine Person kann Verfügungsrechte über gewisse Gegenstände haben usw. usw. Keine Wissenschaft kommt ohne solche Beziehungen aus, erst recht nicht Philosophie oder Theologie. Das wurde bis vor hundert Jahren übersehen, was den Entdecker der Relationslogik zum überraschenden Urteil über die Vergangenheit veranlaßte: Die traditionelle Logik – d.h. das, was man in Frankreich oder Deutschland seit der Mitte des 16. Jahrhunderts für Logik hält –, so stellt De Morgan verblüffend fest, reicht nicht aus, den elementaren, einsichtigen Sachverhalt zu beweisen: „Wenn alle Pferde Tiere sind, dann sind auch alle Pferdeköpfe Tierköpfe". Tatsächlich läßt sich dieser harmlose Schluß nicht auf die einstellige Prädikatenlogik zurückführen. Deshalb sind derartige Beispiele in den gängigen Schulbüchern kurzerhand verschwiegen worden.

Die Überlegenheit der heutigen Relationsauffassung ist dreifach:

- Wir umgehen Sprachverdrehungen. „Basel und Hamburg" ist kein Prädikat, auch nicht ein komplexes.
- Die logische Untersuchung der Relationen ist durchführbar unter den gleichen metaphysischen Voraussetzungen, die für die Aussagen- und Prädikatenlogik gemacht wurden.
- Beispiele von der Art „Tier-Tierkopf" lassen sich zufriedenstellend analysieren.

5.3 Die Symbolisierung der Relationen

Zweifellos stellt schon die einfache Prädikataussage eine Relation dar, also die Beziehung zwischen einem Ding und einer Eigenschaft. Doch wir behalten uns den Namen „Relation" für eine Beziehung vor, die mindestens zwischen zwei Dingen besteht.

5.3.1 Symbolisierung von Konstanten

Zur Symbolisierung verwenden wir eine Schreibweise, die auf der Prädikatenlogik aufgebaut ist. Im Schriftbild unterscheiden sich

Relationen bestenfalls durch die Besetzung mehrerer Individuenstellen. Während ‚Px' ein Prädikatausdruck ist für Sätze wie:

Der Tisch ist blau
Die Rübe ist roh
Die Drossel ist flügge

so bezeichnen wir mit ‚Rxy' eine Beziehung zwischen ‚x' und ‚y'. Beispiele

Trm	Ramseier trinkt Milch
Lbc	Bernhard liebt Claudia
Fhv	Hans fährt einen Volvo

Wir sprechen hier von zweistelligen oder dyadischen Relationen. Selbstverständlich gibt es auch drei- und mehrstellige Relationen wie:

Sokn	Othmar schickt Käthy einen Nelkenstrauß.
Eabsd	Albert erpreßt Bernhard wegen Steuerhinterziehung zum dritten Mal.

Übung 5.3.1

Formalisieren Sie:

1. Albert telephoniert Sylvia.
2. Paulus schrieb den Römerbrief.
3. Lausanne ist nicht größer als Paris.
4. Rita besuchte mich.
5. Einstein verwirrte die Zeitgenossen durch die Relativitätstheorie.
6. Japan eroberte den Markt mit den Kleinwagen.
7. Franz führte Ruth nicht in den Club ein.
8. Köln liegt zwischen Basel und Hamburg.
9. Arnold war wütend über Bernhard wegen Claudia.
10. Wenn der Vater dem kleinen Mathias ein Stück Fleisch gibt, so gibt es Mathias dem Hund weiter.

5.3.2 Symbolisierung mit einem Quantor

Es ändert sich prinzipiell nichts, ob wir es mit tri- (drei-), tetradischen (vierstelligen-) oder noch höherstelligen Relationen zu tun haben. Die Argumente werden der Reihe nach aufgeführt. Dabei können eine oder mehrere Individuenstellen durch Quantoren gebunden sein. Beispiele mit nur einem Quantor:

1. Alle Kapitäne sehen den Mond	$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Sxm)$
2. Einige Amerikaner besuchen das Rütli	$(\exists x)\ (Ax \wedge Bxr)$
3. Wenige Touristen kennen das Matterhorn nicht	$(\exists x)\ (Tx \wedge \neg Kxm)$

Übung 5.3.2

Formalisieren Sie:

1. Alle Jazzfans lieben Armstrong.
2. Franz kennt jemanden, den er bewundert.
3. Franz kennt jemanden, der ihn bewundert.
4. Kein Gesundheitsfanatiker trinkt Coca Cola.
5. Jeder, der größer ist als Alice, ist nicht kleiner als Beatrice.

5.3.3 Symbolisierung mehrerer Quantoren

Die Übertragung aus der Umgangssprache hat bei den Relationen noch eine besondere Tücke. Statt zu sagen „a sieht b“ kann der gleiche Sachverhalt auch mit „b wird von a gesehen“ ausgedrückt werden. Da die Passivform die Struktur nicht verändert, müssen beide Sachverhalte gleich formalisiert werden. Allerdings ist mit der Passivform bisweilen der Nebeneffekt verbunden, daß gewisse Individuenstellen unerwähnt bleiben. Sie gelten jeweils als „selbstverständlich“, wie etwa im Beispiel: „a wurde gesehen“, was ungekürzt so lauten müßte: „a wurde von jemandem gesehen“. Die Aktivform zeigt deutlicher an, ob es sich um eine zwei-, drei- oder noch mehrstelligere Relation handelt. Manchmal ist es unumgänglich, die versteckten Relationsargumente sichtbar zu machen. Auf jeden Fall kann jede Formalisierung einer Relation zweifach in die Alltagssprache übersetzt werden, aktiv oder passiv.

$(\forall x)\,Emx$	Die Maschine erschüttert alles Alles wird von der Maschine erschüttert
$(\exists x)\,Emx$	Die Maschine erschüttert etwas. Etwas wird von der Maschine erschüttert.
$(\forall x)\,Exm$	Alles erschüttert die Maschine Die Maschine wird von allem erschüttert
$(\exists x)\,Exm$	Etwas erschüttert die Maschine Die Maschine wird von etwas erschüttert

Die zweite Individuenstelle kann ebenfalls quantifiziert werden:

1. $(\forall x)\ (\forall y)\,Exy$	Alles erschüttert alles.
2. $(\forall y)\ (\forall x)\,Exy$	Alles wird von allem erschüttert.
3. $(\exists x)\ (\exists y)\,Exy$	Etwas erschüttert etwas.
4. $(\exists y)\ (\exists x)\,Exy$	Etwas wird von etwas erschüttert.
5. $\neg\ (\forall x)\ (\forall y)\,Exy$	Nicht alles erschüttert alles.
6. $\neg\ (\forall y)\ (\forall x)\,Exy$	Nicht alles wird von allem erschüttert.

Bis hierher dürfen die Quantoren beliebig umgestellt werden. Doch gilt dies nicht mehr für die beiden folgenden Fälle:

7. $(\forall x)\ (\exists y)\,Exy$	Alles erschüttert einiges
8. $(\exists y)\ (\forall x)\,Exy$	Einiges wird von allem erschüttert

Die beiden Formeln 7. und 8. zeigen eine große Ähnlichkeit. Indessen bringen die vertauschten Quantoren eine völlig verschiedene Bedeutung mit sich. Das läßt sich intuitiv erfassen am Beispiel der Relation Liebe.

Die Formel 7. besagt dann, daß alle Menschen irgend einen Menschen lieben, also etwa: Jeder Mensch liebt seine Mutter.

Formel 8. dagegen besagt, daß es einen Menschen gibt, der von allen Menschen geliebt wird, etwa der heilige Franziskus.

Trotz des beachtlichen Unterschieds sind die beiden Formeln nicht unabhängig voneinander; die eine läßt sich aus der andern folgern, jedoch nicht umgekehrt. Genauer: Aus 8. folgt 7., aber aus 7. folgt nicht 8. Das sei kurz aufgezeigt.

1.	$(\exists x)\ (\forall y)\, Rxy$	$/ \therefore\ \underline{(\forall y)\ (\exists x)\, Rxy}$
2.	$(\forall y)\, Ray$	$-\exists$
3.	Rab	$-\forall$
4.	$(\exists x)\, Rxb$	$+\exists$
5.	$(\forall y)\ (\exists x)\, Rxy$	$+\forall$

Die umgekehrte Ableitung ist nicht gültig. Wir wollen sehen weshalb:

1.	$(\forall x)\ (\exists y)\, Rxy$	$/\ \underline{(\exists y)\ (\forall x)\, Rxy}$
2.	$(\exists y)\, Ray$	$-\forall$
3.	Rab	$-\exists$
4.	$(\forall x)\, Rxb$	unerlaubt

Bei 3. haben wir ‚b' aus einer ∃-Elimination abgeleitet. Dann dürfen wir nicht anschließend die Relationskonstante ‚a' durch einen Allquantor binden. Im Schritt 4. fallen wir zwar nicht in den Fehler, einen durch existenzielle Einsetzung erhaltenen Ausdruck – nämlich ‚b' – zu verallgemeinern. Aber solange ‚b' nicht gebunden ist, darf auch ‚a' nicht universell verallgemeinert werden. Da also ‚b' von einem Existenzquantor abgeleitet wurde, kann es nur wieder durch einen Existenzquantor gebunden werden, so daß wir als einzigen Ausweg wieder auf Schritt 2 zurückfallen. Es gilt deshalb:

$$(\exists x)\ (\forall y)\, Rxy \rightarrow (\forall y)\ (\exists x)\, Rxy$$

Was hier formal abgehandelt wurde, läßt sich intuitiv verständlich machen. Solange bei Relationen eine Argumentstelle als Konstante vorhanden ist, sind Argumentvertauschungen harmlos. Beispiel:

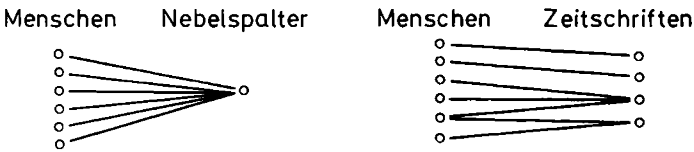
Alle lesen den Nebelspalter
Also wird der Nebelspalter von allen gelesen
$(\forall x)\, Lxn \rightarrow (\forall x)\, Lnx$ korrekt

Der Schluß ist richtig. Gefährlich wird die Lage, wie unzählige, falsch gelöste philosophische Beispiele zeigen, sobald das zweite Relationsargument mit einem Quantor versehen ist. Analog zum Nebelspalterbeispiel:

Alle lesen etwas (eine bestimmte Zeitschrift)
Also wird etwas (eine bestimmte Zeitschrift) von allen gelesen

$(\forall x)\ (\exists y)\, Lxy \ \rightarrow\ (\exists y)\ (\forall x)\, Lxy$ (falsch)

Der Unterschied läßt sich so skizzieren:



Aus der Tatsache, daß jeder eine Zeitung liest, folgt nicht, daß ein und dieselbe Zeitung von allen gelesen wird.

Beispiele zur Formalisierung

1. Alle Nachtwächter kennen einige Sternbilder
   $(\forall x)$ [x sind Nachtwächter $\rightarrow$ es gibt einige Sternbilder, und die x kennen sie]
   $(\forall x)$ [Nx $\rightarrow$ es gibt einige y, die Sternbilder sind, und die x kennen y]
   $(\forall x)\ [Nx \rightarrow (\exists y)\ (Sy \wedge Kxy)]$

   Nx: x ist Nachtwächter
   Sy: y ist ein Sternbild
   Kxy: x kennt y

2. Einige Händler tauschen alle Modelle ein
   $(\exists x)$ [x sind Händler $\wedge$ für alle Modelle gilt: die x tauschen sie ein]
   $(\exists x)$ [Hx $\wedge$ für alle y, die Modelle sind, gilt: die x tauschen die y ein]
   $(\exists x)\ [Hx \wedge (\forall y)\ (My \rightarrow Txy)]$

   Hx: x ist Händler
   My: y ist Modell
   Txy: x tauscht y ein

3. Jeder Jäger sieht einige Hasen
   $(\forall x)$ [x sind Jäger $\rightarrow$ es gibt Hasen, und die x sehen die Hasen]

$(\forall x)$ [Jx → es gibt y, die Hasen sind, und die x sehen die y]
$(\forall x)\ [Jx \rightarrow (\exists y)\ (Hy \wedge Sxy)]$

Jx:	x ist Jäger
Hy:	y ist Hase
Sxy:	x sieht y

4. Jeder liebt sich selbst
   $(\forall x)$ (x sind Personen → die x lieben sich selbst)
   $(\forall x)$ (Px → die x lieben die x)
   $(\forall x)\ (Px \rightarrow Lxx)$

Px:	x ist Person
Lxx:	x liebt x

Übung 5.3.3

Formalisieren Sie und geben Sie das benutzte Vokabular an:

1. Einige Erdbeben verursachen Schaden.
2. Viele Bauern ernten keine Kartoffeln.
3. Alle Gärtner begießen die Blumen.
4. Jeder Arbeiter verdient seinen Lohn.
5. Alle Angestellten benutzen den Lift.
6. Nur die Angestellten benutzen den Lift.
7. Die Angestellten müssen den Lift benutzen.
8. Wenn du dir selbst hilfst, so hilft dir Gott.

5.3.4 Die vollständige Aufzählung der Argumentstellen

Um nicht auf die metaphysische Frage, wodurch sich Prädikate von Relationen unterscheiden, eingehen zu müssen, spricht man in der Logik auch von ein- oder mehrstelligen Prädikaten. Nach dem erfreulichen Prinzip, wenn immer möglich die am wenigsten aufwendige Sprache für die Formalisierung zu wählen – die Aussagenlogik gilt als einfacher gegenüber der einstelligen Prädikatenlogik, diese als einfacher verglichen mit der zweistelligen usw. – können wir oft in der mehrstelligen Prädikatenlogik eine oder mehrere Stellen unterdrücken. Wird bei einer zweistelligen eine Stelle nicht formalisiert, so hat in der Sprache der traditionellen Terminologie anscheinend ein Übergang von einer Relation auf ein Prädikat stattgefunden. Was immer das heißen mag, metaphysische Fragen sollen uns weiterhin nicht beunruhigen. Wir sind zunächst eher daran interessiert, herauszufinden, wie viele Stellen formalisiert werden müssen. Betrachten wir dazu die folgenden Beispiele:

(1)	Alfons wird bewundert	Ba
(2)	Alfons wird vom Nachbarn bewundert	Ban
(3)	Alfons wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert	Banf

Ist nun „bewundern" ein-, zwei- oder sogar dreistellig? Aufgrund von Beispiel (3) offensichtlich dreistellig. Dennoch sind die Schreibweisen von (2) und sogar (1) korrekt. Es gilt die allgemeine Regel, aufwendige Formalisierungen zu vermeiden, die voraussichtlich in der anschließenden logischen Überlegung nicht benötigt werden.

Beispiel 1

Alfons wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert
Also wird jemand vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert

Für die Deduktion schlagen wir zwei Lösungswege vor:

a)
1. Banf $\quad$ $\underline{/\therefore\ (\exists x)\,Bxnf}$
2. $(\exists x)\,Bxnf$ $\quad$ 1, $+\exists$

a: Alfons
n: Nachbar
f: Frühturnen
Bxyz: x wird von y bei z bewundert

b)
1. Ba $\quad$ $\underline{/\therefore\ (\exists x)\,Bx}$
2. $(\exists x)\,Bx$ $\quad$ 1, $+\exists$

a: Alfons
Bx: x wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert

Der Lösungsweg a) ist aufwendig. Von den drei aufgezählten Argumentstellen bleiben zwei von der Deduktion unberührt. Deshalb ist die Deduktion b) vorzuziehen. b) ist eine Reduktion auf das streng Notwendige.

Beispiel 2

Alfons wird vom Nachbarn beim Frühturnen bewundert
Also wird jemand von jemandem bei einer Tätigkeit bewundert

1. Banf $\underline{/ \therefore (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Px \wedge Py \wedge Tz \wedge Bxyz)}$
2. $(\exists z)\, Banz$
3. $(\exists y)\ (\exists z)\, Bayz$
4. $(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\, Bxyz$

Px: x ist eine Person
Py: y ist eine Person
Tz: z ist eine Tätigkeit
Bxyz: x wird von y bewundert wegen z

Die Formalisierung von Beispiel 2 kann nicht vereinfacht werden mit Ausnahme, daß beim Resultat die ‚Px', ‚Py' und ‚Tz' weggelassen werden.

Beispiel 3

Der Nachbar hat Alfons beim Frühturnen bewundert, und die Mutter hat Beatrice beim Frühturnen bewundert
Also sind beide von jemandem beim Frühturnen bewundert worden

1. $Bna \wedge Bmb$ $\underline{/ \therefore (\exists x)\ (\exists y)\ (Bxa \wedge Byb)}$

Es besteht kein Anlaß, bei Beispiel 3 ein zusätzliches Prädikat für „Frühturnen" einzuführen.

Bisweilen lassen sich durch sprachliche Umformungen zweistellige Prädikate auf einstellige reduzieren.

(4) Jakob trinkt Kaffee Tjk
(5) Jakob ist Kaffeetrinker Kj

Doch wer bei solchen Reduktionen auf die Elemente natürlicher Sprachstrukturen zu stoßen hofft, der täuscht sich insofern, als dieses Vorgehen weder allgemein gültig noch allgemein wünschbar ist.

Übung 5.3.4

Formalisieren Sie alle Argumentstellen:

1. Adelheid spielt.
2. Adelheid spielt Tennis.
3. Adelheid spielt Tennis gegen Berta.
4. Adelheid spielt Tennis gegen Berta in den Europameisterschaften.
5. Einige reden.
6. Alle reden mit einigen.
7. Alle reden mit einigen über den Verlust.
8. Alle reden mit einigen über den Verlust aller Aktien.

5.3.5 Der Genitiv

Wir reden von Werners Auto, von Monikas Pferd oder von Hildegards Blumen. Der Genitiv dient häufig zur Bezeichnung einer Besitzangabe. Dabei wird eine Beziehung ausgesprochen zwischen einer Person und einem Ding. Im allgemeinen benutzen wir dazu das Wort „haben" im Sinne von „Werner hat einen Jaguar". Dementsprechend sind folgende Formalisierungen zugelassen:

(1)	Werners Jaguar	Hwj
(2)	Monikas Pferd	Hmp
(3)	Hildegards Blumen	Hhb

Mit dem Wort „haben" braucht jedoch nicht unbedingt ein Besitz ausgedrückt zu sein. Auch Sätze von der folgenden Art sind geläufig:

(4)	Mein Fernsehapparat hat Röhren	Hfr
(5)	Wolfgang hat Pech	Hwp
(6)	Walter hat Geistesgegenwart	Hwg
(7)	Stephan hat Vernunft	Hsv

Die beiden Beispiele (6) und (7) sind indessen bereits fragwürdig. Sie ließen sich besser so formulieren:

(8)	Bernhard ist geistesgegenwärtig	Gb
(9)	Stephan ist vernünftig	Vs

Die Aussagen (6) und (7) sind ungebräuchlich formuliert; falsch dagegen sind sie nur für denjenigen, der einen metaphysischen Unterschied sehen will zwischen Relationen und Prädikataussagen. Vom sprachlichen Gesichtspunkt aus ist (8) und (9) vorzuziehen. Allerdings stößt diese Übersetzungsart sehr bald an Grenzen, denn

(10) Mein Fernsehapparat ist röhrig
(11) Wolfgang ist pechig

sind unzumutbare Übersetzungen von (4) und (5). Zufällig hat uns die Sprache Adjektive zur Verfügung gestellt für „hat Vernunft" oder „hat Geistesgegenwart", nicht aber für „hat Röhren" oder „hat Pech". Diese Sprachwillkür sollte uns nicht überstürzt metaphysische Unterschiede zwischen ein- und zweistelligen Prädikaten vermuten lassen.
Ferner deutet bei weitem nicht jedes „haben" auf eine Besitzanzeige hin.

Beispiel:

(12) Judith hat eine Schwester Hjs

Man kann eine Schwester gewiß nicht so haben, wie man ein Auto oder ein Pferd hat. Erfreulicherweise gibt uns die Sprache auch hier wieder eine Ausweichmöglichkeit, um dem unangemessenen „haben" zu entgehen, nämlich so:

(13) Jemand ist die Schwester von Judith Sxj

Manchmal mag sich Unschlüssigkeit einstellen angesichts der Wahl zwischen einer alltäglichen Ausdrucksweise, die sich vom Empfinden her der Symbolisierung widersetzt und einer gequälten Umformung. Soll man „Die Rosen haben Dornen" mit „haben" symbolisieren oder umformen in „Die Rosen sind dornig"? Letztlich hängt die Beurteilung vom Sprachempfinden ab. In unserem Beispiel hat es so entscheiden: „Die Rosen haben Dornen". Im Zweifelsfall ziehen wir es vor, die Formalisierung dem vorgelegten Ausdruck anzugleichen, statt nach ausgefallenen Übersetzungen zu suchen. Wenn etwa Andreas von den Masern befallen wurde, dann mag auf zweifache Weise von diesem beklagenswerten Zustand gesprochen werden:

(14) Andreas ist masrig Ma
(15) Andreas hat die Masern Ham

(15) spricht von einer Beziehung H zwischen Andreas und den Masern. Während traditionelle Philosophen (14) als die einzig korrekte Darstellung ansehen mögen, geben wir sprachlich eindeutig (15) den Vorzug.

„Haben“ wird selbstverständlich nicht als Relation formalisiert, wenn es nur die Vergangenheit ausdrückt.

(16) Pia hat gelacht Lp
(17) Berta hat sich mit Urs gezankt Zbu

Übung 5.3.5

Formalisieren Sie:

1. Eugen hat einige graue Haare.
2. Wer einen Freund hat, hat Sicherheit.
3. Keiner hat alles.
4. Jeder Sohn hat einen Vater, aber nicht jeder Vater einen Sohn.
5. Jeder Schweizer hat einen Paß.
6. Verneinen Sie 5.

5.3.6 Die Zeit

Bisher haben wir alle Beispiele jeweils als zeitlos aufgefaßt. Nun kann es aber bei gewissen Verknüpfungen gerade auf Zeitzusammenhänge abgesehen sein. Diese Aufgabe kann den Quantoren übertragen werden. Für „immer“ eignet sich der Allquantor, der so eingesetzt wird: „Für alle x, die Zeitpunkte sind, gilt ...“ Ebenso läßt sich „manchmal“ mit dem Existenzquantor darstellen.

(1) Albert ruft manchmal den Bruder an, wenn er in Geldnot ist
$(\exists t)\ (Gat \rightarrow Aab)$
(2) Othmar schreibt Käthi immer dann, wenn sie getrennt sind
$(\forall x)\ [Tx \rightarrow (Gokx \rightarrow Sokx)]$ oder $(\forall t)\ (Gokt \rightarrow Sokt)$

Es bleibt jedoch zu beachten, daß ein Zeitwort keine unfehlbare Angabe dafür ist, daß die Aussage zeitlich zu verstehen wäre. „Raben sind immer schwarz“ heißt nichts anderes als „Alle Raben sind schwarz“.

Übung 5.3.6

1. Konrad und Beatrice reisten zu verschiedenen Zeiten ab (=: gleich; ≠: verschieden).
2. Lügen haben kurze Beine.
3. Du kannst einige Leute immer belügen und alle Leute manchmal, aber du kannst nicht alle Leute immer belügen (Abraham Lincoln).
4. Diese Kuh kann jeden Tag kalben.

Übung 5.3.6 (Wiederholung)

Formalisieren Sie:

1)
1. Es gibt Medikamente, die schlechter sind als alle Krankheiten.
2. Einige Verkäufer beeinflussen alle Kunden.
3. Nicht jeder ist Meister seines Faches.
4. Wer ein unglückliches Kind hat, ist selber unglücklich.
5. Keine Regel ohne Ausnahme.
6. Was sich liebt, das neckt sich.
7. Irren ist menschlich.
8. Keine Rosen ohne Dornen.
9. Nur wer sich selbst vertraut, vertraut andern.
10. Keiner bringt einem andern etwas bei, außer er hat es sich selber beigebracht.

2)
1. Einige Busfahrer transportieren die Touristen über einige Pässe.
2. Eine Person, die freundlich zum einen ist, ist es auch zum andern.
3. Jeder, der etwas leistet, wird von jemandem beneidet.
4. Es gibt einen Laden, aus dem jeder etwas kauft.
5. Einige Leute kaufen alles in einem Laden.
6. Wer andern etwas wegnimmt, ist ein Dieb.

7. Zirkusleute erschrecken einige Zuschauer mit Akrobatik.
8. Jeder leiht jemandem etwas.
9. Jeder Student löst einige Aufgaben, aber keiner löst alle.
10. Wer andern eine Grube gräbt, fällt selbst hinein.

3)
1. Einige Geschäftsleute unterhalten sich freundlich im Laden mit ihren Kunden über das Wetter.
2. Jeder liest etwas im einen oder anderen Buch.
3. Wer einigen alles glaubt, der glaubt anderen nichts.
4. Wo es Rauch gibt, da gibt es Feuer.
5. Wenn Zürich 400000 Einwohner hat, dann ist es die größte Schweizerstadt.

5.4 Deduktion

Quantoren dürfen nur eliminiert werden, wenn sie am Anfang einer ganzen Formel stehen und sich auf die ganze Formel beziehen. Für die Deduktion gelten sonst die bisher bekannten Regeln. Beispiele

Beispiel 1

1. Alle Rosen haben Dornen
2. Also hat auch die Adenauerrose Dornen

1. $(\forall x)\ (Rx \rightarrow (\exists y)\ (Dy \wedge Hxy))$

$\underline{/\therefore\ Ra \rightarrow (\exists y)\ (Dx \wedge Hay)}$

2. $Ra \rightarrow (\exists y)\ (Dy \wedge Hay)$ 1, $-\forall$

1. Hitler verhöhnte alle Engländer
2. Churchill war Engländer
3. Also verhöhnte jemand Churchill

1.	$(\forall x)\ (Ex \rightarrow Vhx)$	
2.	Ec	$\underline{/\therefore\ (\exists x)\, Vxc}$
3.	$Ec \rightarrow Vhc$	1, $-\forall$
4.	Vhc	2, 3, MP
5.	$(\exists x)\, Vxc$	4, $+\exists$

Es gibt Schlüsse, die wir intuitiv leicht bewältigen, die aber verhältnismäßig viel Aufwand erfordern, sobald verlangt wird, den formalen Ablauf exakt nachzuweisen. Dazu gehört etwa der folgende Schluß:

Mercedes sind Autos
Also, wer Mercedes fährt, fährt Auto

Die erste Prämisse ist leicht zu formalisieren:

$$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Ax)$$

Die traditionelle Logik gerät mit der Konklusion an Grenzen. Denn im Gegensatz zur Prämisse haben wir es nicht mehr mit den gleichen Elementen zu tun, nämlich mit den Autos, sondern mit Autofahrern. Das sind offensichtlich Menschen, die in einer bestimmten Beziehung zu Autos und Mercedes stehen. Die traditionelle Logik war gezwungen, die Konklusion etwa so zu formalisieren:

$$(\forall y)\ (Fy \rightarrow Gy)$$

Alle Mercedesfahrer sind Autofahrer

Diese Formel kann aber als Konklusion nicht allgemeingültig sein, denn sie müßte etwa die Deutung einschließen: „Alle Mercedes sind Autos, also sind alle Eichhörnchen Klettertiere." Da für die Buchstaben Beliebiges eingesetzt werden darf, wäre grundsätzlich nichts gegen die Einsetzung einzuwenden: „Wenn alle Zündhölzer abgebrannt sind, dann wackeln alle Büchergestelle." Das ist alles andere als logisch zwingend.

Beim Formalisieren des Autofahrbeispiels gehen wir von einem konkreten Fahrer aus:

Hildegard fährt Mercedes $\quad$ Fhm

Weiter muß die Tatsache explizit ausgesprochen werden, daß ein Mercedes ein Auto ist, also Am. Die Konjunktion ergibt:

$$Am \wedge Fhm$$

oder existenziell verallgemeinert: Es gibt ein Ding, das ein Auto ist und Hildegard fährt dieses Ding:

$$(\exists y)\ (Ay \wedge Fhy)$$

Diesen Satz können wir erweitern: Wenn etwas ein Mercedes ist, den Hildegard fährt, dann ist es ein Auto, das Hildegard fährt:

$$(\exists y)\ (My \wedge Fhy)\ \rightarrow\ (\exists y)\ (Ay \wedge Fhy)$$

Das gilt aber nicht bloß für Hildegard, vielmehr für alle Mercedesfahrer:

$$(\forall x)\ [(\exists y)\ (My \wedge Fxy)\ \rightarrow\ (\exists y)\ (Ay \wedge Fxy)]$$

Somit lautet unsere Behauptung:

$(\forall x)\ (Mx \rightarrow Ax)$ $\underline{/\ (\forall x)\ [(\exists y)\ (My \wedge Fxy)\ \rightarrow\ (\exists y)\ (Ay \wedge Fxy)]}$

Für die Ableitung wird sich die Konditionale Annahme empfehlen.

Übung 5.4

1) 1. Wer immer das Gebäude betreten hat, wurde gesehen
   2. Jeder, der Priska gesehen hat, erinnert sich an sie
   3. Niemand erinnert sich an Priska
   4. Also hat Priska das Gebäude nicht betreten

2) 1. Alle Angestellten grüßen alle Direktoren
   2. Kein Angestellter grüßt alle Konkurrenten
   3. Es gibt Angestellte
   4. Also ist kein Direktor ein Konkurrent

3) 1. Alle Eingaben wurden an alle Ratsmitglieder weitergeleitet
   2. Es gab einige Eingaben zur Steuersenkung
   3. Also war eine Eingabe über Steuersenkung an einige Ratsmitglieder weitergeleitet worden

4) 1. $(\exists x)\ (Ax \wedge Bx)\ \rightarrow\ (\forall y)\ (Cy\ \rightarrow\ Dy)$
   2. $(\exists y)\ (Cy \wedge \neg Dy)$ $\underline{/\ (\forall x)\ (Ax\ \rightarrow\ \neg Bx)}$

5) 1. $(\forall x)\ [Ax\ \rightarrow\ (\forall y)\ (\exists z) Rxyz]$
   2. $(\exists x) Ax$ $\underline{/\ (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z) Rxyz}$

6) 1. Wenn der Pfeil während der Zeit t fliegt, so gibt es in jedem Augenblick seines Fluges einen Ort, an dem er sich in diesem Augenblick befindet.

2. Wenn es einen solchen Ort gibt, an dem sich der Pfeil in jedem Augenblick seines Fluges befindet, so ruht der Pfeil während der ganzen Zeit seines Fluges.
3. Also, wenn der Pfeil während der Zeit t fliegt, so ruht der Pfeil während der ganzen Zeit t.
   oder: Also fliegt der Pfeil nicht.

t:	t ist ein Zeitpunkt
Bptx:	p befindet sich zur Zeit t am Ort x
Fpt:	p fliegt zur Zeit t
Rpt:	p ruht zur Zeit t = p fliegt nicht zur Zeit t

7) Alle Kreise sind Figuren
Also, wer Kreise zeichnet, zeichnet Figuren.

5.5 Die polnische Schreibweise der Prädikatenlogik

Für die polnische Schreibweise der Prädikatenlogik brauchen wir nur die Darstellungsweise der Quantoren und die entsprechenden Streichungsregeln beizufügen.

5.5.1 Schreibweise der Quantoren

Die Quantoren werden gemäß der bisherigen Schreibweise ohne Klammern beigefügt.

$\forall\ x\ P\ x$	$(\forall x) Px$
$\exists\ x\ P\ x$	$(\exists x) Px$
$\forall\ x\ C\ P\ x\ Q\ x$	$(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$
$C\ \forall\ x\ P\ x\ \exists\ y\ Q\ y$	$(\forall x) Px \rightarrow (\exists y) Qy$
$\overline{\exists x}\ K\ P\ x\ Q\ x$	$\neg (\exists x)\ (Px \wedge Qx)$
$\exists x\ \bar{K}\ P\ x\ Q\ x$	$(\exists x) \neg (Px \wedge Qx)$

Übung 5.5.1

1. $Pa \rightarrow (\forall x) Px$
2. $(\forall x) Px \rightarrow (\exists x) \neg Px$
3. $(\forall x) Px \rightarrow \neg (\exists x) Px$
4. $(\forall x) Px \rightarrow \neg (\exists x) \neg Px$

5.5.2 Streichungsregeln

Streichung des Allquantors

Nachdem der Allquantor gestrichen ist, wird die Variable, die er bindet, durch eine „1“ ersetzt. Bei einem zweiten oder dritten Quantor werden die Variablen durch Zahlenkonstante in der üblichen Reihenfolge „2“, „3“ usw. ausgetauscht.

Streichung des Existenzquantors

Die Variablen des gestrichenen Existenzquantors werden durch Buchstaben ausgetauscht, „a“ für den ersten Existenzquantor, „b“ für den zweiten usw.

$$\forall\, x\, P\, x \qquad\qquad \cancel{\forall}\, \overset{1}{x}\, P\, \underset{1}{x}$$

$$\exists\, x\, P\, x \qquad\qquad \cancel{\exists}\, \overset{a}{x}\, P\, \underset{a}{x}$$

Beispiele:

$$\forall\, x\, C\, P\, x\, Q\, x \qquad\qquad \cancel{\forall}\, \overset{1}{x}\, \cancel{C}\, \overline{P\, \underset{1}{x}}\, Q\, \underset{1}{x}$$

$$A\, \exists\, x\, P\, x\, \exists\, y\, Q\, y \qquad\qquad \cancel{A}\, \cancel{\exists}\, \overset{a}{x}\, P\, \underset{a}{x}\, \cancel{\exists}\, \overset{b}{y}\, Q\, \underset{b}{y}$$

$$\forall\, x\, C\, \exists\, y\, F\, x\, y\, \exists\, z\, G\, z\, x \qquad\qquad \cancel{\forall}\, \overset{1}{x}\, \cancel{C}\, \overline{\exists\, y\, F\, \underset{1}{x}\, \underset{2}{y}}\, \cancel{\exists}\, \overset{a}{z}\, G\, \underset{a}{z}\, \underset{1}{x}$$

Wir haben es auch hier wieder auf die Allgemeingültigkeit abgesehen. Sie zeigt sich in den Tautologien. Dabei ist hier auf die Einschränkung zu achten, daß nur dann von Tautologien zu sprechen ist, wenn ein Prädikat mit seiner Negation auftritt und die Reihenfolge der Variablen gewahrt bleibt.

Tautologien:	P1,	$\overline{\text{P1}}$
	Qab,	$\overline{\text{Qab}}$
Keine Tautologien:	P1,	$\overline{\text{Q1}}$
	P1,	$\overline{\text{P2}}$
	Q12,	$\overline{\text{Q21}}$

Beispiele

$$
\begin{array}{llllllllll}
\forall & x & C & K & P\,x & Q\,x & P\,x & & & (\forall x)\ ((Px \wedge Qx)\ \rightarrow\ Px) \\
 & 1 & & & & & & & & \\
\cancel{\forall} & x & \cancel{C} & \cancel{K} & \overline{P\,x} & \overline{Q\,x} & P\,x & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & & \overline{P1} & \overline{Q1} & P1 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\forall x & \forall y & C & Pxy & A & Qxy & Pxy & (\forall x)\ (\forall y)\ ((Pxy\ \rightarrow\ (Qxy \vee Pxy)) \\
1 & 2 & & & & & & \\
\cancel{\forall} x & \cancel{\forall} y & \cancel{C} & \overline{Pxy} & \cancel{A} & Qxy & Pxy & \\
 & & & 12 & & 12 & 12 & \\
1 & 2 & & \overline{P12} & & Q12 & P12 &
\end{array}
$$

Eine geschlossene Tafel ist der Beweis für die Allgemeingültigkeit. Will der konsequente Nachweis der Tautologie nicht gelingen, dann muß die Frage der Gültigkeit vom zweistelligen Prädikatenkalkül an offen bleiben.

Allerdings sind noch nicht alle Wege ausgeschöpft, auf denen Tautologien herstellbar sind. Das ist etwa der Fall bei einer Formel wie

$$C\ \forall x\ Px\ \forall x\ Px \qquad\qquad (\forall x)\,Px\ \rightarrow\ (\forall x)\,Px$$

die intuitiv tautologisch erscheint, sich mit dem bisherigen Material jedoch nicht schließen läßt, denn:

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{a} & 1 \\
\cancel{C} & \overline{\cancel{\forall}\ x\ P\ x} & \cancel{\forall}\ x\ P\ x \\
 & \quad\ \text{a} & \qquad 1 \\
 & \text{a}, \overline{P\text{a}}\ , & 1, P1
\end{array}
$$

stellt mit $\overline{P\text{a}}$ und P1 keine Tautologie dar. Nun muß es aber einen Ausweg geben, diese offensichtliche Gültigkeit doch zu beweisen. Das geschieht tatsächlich durch Auswechseln der Buchstaben. Wir dürfen a = 1 setzen, wodurch die Formel schließbar wird. Freilich ist eine solche Ersetzung zwei Einschränkungen unterworfen, der Vorschrift der Einheitlichkeit und der Reihenfolge.

Einheitlichkeit

Wird a = 1 gesetzt, dann muß dies konsequent durchgehalten werden.
Beispiel:

C K ∃ x F x ∃ x G x ∃ x K F x G x

$$\cancel{C}\ \overline{\cancel{K}}\ \overset{1}{\overline{\cancel{\exists} x F x}}\ \overset{2}{\overline{\cancel{\exists} x G x}}\ \overset{a}{\cancel{\exists} x}\ \cancel{K} F x G x$$

1 2 | $\underbrace{\text{a a}}$

| F a a = 1

1, $\overline{F1}$, 2, $\overline{G2}$ a | unerlaubt

| G a a = 2

Der Grund für die Willkürwahl zwischen 1 und 2 ist einsichtig. Es soll damit verhindert werden, daß aus der Tatsache eines runden Gegenstandes und eines kubischen Gegenstandes gefolgert wird, es würde einen kugelförmigen Würfel geben.

Anders sieht die Lage aus, wenn in der Aufsplitterung Allquantoren auftreten. Sofern sie in entgegengesetzten Hälften vorkommen, dürfen die gleichen Zahlen gewählt werden.
Beispiel:

C ∀ x K F x G x K ∀ x F x ∀ x G x

$$\cancel{C}\ \overset{a}{\overline{\cancel{\forall} x}}\ \cancel{K}\ \overline{F x G x}\ \cancel{K}\ \overset{1}{\cancel{\forall} x} F x\ \overset{1}{\cancel{\forall} x} G x$$

a a | $\underbrace{\text{1 1}}$

| 1, F1 a = 1

a, $\overline{\text{Fa}}$, $\overline{\text{Ga}}$ |

| 1, G1 a = 1

Eine Tafel kann nie geschlossen werden, wenn keine negierten Grundformeln vorliegen. Dasselbe gilt auch für Tafeln mit verschiedenen numerischen Konstanten wie etwa P1, P2.

Ferner kann es vorkommen, daß keine numerische Konstanten vorhanden sind. Dann dürfen solche unter bestimmten Bedingungen eingeführt werden.

Reihenfolge

Die Beurteilung der Reihenfolge richtet sich nach dem Bereich, den der Quantor bindet. Die exakte Reichweite wird in der Quantorenskizze (Q-Skizze) festgehalten. Allgemein gilt: Reicht ein Quantor über einen andern hinaus, dann wird der erste Quantor über dem zweiten geschrieben. Sind die beiden selbständig, dann drückt sich das durch Nebeneinanderstellen aus. Beispiele sollen dies verdeutlichen.

Beispiel 1 — Q-Skizze

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\,Pxyz \ \text{ ergibt } \ \overset{1}{\not\forall x}\ \overset{2}{\not\forall y}\ \overset{a}{\not\exists z}\ \ Pxyz \qquad\qquad \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline a \end{array}$$

Beispiel 2

$$(\forall x)\,Px \vee (\forall y)\,Qy \vee (\exists z)\,Rz \qquad A\ A\overset{1}{\not\forall x}\,Px\ \overset{2}{\not\forall y}\ Qy\ \overset{a}{\not\exists z}\,Rz \qquad \begin{array}{c}\text{Q-Skizze}\\ 1 \quad 2 \quad a\end{array}$$

Beispiel 3

$$(\forall x)\ [(\exists y)\,Pxy \rightarrow (\exists z)\ ((\forall w)\,Qzw \rightarrow (\exists v)\,Rv)]$$

$$\forall x\ C\ \exists y\ \ Pxy\ \exists z\ C\ \forall w\ \ Qzw\ \exists v\ Rv$$

$$\overset{1}{\not\forall x}\ \not C\ \overset{\underline{2\qquad}}{\not\exists y}\ \ Pxy\ \overset{a}{\exists z}\ \not C\ \overset{\underline{b\qquad}}{\forall w}\ \ Qzw\ \overset{c}{\exists v}\ Rv$$

Q-Skizze

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ \cline{1-2} 2 & a & \\ \cline{2-3} & b & c \end{array}$$

Die Vorschrift über die Reihenfolge legt nun fest: Buchstaben dürfen durch Zahlen ersetzt werden, wenn ein Weg durch die Skizze führt. Der Weg gilt dann als gangbar, wenn eine Zahl dem Buchstaben vorhergeht. So darf bei der Q-Skizze $\dfrac{1}{a}$ sofort das „a“ durch „1“ ersetzt werden, hingegen ist $\dfrac{a}{1}$ nicht weiter zu bearbeiten, weil der Buchstabe nicht jener Zahl vorausgehen darf, durch die er ersetzt werden soll. So darf im Beispiel 1 der Buchstabe „a“ ausgetauscht werden und zwar durch „1“ oder „2“. Für Beispiel 2 ist das ohnehin der Fall. Auch für Beispiel 3 gilt die Erlaubnis der Ersetzung.

Ein Sonderfall liegt vor im Zusammenhang mit der Existenz. Als Beispiel sei die Formel ‚$(\forall x)\,Px \rightarrow (\exists x)\,Px$‘ gegeben:

$$\begin{array}{lcl} C\ \forall x\ Px\ \exists x\ Px & \qquad\qquad & \text{Q-Skizze} \\ \quad\ a \qquad\ b & & a \quad\ b \\ \not C\ \overline{\not\forall x\ Px}\ \nexists x\ Px & & \end{array}$$

Wir können diese Formel mit der modernen Logik als ungültig betrachten oder eine Existenzannahme postulieren. Das letztere wirkt sich an der Q-Skizze so aus, daß über ‚a‘ und ‚b‘ eine „1“ gesetzt wird, so daß dann die beiden Buchstaben ebenfalls als „1“ ersetzt werden dürfen. Also:

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Beispiel 4

$$\begin{array}{lcl} (\forall x)\ (\exists y)\ (Pxy\ \rightarrow\ Qxy) & \qquad\qquad & \text{Q-Skizze} \\ \quad\ a \quad 1 & & a \\ C\ \overline{\forall x}\ \overline{\exists y}\ \overline{Pxy}\ Qxy & & \overline{1} \end{array}$$

Das Beispiel 4 ist nicht schließbar.

Nun läßt sich die Vorschrift über die Reihenfolge exakter fassen: Buchstaben dürfen durch Zahlen ersetzt werden, wenn ein Weg durch die Skizze führt. Dies ist der Fall unter drei Bedingungen:

1. Der Weg berührt jeden Buchstaben oder jede numerische Konstante nur einmal.
2. In jeder Kolonne berührt der Weg zuerst den höheren, dann den niedrigeren Eintrag.
3. Der Durchgang berührt zuerst eine Zahlenkonstante, bevor ein Buchstabe an der Reihe ist, der durch die Konstante ersetzt wird.

In den Beispielen 1) und 2) ist es erlaubt, ‚a‘ durch „1“ oder „2“ zu ersetzen. Im Beispiel 3) steht die Wahl offen, alle Buchstaben beliebig durch „1“ oder „2“ zu ersetzen.

Die Vorschrift 3. verbietet, daß Beispiel 4 geschlossen wird. Zuerst muß die numerische Konstante auftreten, dann erst ist der Buchstabe erlaubt. Dagegen darf die Tafel a b geschlossen werden, wenn sie aus zwei Existenzoperatoren erhalten wurde, ohne daß eine Zahl vorhanden ist.

Ist eine Formel immer noch nicht geschlossen, so gibt es schließlich die Auswertung der Duplikate, ein Verfahren, auf das wir aber nicht eingehen wollen.

Übung 5.5.2

5. $\neg (\forall x) Px \rightarrow (\exists x) \neg Px$
6. $(\forall x)\ (Px \vee Qx) \rightarrow (\forall x) Px \vee (\forall x) Qx$
7. $\neg (\exists x) Px \rightarrow (\forall x) \neg Px$
8. $(\forall x) Px \vee (\forall x) \neg Px$ Warum ist 8. nicht das Ausgeschlossene Dritte? Wie lautet die korrekte Formulierung?
9. $(\exists x)\ (\forall y) Rxy \rightarrow (\forall y)\ (\exists x) Rxy$
10. $(\forall x)(\exists y) Rxy \rightarrow (\exists y)\ (\forall x) Rxy$

5.6 Die Identität

Die Relationslogik steht noch vor einer Grenze, die verhältnismäßig leicht auszuweiten ist. Mit dem bisherigen Sprachmaterial ist es bestenfalls möglich, zum Ausdruck zu bringen, daß zwei verschiedene Variable für zwei verschiedene Gegenstände stehen müssen. Es genügt, die Aussage ‚$Ax \wedge \neg Ay$' als wahr anzunehmen. Wenn ‚x' und ‚y' dasselbe wären, dann läge ein Widerspruch vor. Also sind sie verschieden. Wie können wir aber ausdrücken, daß zwei Individuen oder zwei Aussagen dieselben sind? Wir möchten nicht auf Behauptungen verzichten, etwa daß der Komponist der Brandenburgischen Konzerte Bach ist, also daß zwei verschiedene Bezeichnungen sich auf den einen Gegenstand beziehen.

Wir fügen der Relationslogik ein neues Zeichen hinzu, „=". Es ist ein Funktor, eine logische Konstante, die die Identität zwischen zwei Namen von Gegenständen bezeichnen soll. ‚$a = b$' bedeutet also, daß ‚a' und ‚b' identisch sind, daß ‚b' nur ein anderer Name für ‚a' ist. Deshalb gilt alles, was von ‚a' ausgesagt wird auch von ‚b'.

5.6.1 Identität und Äquivalenz

Die Identität ist weit strenger als die Äquivalenz. Die Äquivalenz besagt auf der logischen Ebene nur Gleichheit der Wahrheitswerte. Im alltäglichen Leben ist uns der Unterschied zwischen Äquivalenz und Identität sehr wohl vertraut. Freilich sind die meisten Äquivalenzverhältnisse des Alltags nicht Äquivalenzen von Wahrheitswerten, viel häufiger sind es Marktwerte. So hört man beispielsweise: „1 Tafel Schokolade kostet 1.60 Fr.“ Hier ist der Handelswert beider Gegenstände äquivalent. Nur wer unmittelbar in die Münzen beißen wollte, um sich den Gang ins Kaufhaus zu ersparen, würde durch diese Handlung zeigen, daß er die Äquivalenz von der Identität nicht zu unterscheiden weiß.

5.6.2 Identität und Prädikation

Die meisten Unklarheiten im Verständnis der Identität ergeben sich aus der Abgrenzung zur Prädikation. Die Umgangssprache erschwert das Verständnis, weil beide Aussagen mit „ist“ gebildet werden. Wir wollen uns den Unterschied zwischen den beiden verdeutlichen.

Das Prädikat drückt eine Eigenschaft aus, die dem Attribut zukommt. Faßt man die Aussage als Zugehörigkeitsbehauptung auf, dann entspricht dem Prädikat eine Klasse von Gegenständen, z. B. „Das Kleid ist weiß“. Das Prädikat ist hier die Klasse der weißen Gegenstände. Es wird jedoch nicht behauptet, das weiße Kleid sei mit dieser Klasse identisch. Was genau ausgesprochen wird, ist einzig das: Das Suppositum ist mit einem Element dieser Klasse identisch. Die Prädikationsaussage behauptet demnach nicht, das Prädikat der Aussage treffe ausschließlich auf das Suppositum zu oder nur auf das Suppositum. Eine Aussage von dieser Ausschließlichkeit liegt nur dann vor, wenn die Kopula bedeutet „ist definitionsgemäß oder „... ist genau dann, wenn ...“ usw. Das sind aber relativ seltene Fälle.

Die Identitätsaussage schließt ein, Attribut und Prädikat seien in ihren Eigenschaften gleich. Eine Folge davon ist die gegenseitige Austauschbarkeit. Das trifft für die Prädikataussage gerade nicht zu. Dadurch vermag die Prädikataussage nicht nur weniger, sondern etwas anderes auszusagen als die Identität. Sehen wir uns diesen Sachverhalt an der Gegenüberstellung zweier Beispiele an:

Der Elefant ist groß	13 − 3 ist (2.4) + (2.1)
Der Walfisch ist groß	6 + 4 ist (2.4) + (2.1)
Also ist der Wal ein Elefant	Also: 6 + 4 ist 13 − 3
(1)	(2)

Die beiden Beispiele haben den gleichen Aufbau, aber offensichtlich entgegengesetzten Wahrheitsgehalt. Der Syllogismus von (1) ist falsch, derjenige von (2) richtig. Ist (2) zufällig richtig, dank der geschickten Zusammenstellung der Prämissen oder etwa gar, weil wir es mit Zahlen zu tun haben? Keineswegs. Die Gültigkeit kommt einzig daher, weil das „ist" bei (2) ein anderes ist als das von Beispiel (1). Im Beispiel (1) haben wir Prädikataussagen, bei (2) Identitäten. Die Identität läßt sich mit „ist gleichwertig" oder „ist identisch mit" übersetzen. Sollten wir diese Umschreibung unerlaubterweise auf Beispiel (1) übertragen, so würde uns das Sprachempfinden entschieden davon abraten. „Der Elefant ist gleichwertig mit groß" oder „Der Elefant ist identisch mit groß" verträgt sich nicht mit unserem Grammatikverständnis.

Übung 5.6.2

1) Beweisen Sie durch die Formalisierung der folgenden Aussagen die Fähigkeit, die verschiedenen „ist" zu unterscheiden. Greifen Sie nötigenfalls auf die Symbolisierungshilfe der Mengenlehre zurück:

1. Aristoteles ist weise
2. Bern ist die Hauptstadt der Schweiz
3. Menschen sind Lebewesen
4. So ist es
5. A = A + 1

Beurteilen Sie die folgenden Texte:

2) „Von diesen Gesetzen hat der Identitätssatz eine streng logische Bedeutung; ja, man kann zeigen, daß alle rein logischen Regeln sich ausschließlich auf diesen Satz zurückführen lassen, ..." (H.H. Holz, Leibniz (Stuttgart 1958) 90)

Wie zeigt man, daß sich alle logischen Regeln auf die Identität zurückführen lassen?

3) „Alle S sind P, M ist S, deshalb M ist P. Verallgemeinert könnte man sagen, es sei von der einfachen mathematischen Art: Wenn A = B und C = A, dann C = B (M. Frost. Justice and the Nature of Legal Argumentation. Actes du Congrès mondial de Philosophie du Droit et de Philosophie Sociale (Bruxelles 1971), 280).

4) „Das ‚ist' ist ein Binde- und Verhältniswort. Identität ist ein Sachverhalt; ... auch in dem Urteil: x folgt auf y, oder auseinandergelegt: x ist folgend auf y, sind Subjekt, Kopula und Prädikat enthalten; ausgesagt wird, was x in Bezug auf y ist". (C. Nink, Die mathematisch-logistische Symbolsprache in philosophischer Sicht. Scholastik 15 (1940) 61, Anm. 8).

5) „‚Dieses Blatt ist grün'. Das Grünsein ist dem Blatt identisch in dem ... dargelegten Sinne; denn es wird vom Blatt ausgesagt; das Blatt ist eben durch das Grün in sich grün bestimmt. Es ist aber nicht formell, sondern nur materiell identisch mit dem Grün, d. h. in sich ist es grün, aber aus sich könnte es ebenso gut rot – wie es tatsächlich im Herbst ist – und damit nicht grün sein, ... Das Blatt ist also aus sich indifferent gegenüber ‚grün' und ‚nicht grün'. Dieses Verhältnis bezeichnet man als materielle Identität. Ihr entspricht der materielle kontradiktorische Gegensatz". (F. M. Sladeczek, Das Widerspruchsprinzip und der Satz vom hinreichenden Grunde. Scholastik 2 (1927) 11–12).

1. Können Sie exakt, kurz und verständlich beschreiben, was der Autor unter formell und unter materiell identisch versteht?
2. Worin unterscheidet sich der materielle kontradiktorische Gegensatz vom formell kontradiktorischen?

5.7 Einige Eigenschaften der Relationen

Bisher haben wir Relationen nur unter dem Gesichtspunkt ihrer Argumentstellen betrachtet. Dabei sind ein-, zwei- oder n-stellige unterschieden worden. Unabhängig von dieser Einteilung lassen sich Relationen zweckmäßig aufgrund ihrer Eigenschaften ordnen und beschreiben.

Gehen wir von der Aussage aus: „x ist größer als y“. Daraus entnehmen wir intuitiv: „Also ist y nicht größer als x“. Haben wir damit eine erste allgemeine Eigenschaft von Relationen entdeckt? Wenn das zuträfe, dann läge ein Gesetz vor, das sich so schreiben ließe:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$$

Die Enttäuschung wird nicht lange auf sich warten lassen. Das scheinbare Gesetz gilt zwar für die Relation „größer als“ und vermutlich für alle „ähnlichen“ Relationen. Aber worin besteht die Ähnlichkeit? Ist etwa die Relation „gleichgroß“ ähnlich mit „größer als“? Wohl kaum, denn auch bei „gleichgroß wie“ läßt sich ebenfalls intuitiv erfassen, daß wohl immer gilt:

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (Gxy \leftrightarrow Gyx)$$

Damit sind wir eher zufällig auf vermutete Gesetze gestoßen. Leider sind sie nicht für alle Relationen gültig.

Das Ziel unserer Aufgabe könnte nun so umschrieben werden: Wir stellen eine Klassifikation für Relationen auf und suchen nach exakten Kriterien, wann eine Relation „ähnlich“ ist mit der Gruppe „größer als“, wann mit derjenigen von „gleichgroß wie“. Dabei wollen wir uns jedoch nicht auf diese beiden willkürlich herausgegriffenen Relationen beschränken, sondern die Aufgabe etwas systematischer anfassen.

Jene Eigenschaften, die allen Relationen zukommen, nennen wir analytische, jene, die nur einer bestimmten Relation oder Relationsgruppe zukommen, sollen synthetische heißen. Dann ist die nachfolgende Darstellung auf die Untersuchung synthetischer Eigenschaften ausgerichtet. Dabei wollen wir uns auf drei Grundeigenschaften beschränken.

5.7.1 Die Reflexivität

Reflexiv: Eine Relation heißt genau dann reflexiv, wenn jedes Relationsglied die Relation R zu sich selbst hat.

Beispiel: x hat die gleiche Haarfarbe wie y
x ist aus dem gleichen Stoff wie y

Irreflexiv: Eine Relation heißt genau dann irreflexiv, wenn kein Gegenstand diese Relation R zu sich selbst hat.

x ist nicht äquivalent mit x (sich selber)
x ist nicht Vater von x (sich selber)

Non-reflexiv: eine Relation heißt genau dann non-reflexiv, wenn es wenigstens einen Gegenstand gibt, der nicht in dieser Relation R zu sich selber steht.

x hat eine hohe Meinung von y
x verwundet y

Formal

reflexiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ ((Rxy \vee Ryx) \rightarrow Rxx)$
irreflexiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ ((Rxy \vee Ryx) \rightarrow \neg Rxx)$
non-reflexiv	$(\forall x)\ (\exists y)\ ((Rxy \vee Ryx) \wedge \neg Rxx)$

Unter den reflexiven Relationen gibt es noch eine Besonderheit. Wir nennen eine Relation totalreflexiv, wenn jeder Gegenstand diese Relation zu sich hat. Eine solche Relation ist „identisch sein mit“. Formal: $(\forall x)\,Ixx$.

Die Relationen von Eigenschaften lassen sich bildlich darstellen mit Hilfe von Pfeildiagrammen.

reflexiv irreflexiv non-reflexiv

5.7.2 Die Symmetrie

Symmetrisch: Eine Relation heißt genau dann symmetrisch, wenn sie jedesmal, insofern sie einem geordneten Paar von Gegenständen zukommt, auch dem umgekehrt geordneten, aber aus denselben Gegenständen bestehenden Paar zukommt.

Beispiel:

x ist gleich groß wie y
x ist verheiratet mit y

Asymmetrisch: Eine Relation heißt asymmetrisch, wenn sie jedesmal, falls sie einem geordneten Paar von Gegenständen zukommt, nicht auch dem umgekehrt geordneten, aber aus denselben Gegenständen bestehenden Paar zukommt.

x ist im Norden von y
x ist älter als y

Non-symmetrisch: Eine Relation heißt genau dann non-symmetrisch, wenn es wenigstens ein geordnetes Paar von Gegenständen gibt, dem sie zukommt, während sie denselben Gegenständen bei umgekehrter Reihenfolge nicht zukommt.

x liebt y
x ist Bruder von y

Formal:

symmetrisch	$(\forall x)\ (\forall y)\ (Rxy \rightarrow Ryx)$
asymmetrisch	$(\forall x)\ (\forall y)\ (Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
non-symmetrisch	$(\forall x)\ (\exists y)\ (Rxy \wedge \neg Ryx)$

In Pfeildiagrammen

symmetrisch asymmetrisch non-symmetrisch

5.7.3 Die Transitivität

Transitiv: Eine Relation heißt dann transitiv, wenn je zwei Gegenstände, die mit einem dritten in der Relation R stehen, auch unter sich in der Relation R stehen.

Beispiel:

x ist größer als y
x ist schneller als y

Intransitiv: Gilt die Transitivität nie, dann heißt eine solche Relation intransitiv.

x ist Vater von y
x ist links von y

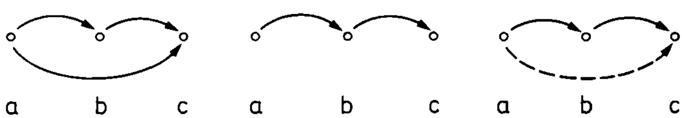
Non-transitiv: Eine Relation heißt genau dann non-transitiv, wenn es der Fall ist, daß transitive Relationen mindestens in einem Fall intransitiv sind.

x ist verschieden von y
x ist Freund von y

Formal:

transitiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$
intransitiv	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow \neg Rxz)$
non-transitiv	$(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ ((Rxy \wedge Ryz) \wedge \neg Rxz)$

In Pfeildiagrammen:



transitiv intransitiv non-transitiv

Nun soll an zwei Beispielen gezeigt werden, wie sich diese Definitionen zu Analysen von Relationseigenschaften eignen. Wir beschränken uns auf die drei definierten Eigenschaften.

Beispiel 1

Welche Eigenschaften hat die Relation „größer als"? Wir stellen die Frage nach Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

1. Ist ‚x' größer als es selber? Das kann nicht sein, also haben wir es mit Irreflexivität zu tun.
2. Wenn ‚x' größer ist als ‚y', ist ‚y' dann größer als ‚x'? Gewiß nicht; folglich handelt es sich um Asymmetrie.
3. Wenn ‚x' größer als ‚y' ist und ‚y' größer als ‚z', ist dann ‚x'

größer als ,z'? Ja, und deshalb haben wir es mit der Transitivität zu tun. So können wir zusammenfassen:

„größer als" ist – irreflexiv
– asymmetrisch
– transitiv

Die Analyse bleibt unbeeinflußt davon, ob „größer als" im Sinn eines arithmetischen Zahlenvergleichs aufgefaßt wird, als Körpermaß oder gar als moralische Qualifikation.

Beispiel 2

„gleichgroß wie"

1. ,x' ist gleichgroß wie es selber, also reflexiv.
2. Wenn ,x' gleichgroß ist wie ,y', dann ist auch ,y' gleichgroß wie ,x', also haben wir eine symmetrische Relation vor uns.
3. Wenn ,x' gleichgroß ist wie ,y' und ,y' gleichgroß wie ,z', dann ist auch ,x' gleichgroß wie ,z', folglich ist die Relation transitiv. Das führt uns zu folgendem Resultat:

„gleichgroß wie" ist – reflexiv
– symmetrisch
– transitiv

Beim Beispiel 2 handelt es sich um eine r(eflexive), s(ymmetrische), t(ransitive) Relation, die auch RST-Relation oder Äquivalenzrelation genannt wird.

Übung 5.7

1) Geben Sie die Eigenschaften der folgenden Relationen an:

1. x wohnt auf der gleichen Meereshöhe wie y
2. x hat dasselbe Einkommen wie y
3. x grüßt y
4. x liegt über y
5. x sorgt für y
6. x ist früher als y
7. x ist niedriger als y
8. x ist links von y
9. x ist Bruder von y

10. x ist Geschwister von y
11. x steht senkrecht auf y
12. x ist parallel zu y
13. x schneidet y (Alltag und Geometrie)
14. x ist spiegelbildlich zu y

2) Zeichnen Sie mit Pfeilen die Relation „Schwester von" unter den Geschwistern:

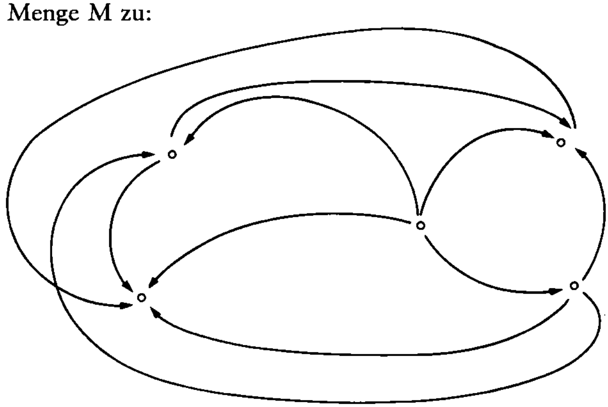
1. Alice, Brigitte, Claudia
2. Alice, Brigitte, Franz
3. Alice, Franz, Gustav
4. Franz, Gustav, Hans

3) Zählen Sie die Eigenschaften der folgenden drei Relationen auf und stellen Sie sie in Pfeildiagrammen dar:

1. Tochter
2. Enkel
3. Der Hund beißt den Briefträger

4) 1. Zeichnen Sie das Pfeildiagramm einer RST-Relation

2. Die Menge M sei: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dazu ist die Relation Gab gegeben, die bedeutet: größer als. Sie ist in Pfeilform dargestellt, so daß ein Pfeil von a nach b führt, wenn a größer als b ist. Ordnen Sie den einzelnen Punkten die entsprechenden Elemente der Menge M zu:



5) „Zuvor müssen wir uns aber über den Begriff *Relation* noch besser verständigen, weil sein Geltungsbereich von vielen Logistikern über Gebühr und ohne hinreichenden inneren Grund eingeschränkt wird. ... Relation ... deckt sich im Grunde mit dem stoischen augustinischen Ausdruck der Nachbarschaft. ... Es ist der weiteste Begriff, den wir dem Wort Relation zu Grunde legen". (E. W. Platzeck, Von der Analogie zum Syllogismus (Paderborn 1954) 34).

1. Analysieren Sie die Relation Nachbarschaft.
2. Handelt es sich bei „Nachbarschaft" um einen weiten Begriff?

6) „a) Wenn zwei Dinge einem Dritten gleich sind, dann sind sie es auch unter sich. b) Wenn zwei Dinge einem Dritten nicht gleich sind, dann sind sie auch unter sich nicht gleich". (R. Descartes, Règles pour la direction de l'esprit. Regle XII).

1. Ist b) die Negation von a)?
2. Bestimmen Sie die Relationseigenschaften von a) und b)
3. Was wird von b) gegenüber a) verneint?
4. Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Behauptung b).

7) „Es ist klar, daß Formeln wie die folgende

$$\begin{array}{ll} & A > B \\ & B > C \\ \text{also} & A > C \end{array}$$

keinen wirklichen Syllogismus darstellen, denn der Syllogismus

B ist größer als C,
nun ist A größer als B,
also ist A größer als C

wäre unkorrekt und nur zufällig wahr aufgrund der Einsetzungen (en raison de la matière), da der Mittelterm im Ober- und Untersatz nicht derselbe ist („B" im einen Fall, „größer als B" im andern)." (J. Maritain, Eléments de Philosophie. II L'ordre des concepts. 1. Petite Logique (Logique formelle) (Paris ^{15}1946) 297).

1. Liegt ein Syllogismus vor?
2. Stimmen Sie der Behauptung vom unterschiedlichen Mittelterm zu?

3. Welche Einsetzungen sieht der Autor für A, B, C vor?
4. Wie kommt Maritain auf den Gedanken, das Beispiel sei nur zufällig wahr und von den Einsetzungen abhängig?

8) „... in der Alltagssprache, ist der praktische Gebrauch der Relation ‚ist größer als' anstelle der Kopula nur legitim, weil ein derartiger Pseudo-Syllogismus (...) die folgenden Syllogismen impliziert oder voraussetzt, die wirkliche Syllogismen sind und nach denen leicht zu schließen ist:

1. Alles größer als größer als C ist größer als C.
   Nun ist B größer als C,
   also alles größer als B ist größer als C.
2. Alles größer als B ist größer als C.
   Nun ist A größer als B,
   Also ist A größer als C.

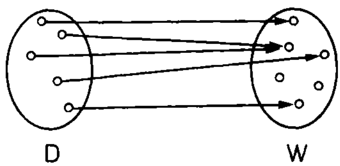
Das sind zwei völlig einwandfreie Syllogismen, wobei der 1. ein indirekter Syllogismus ist. Es ist immer möglich, einen indirekten Syllogismus in einen direkten umzuwandeln." (Maritain, ebd. 198).

1. Was ist von der Formulierung der jeweils ersten Prämisse zu halten?
2. Sind die Syllogismen einwandfrei?
3. Was will der Autor formal und inhaltlich sagen?
4. In welchem Verhältnis steht das Beispiel 8) zu 7)?

5.8 Der Funktionsbegriff

Wir sind jetzt in der Lage, einen sehr wichtigen Begriff exakt fassen zu können, nämlich den Begriff der Funktion. Häufig wird Funktion als synonym mit „Aufgabe", „Pflicht" usw. gebraucht, etwa im Zusammenhang „Die Funktion des Richters ist die Rechtssprechung". Die Mathematik hat für ihren Gebrauch genau definiert, was unter Funktion verstanden werden soll. Es ist ein Begriff von hohem Abstraktionsgrad und deshalb häufig anwendbar außerhalb der Mathematik.

Funktion ist eine bestimmte Relation. Zur Erläuterung gehen wir von zwei Mengen aus, dem Definitionsbereich (D) und dem Wertebereich (W). Eine Funktion liegt genau dann vor, wenn jedes Element aus dem Definitionsbereich D die Relation R zu höchstens einem Element der Menge W hat. Was das bedeutet, läßt sich aus der Zeichnung ablesen:



Eine genauere Definition lautet so:

1. $a \in D$
   $b \in W$
2. Zu jedem Element $a \in D$ gibt es genau ein Paar (a, b).

In der Pfeildarstellung zeigt sich eine Funktion daran, daß von jedem Element von D genau ein Pfeil ausgeht. Man nennt die Funktion nacheindeutige Relation.

Beispiele von Funktionen:

Mathematik:	Quadratwurzel sein von
Alltag:	Zum Vater haben

Übung 5.8

1) Besteht eine Funktion zwischen den Studenten, die um 9 Uhr morgens die Vorlesung besuchen und ihrer Schuhgröße?
2) Erklären sie den Satz von Wittgenstein: „Die Aussagenlogik ist eine Funktion der Wahrheit".

5.9 Verknüpfung von Relationen

Relationen können miteinander verkettet werden. Anhand der zwei wichtigsten Verknüpfungen aus dem Alltag, nämlich den

Relationspotenzen und den Relationsprodukten, wollen wir sehen, was darunter zu verstehen ist.

5.9.1 Relationspotenz

Eine Relation, die aus zwei gleichen Relationen besteht, nennen wir Relationspotenz. Solche Relationspotenzen sind etwa „Lehrer des Lehrers von“, „Nachbar des Nachbarn von“ usw. Wir benutzen die Symbolik aus der Arithmetik und schreiben „L^2“ oder „N^2“. Entsprechend müßte eine einfache Relation, etwa „Vater von“ als „V^1“ gedacht werden, wobei die Einerpotenz nach dem Vorbild der Mathematik nicht geschrieben wird.

Die Analogie läßt sich ins Gebiet der negativen Exponenten fortsetzen. Mit „R^{-1}“ bezeichnen wir die Konverse oder Inverse von „R“, d. h. diejenige Relation, die in allen R-Paaren gilt, aber in umgekehrter Reihenfolge der Glieder. Gilt „Rab“, so auch „R^{-1}ba“, und umgekehrt. Dem Übergang zur inversen Relation entspricht im Pfeilbild die Umkehrung aller Pfeilrichtungen.

Beispiele zu Relationspotenzen:

> Großvater, Freund des Freundes, Schwester der Schwester usw.
> Die Konverse ist uns aus der Mathematik bekannt: Wenn $7 > 4$, dann gilt auch $4 < 7$.

Die Relation Elter ist die Konverse der Relation Kind und umgekehrt. Die Konverse der Relation Enkel ist Großvater (-mutter) und umgekehrt. Die Konverse der Relation Quadrat ist die Quadratwurzel.
Seit dem Mittelalter wird in der theologischen Literatur die Relation Vaterschaft und Sohnschaft diskutiert. „Vaterschaft“ ist ein sogenannter Platonismus, eine platonische Ausdrucksweise für „a ist Vater von b“. Diese Relation können wir analysieren, sie ist

- irreflexiv
- asymmetrisch
- intransitiv

Es fällt auf, daß Vater und Sohn die gleichen Relationseigenschaften besitzen. Aus der Pfeildarstellung läßt sich die eine Relation als Konverse zur andern erkennen.

Übung 5.9.1

Der Schluß

B ist größer als C
A ist größer als B
also ist A größer als C

hat im Ober- und Untersatz nicht die gleichen Terme, nämlich „B" im einen, „größer als B" im andern Fall (Vgl. J. Maritain, 297. wörtlich: Beispiel 8), Übung 5.7).

1. In welchen Kategorien analysiert der Autor diesen Schluß?
2. Warum ist eine solche Analyse wertlos?

5.9.2 Relationsprodukt

Unter einem Relationsprodukt (oder Verkettung) zweier Relationen R und S, bezeichnet mit R/S, versteht man diejenige Relation, die dann und nur dann zwischen x und y besteht, wenn es ein z gibt derart, daß x zu z die Relation R und z zu y die Relation S hat.

(R/S) ab heißt: „a ist ein R von einem S von b".

(R/S) xy ist definiert:

$$(\exists z)\ (Rxz \wedge Szy)$$

Auf Relationsprodukte treffen wir im Alltag häufig. Beispiele dafür sind „ein Sohn von einem Bruder", „größer als die Hälfte von", „der Mieter eines Hauses von" usw. Auf ein solches Beispiel soll näher eingegangen werden:

„Gatte einer Tochter von".

Es gibt eine Relation G/T, wenn es ein z gibt derart, daß x der Gatte von z und z die Tochter von y ist. Wählen wir für x und y Konstanten:

j: Josef
a: Anna

Dann lautet der Ausdruck:

(G/T) ja = Josef ist der Gatte einer Tochter von Anna

Die Umgangssprache liebt es, für komplizierte und sich häufig wiederholende Ereignisse einfache Namen zu wählen. Statt „Gatte einer Tochter von“ sagt man „Schwiegersohn“. Deshalb lesen wir üblicherweise:

(G/T) ja = Josef ist der Schwiegersohn von Anna

Im allgemeinen ist das Relationsprodukt nicht kommutativ, es gilt also meistens: $R/S \neq S/R$. Wenn a ein Freund eines Lehrers von b ist, dann ist b eher selten ein Lehrer eines Freundes von a.

Übung 5.9.2

1. Alle Kinder meines Vaters sind meine Geschwister.
2. Alle Söhne und Töchter von Mathias sind Kinder meines Vaters.
3. Mathias ist mein Vater.
4. Also sind die Töchter von Mathias meine Schwestern.
   1. Führen Sie das benutzte Vokabular an.
   2. Zeigen Sie die Gültigkeit des Schlusses.
   3. Was fällt Ihnen am Schluß auf?

5.10 Deduktion einfacher Relationen

Schlüsse mit Relationen enthalten beinahe regelmäßig enthymematische Prämissen. Als Enthymeme, das heißt nichtausgesprochene Prämissen, sind nur Behauptungen zulässig, mit denen man allgemein einverstanden ist, also etwa „wenn etwas schwerer ist als ein anderer Gegenstand, dann sind die beiden nicht gleich schwer“, „Wasser ist naß“, „Blumen sind Pflanzen“ usw.

Beispiel

1. Monika ist jünger als Judith
2. Stephan ist älter als Monika
3. Also ist Monika jünger als Stephan

1. Jmj	
2. Asm	/∴ Jms
3. $(\forall x)\ (\forall y)\ (Axy \leftrightarrow Jyx)$	Zusatzprämisse
4. $\quad (\forall y)\ (Asy \leftrightarrow Jys)$	3, $-\forall$
5. $\qquad Asm \leftrightarrow Jms$	4, $-\forall$
6. $(Asm \rightarrow Jms) \wedge (Jms \rightarrow Asm)$	5, Äquiv.
7. $Asm \rightarrow Jms$	6a, Simpl.
8. Jms	2, 7, MP

Ohne die Prämisse 3. ist die Deduktion nicht ausführbar. Es handelt sich dabei um eine von niemand angezweifelte Prämisse: Wenn der erste älter ist als der zweite, dann ist der zweite jünger als der erste. Selbstverständlich muß eine derartige Prämisse nicht ausgelöst werden, weil es sich nicht um eine konditionale Prämisse handelt. Somit verlangt eine korrekte Deduktion nicht nur eine intuitive Treffsicherheit in der Wahl der Regeln, sondern auch noch den sichern Blick für das Auffinden der verschwiegenen Prämissen.

Übung 5.10

1) 1. Albert verdient gleich viel wie Bernhard und Bernhard gleich viel wie Cäsar.
   2. Also verdient Albert gleich viel wie Cäsar.

2) 1. Alle Rolls Royce sind teurer als irgend ein Auto.
   2. Einige Citroëns sind teurer als jeder Volkswagen.
   3. Also sind alle Rolls Royce teurer als jeder Volkswagen.