# 4. Der elementare Prädikatenkalkül

Die Beziehung zwischen Aussagen- und Prädikatenkalkül läßt sich mit einem Netz vergleichen. Die Aussagenlogik ist grobmaschig, es bleiben nur ganze Aussagen darin hängen. Die Prädikatenlogik vermag Prädikate und andere Satzteile zu erfassen. Der Vergleich trifft ferner auch in dieser bedeutsamen Hinsicht noch zu, daß mit dem kleinen Netz alle großen Fische – die des Aussagenkalküls – gefangen werden können, aber nicht umgekehrt. Im Alltag haben wir es manchmal auf kleine Fische abgesehen. Die bisher behandelte Aussagenlogik ist eine derart armselige Sprache, daß sie vor einfachsten Argumentationen eines Kleinkindes kapitulieren muß. Wenn es sagt: „Mama ist lieb und gut", dann möchte es zwei Eigenschaften vom gleichen Individuum ausdrükken. Die Formalisierung ‚$L \wedge G$' zeigt nicht an, ob hier von einem oder von zwei Individuen gesprochen wird. Um den einfachen Sachverhalt logisch darzustellen, haben wir die Sprache auf Satzteile auszuweiten.

## 4.0 Aufbau von Prädikataussagen

Der Prädikatenkalkül übernimmt die gesamte Aussagenlogik von der Symbolik bis zu deren Interpretation. Die Hilfsmittel der Aussagenlogik bestehen aus fünf logischen Konstanten ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) und einer unbeschränkten Anzahl von Buchstaben als Platzhalter für Aussagen (für Variable p, q, r ..., für Konstante A, B, C ...). Um nur schon die Syllogismen zu überprüfen, müssen die Aussagen im aristotelischen Sinn auf eine verfeinerte Analyse vorbereitet werden. Wir haben es deshalb mit Aussagen von der folgenden Art zu tun:

Der Mensch ist vernünftig
Der Bahnhof ist alt
Veilchen sind blau usw.

Es scheint sich da um Aussagen zu handeln, die sich von den in der

Aussagenlogik behandelten gar nicht unterscheiden. Das ist auch richtig. Nur sind wir hier an einem anderen Aspekt interessiert. Wir betrachten sie nicht bloß als wahr oder falsch in ihrer Gesamtheit, vielmehr nach einer inhaltlichen Beziehung. Dabei fällt auf, daß von den Menschen, dem Bahnhof und den Veilchen etwas ausgesagt wird. Die Dinge, von denen etwas ausgesagt wird, sind Individuen, und das, was ausgesagt wird, sind Eigenschaften. Eigenschaften nennen wir Prädikate. Ob nun von einem Individuum etwas mit Hilfe eines Adjektivs oder einer anderen Wortkategorie ausgesagt wird, das ist belanglos. Deshalb sind für uns die folgenden Satzarten identisch:

Brigitte ist eine Schwatzbase
Brigitte ist schwatzhaft
Brigitte schwatzt ununterbrochen usw.

## 4.1 Individuen- und Prädikatausdrücke

In der Prädikatenlogik stellen wir jedes Individuum mit einem Buchstaben dar, ebenfalls jede Eigenschaft, die von ihm ausgesagt wird. Überdies muß unmittelbar ersichtlich sein, ob es sich um ein Individuum oder um ein Prädikat handelt. Entgegen der Konvention in der deutschen Sprache wählen wir für die Bezeichnung von Individuen kleine und für Prädikate große Buchstaben.

Also:

| | | |
|---|---|---|
| Individuen | s | Sonne |
| | m | Mond |
| | v | Venus |
| | j | Jupiter |
| Prädikate | K | kugelförmig |
| | L | leuchtend |
| | D | durchsichtig |
| | G | gummig |

Mit diesem Vokabular lassen sich Sätze formen von der Art:

Ks Die Sonne ist kugelförmig

| | |
|---|---|
| Lv | Die Venus leuchtet |
| Dm | Der Mond ist durchsichtig |

Diese verfeinerte Sprache erlaubt bereits, Beziehungen darzustellen, die wir bisher übergehen mußten.

Beispiel:

(1) Albert singt oder Berta ißt Kuchen
(2) Albert singt oder ißt Kuchen

Aussagenlogik: (1′) $A \vee B$
(2′) $A \vee K$

Die Formalisierung (1′) beschränkt sich auf eine Disjunktion zweier Aussagen. Dabei bleibt unausgesprochen, ob eine inhaltliche Verknüpfung vorliegt. Bei (2′) ist die Beziehung von einer Art, die nicht mehr übergangen werden darf. Die Formalisierung (1′) ist zufriedenstellend, hingegen (2′) keineswegs. Die Prädikatenlogik erlaubt uns folgende Verfeinerung:

Prädikatenlogik: (1″) $Sa \vee Kb$
(2″) $Sa \vee Ka$

(1″) ist zwar gegenüber (1′) unnötig kompliziert, hingegen sagt (2″) eine Beziehung aus, die aus (2′) nicht zu entnehmen ist.

Die Individuen können auch durch Variable x, y, z ... ersetzt werden. Dann bekommen wir Aussageformen von der Art.

| | | |
|---|---|---|
| (3′) | $Sx \vee Kx$ | x singt oder ißt Kuchen |
| (4′) | $Sx \vee Ky$ | x singt oder y ißt Kuchen |

In der Alltagssprache reden wir nicht von „x", sondern von „jemand". Deshalb dürfen (3′) und (4′) so übersetzt werden:

(3) jemand singt oder ißt Kuchen
(4) jemand singt oder jemand (anders) ißt Kuchen

*Übung 4.1*

Formalisieren Sie:

1. Der Ofen brennt.

2. Der Ofen brennt nicht.
3. Der Ofen brennt und Alfred friert nicht.
4. Der Ofen brennt und ich friere.
5. Wenn der Ofen brennt, dann frierst du nicht.
6. Francesco ist nicht Italiener, oder er ist musikalisch.
7. Nur wenn es Dohlenfüße sind, sind sie rot oder gelb.
8. Genau dann, wenn die Figur rechtwinklig und gleichseitig ist, ist sie quadratisch.

## 4.2 Quantoren

Wir sind jetzt in der Lage, Sätze mit konkreten Subjekten zu übersetzen. „Dieser Tisch ist rund“ wird mit „Rt“ wiedergegeben. Doch hat schon Aristoteles festgehalten, daß wir, um von allgemeinen Subjekten reden zu können, seien sie universal oder partikulär, Quantoren einzuführen haben. Es geht dabei um die aus dem aristotelischen Syllogismus bekannten All- und Existenzquantoren. Bisweilen heißen sie auch Operatoren.

Für das allgemeine universale Subjekt „Alle Dinge sind ...“ führen wir die Abkürzung ein: ‚∀‘. Dann wären wir geneigt, „alles ist rund“ so zu übersetzen: ‚(∀) r‘. Diese Übersetzung ist jedoch unzulässig, denn „rund“ ist ein Prädikat und Prädikate können nur von Individuen ausgesagt werden. Ein Quantor ist durchaus kein Individuum. Aber von was wird denn „rund“ ausgesagt? Von „allem“. „Alles“ ist eine Abkürzung für „alle Dinge“. Mit der Behauptung „Alles ist rund“ meinen wir „Alle Dinge sind rund“. Die Dinge nennen wir ‚x‘. „rund“ ist also ein Prädikat, das von ‚x‘, in unserem Fall von allen ‚x‘ ausgesagt wird.

(Alle Dinge) sind rund
$(\forall x)Rx$

Wir lesen die Formel so: „Für alle x, die Dinge sind, gilt: diese x sind rund.“ Der Quantor kann nie allein stehen. Wir haben immer $(\forall x)$, $(\forall y)$, $(\forall z)$ usw. In Worten: Für alle Dinge, die x sind, gilt .... für alle Dinge, die y sind, gilt ... usw. Entsprechend formalisieren wir:

| | |
|---|---|
| $(\forall x)Gx$ | alles ist gut |
| $(\forall x)Vx$ | alles ist verloren |
| $(\forall x)Fx$ | alles fließt |

Je nachdem, ob die Negation vor oder hinter den Quantor gesetzt wird, verschiebt sich der Sinn.

(1) $\neg(\forall x)Bx$
Nicht alles ist brauchbar, d.h. einiges ist es nicht.

(2) $(\forall x)\neg Bx$
Alles ist nicht brauchbar, d.h. nichts ist brauchbar.

Der Formulierung (2) ist eine gewisse Mehrdeutigkeit nicht abzusprechen, da die Negation auf „alles" oder auf das Prädikat verweisen kann. Die Verbindung mit dem Prädikat ist zwar häufiger; dennoch gibt es kein radikales Verbot der Umgangssprache, die Negation auf den Quantor zu beziehen. Dann würde die Aussage so zu deuten sein: „Einiges ist doch brauchbar". Um diese Fehldeutung zu vermeiden, genügt es, die Formalisierung in aller Ausführlichkeit in die Umgangssprache zu übertragen. In Worten: „Für alle Dinge, die x sind gilt, sie sind nicht brauchbar". Das ist gleichbedeutend mit „Kein Ding ist brauchbar" oder „alles ist unbrauchbar".

Ein zweiter Quantor wird für das allgemeine partikuläre Subjekt eingeführt „einige Dinge sind ..." Als Abkürzung wählen wir ‚∃'. Manchmal reden wir dabei etwas unbestimmt von „etwas". Analog zum Allquantor formalisieren wir:

(Etwas) ist rund
$(\exists x)Rx$

Die Formel wird so gelesen: „Es gibt ein x, das rund ist". Unter „etwas" oder „es gibt einige" verstehen wir „mindestens ein Ding"; es können auch mehrere sein, jedoch nicht alle.

| | |
|---|---|
| $(\exists x)Gx$ | etwas ist gut |
| $(\exists x)Vx$ | etwas ist verloren usw. |

Dieselbe Vorsicht wie beim Allquantor ist auch hier mit den Negationen geboten.

$\neg\,(\exists x)Fx$
Es gibt nicht etwas, das fließt = Nichts fließt.
$(\exists x)\neg\,Fx$
Es gibt etwas, das nicht fließt = Einiges fließt nicht.

Mit diesen beiden Quantoren können wir alle Quantitäten und Qualitäten der aristotelischen Syllogismen ausdrücken:

| | | |
|---|---|---|
| $(\forall x)\,Gx$ | Alle Dinge sind gut | Alles ist gut |
| $(\exists x)\,Gx$ | Einige Dinge sind gut | Einiges ist gut |
| $(\forall x)\neg\,Gx$ | Kein Ding ist gut | Nichts ist gut |
| $(\exists)\neg\,Gx$ | Einige Dinge sind nicht gut | Einiges ist nicht gut |

Die gegenseitigen Beziehungen lassen sich, wie bei Aristoteles, im logischen Quadrat darstellen:

| | | |
|---|---|---|
| $(\forall x)Px$ | konträr | $\neg\,(\exists x)Px$ |
| | kontradiktorisch | |
| | kontradiktorisch | |
| $(\exists x)Px$ | subkonträr | $\neg\,(\forall x)Px$ |

Es mag aufgefallen sein, daß sich jede Aussage auf zweifache Weise darstellen läßt, nämlich mit einem All- und mit einem Existenzquantor.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Alles ist gut | $(\forall x)Gx$ | und | $\neg\,(\exists x)\neg\,Gx$ |
| Etwas ist gut | $(\exists x)Gx$ | und | $\neg\,(\forall x)\neg\,Gx$ |
| Nichts ist gut | $(\forall x)\neg\,Gx$ | und | $\neg\,(\exists x)Gx$ |
| Einiges ist nicht gut | $(\exists x)\neg\,Gx$ | und | $\neg\,(\forall x)Gx$ |

Diese Beziehungen mache man sich inhaltlich klar. Sie sollen nicht auswendig gelernt werden, doch müssen sie bei aufmerksamem Nachdenken korrekt formalisiert werden können.

*Übung 4.2*

Formalisieren Sie und bezeichnen Sie kontradiktorische und konträre Gegensätze:

1. Alles ist teuer
2. Nichts ist teuer
3. Nicht alles ist teuer
4. Etwas ist teuer

Formalisieren Sie und geben Sie an, welche Aussagen äquivalent sind:

5. Einiges ist nicht käuflich
6. Alles ist nicht käuflich
7. Es gibt nichts, das nicht käuflich ist
8. Alles ist käuflich
9. Nicht alles ist käuflich
10. Nichts ist käuflich

Im allgemeinen reden wir nicht von allen Dingen, sondern von einigen Millionären, von den meisten Unfällen oder von allen Stechmücken. Wir treffen eine Auswahl aus der Gesamtmenge aller Dinge. Wenn behauptet wird „Alle Smaragde sind grün", dann heißt das, daß aus der Grundmenge aller Dinge die Smaragde herausgeholt werden und ihre Farbe als grün bezeichnet wird. Es ist empfehlenswert für den Anfänger, diesen Sachverhalt in der Umgangssprache so vorzubereiten, daß die Formalisierung erleichtert wird. Also: Für alle Dinge gilt, wenn sie Smaragde sind, dann sind sie grün. Diese Formulierung sei an einigen Beispielen mit All- und Existenzquantor verdeutlicht.

Allquantor

Alle Smaragde sind grün

Für alle Dinge gilt, wenn sie Smaragde sind, dann sind sie grün

$(\forall x)$ (x sind Smaragde $\rightarrow$ x sind grün)

$(\forall x)\ (Sx \rightarrow Gx)$

Alle Kuchen sind frisch

Für alle Dinge gilt, wenn sie Kuchen sind, dann sind sie frisch

$(\forall x)$ (x sind Kuchen $\rightarrow$ x sind frisch)
$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Fx)$

Alles Wasser ist verschmutzt
Für alle Dinge gilt, wenn sie Wasser sind, dann sind sie verschmutzt
$(\forall x)$ (x ist Wasser $\rightarrow$ x ist verschmutzt)
$(\forall x)\ (Wx \rightarrow Vx)$

Existenzquantor

Einige Smaragde sind grün
Für einige Dinge gilt, daß sie Smaragde sind und grün
$(\exists x)$ (x sind Smaragde $\wedge$ x sind grün)
$(\exists x)\ (Sx \wedge Gx)$

Einige Kuchen sind frisch
Für einige Dinge gilt, daß sie Kuchen sind und frisch
$(\exists x)$ (x sind Kuchen $\wedge$ x sind frisch)
$(\exists x)\ (Kx \wedge Fx)$

Einiges Wasser ist verschmutzt
Für einige Dinge gilt, daß sie Wasser sind und verschmutzt
$(\exists x)$ (x ist Wasser $\wedge$ x ist verschmutzt)
$(\exists x)\ (Wx \wedge Vx)$

Man beachte, daß die Aussagen „Alle A sind B“ und „Einige A sind B“ neben einem deutlich ausgedrückten Quantorenunterschied noch einen Strukturunterschied verbergen. Er wird formal verdeutlicht, indem die Allaussage mit „$\rightarrow$“, die Existenzaussagen mit „$\wedge$“ formalisiert werden. Dieser Strukturunterschied kommt nur im ausführlicheren Sprachgebrauch zum Vorschein: „Für alle Dinge, wenn sie A sind, dann sind sie B“, nicht aber bei „Alle A sind B“.

Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich die kategorischen Aussagen von Aristoteles so wiedergeben:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | Alle Schwäne sind weiß | $(\forall x)\ (Sx \rightarrow Wx)$ |
| 2) | Einige Schwäne sind weiß | $(\exists x)\ (Sx \wedge Wx)$ |
| 3) | Kein Schwan ist weiß | $(\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg Wx)$ |
| 4) | Einige Schwäne sind nicht weiß | $(\exists x)\ (Sx \wedge \neg Wx)$ |

Mit der Formulierung von 1) und 2) sind wir bereits vertraut. Bei

3) müssen wir uns den Inhalt einsichtig machen. Wörtlich sagt die Aussage: Für alle x gilt, wenn sie Schwäne sind, dann sind sie nicht weiß. Ähnlich bei 4): Für einige x gilt, daß sie Schwäne sind und nicht weiß.

*Übung 4.2*

Formalisieren Sie:

11. Alle Straßen sind krumm
12. Nicht alle Straßen sind krumm
13. Einige Straßen sind krumm
14. Viele Straßen sind nicht krumm
15. Keine Straße ist krumm
16. Einige Tomaten sind grün
17. Keine Münze ist gefälscht
18. Einige Erdbeeren sind nicht reif

Jede kategorische Aussage im Sinne von Aristoteles läßt sich auf zweifache Art ausdrücken, mit Existenz- oder Allquantor. Statt zu sagen „Alle Straßen sind Parkplätze" kann ich gleichwertig behaupten: „Es gibt keine Straße, die nicht ein Parkplatz ist". Gleichbedeutend mit „Einige Straßen sind nicht Parkplätze" ist „Nicht alle Straßen sind Parkplätze".

Die verfügbaren Formalisierungen seien zusammengestellt anhand der folgenden Aussagen:

Alle Straßen sind Parkplätze
Keine Straße ist ein Parkplatz
Einige Straßen sind Parkplätze
Einige Straßen sind nicht Parkplätze

| klassisch | Mengenlehre |
|---|---|
| S a P | $sp' = 0$ |
| S e P | $sp = 0$ |
| S i P | $sp \neq 0$ |
| S o P | $sp' \neq 0$ |

Prädikatenlogik

$$\begin{array}{lcl}
(\forall x)\ (Sx \rightarrow Px) & \leftrightarrow & \neg\ (\exists x)\ (Sx \wedge \neg\ Px) \\
(\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg\ Px) & \leftrightarrow & \neg\ (\exists x)\ (Sx \wedge Px) \\
(\exists x)\ (Sx \wedge Px) & \leftrightarrow & \neg\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg\ Px) \\
(\exists x)\ (Sx \wedge \neg\ Px) & \leftrightarrow & \neg\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow Px)
\end{array}$$

Wir müssen beide Schreibweisen der Prädikatenlogik kennen. Der Grund dürfte einleuchtend sein. Bei einer Deduktion müssen nämlich zuerst alle Negationen vor einem Quantor weggeschafft werden. Folglich muß man in der Lage sein, jede Formel der zweiten Gruppe in eine der ersten umzuwandeln. Das ist sehr einfach.

Die Negation vor dem Quantor wird hinter den Quantor gesetzt bei gleichzeitigem Quantorenaustausch. So wird $\neg\ (\forall x)$ zu $(\exists x)\ \neg$ und $\neg\ (\exists x)$ zu $(\forall x)\ \neg$. Diese Umformung nennen wir Quantorenaustausch (QA). Die Negation hinter dem Quantor wird nach den Regeln von De Morgan weiter verarbeitet.

Beispiele:

$$\begin{array}{lllll}
\neg\ (\exists x)\ (Ax \wedge \neg\ Bx) & & & \neg\ (\forall x)\ (Ax \rightarrow \neg\ Bx) & \\
\quad (\forall x)\ \neg\ (Ax \wedge \neg\ Bx) & \text{QA} & & \quad (\exists x)\ \neg\ (Ax \rightarrow \neg\ Bx) & \text{QA} \\
\quad (\forall x)\ (\overline{Ax \wedge \overline{Bx}}) & & & \quad (\exists x)\ (\overline{Ax \rightarrow \overline{Bx}}) & \\
\quad (\forall x)\ (\neg\ Ax \vee Bx) & & & \quad (\exists x)\ (\overline{\overline{Ax} \vee \overline{Bx}}) & \\
\quad (\forall x)\ (Ax \rightarrow Bx) & & & \quad (\exists x)\ (Ax \wedge Bx) &
\end{array}$$

In der Praxis führt das zu keinen nennenswerten Schwierigkeiten. Als Faustregel für die Negationen merke man sich: Die alte Form enthält zusammen mit der umgewandelten genau zwei Negationen.

*Übung 4.2*

19. Schreiben Sie die Beispiele 11–18 mit dem andern Quantor.
20. Zeichnen Sie alle Formeln an, die korrekt das Sprichwort ausdrücken: „Die Würfel sind gefallen“

| | | |
|---|---|---|
| a) $W$ | e) $Wg$ | i) $(\forall x)\ (Wx \rightarrow Gx)$ |
| b) $G$ | f) $Gw$ | j) $(\forall x)\ (Gx \rightarrow Wx)$ |
| c) $\neg G$ | g) $(\forall x)\ Wx$ | k) $(\exists x)\ (Wx \wedge Gx)$ |
| d) $W \wedge G$ | h) $(\exists x)\ Gx$ | l) $(\exists x)\ (Gx \wedge Wx)$ |

21. (i) „Es gibt kein x, das Rabe ist.“ $\neg (\exists x) Rx$
(ii) „Es gibt ein x, das nicht Rabe ist.“ $(\exists x) \neg Rx$

Auch diese beiden Negationen fallen zusammen. Sie behaupten, daß es nicht gäbe, was es – als deiktisch Konstituiertes – doch gibt. Rehfus (W. D.), Didaktik der Philosophie. Grundlage und Praxis (Düsseldorf 1980) 132.

1. Zeigen Sie formal, wie die beiden Sätze zusammenfallen.
2. Was wird mit ihnen genau behauptet?

## 4.3 Übersetzungen aus der Umgangssprache

Die Alltagssprache hat die Eigenart, einige für die Logik bedeutsame Unklarheiten zu überdecken. Wir haben früher bereits solche Fälle getroffen, etwa „Kinder und Rentner bezahlen halbe Taxe“. Bevor die Formalisierung einsetzt, muß erfaßt werden, daß der Sprecher hier nicht ein „und“, sondern ein „oder“ meint. Wird diese vorlogische, semantische Analyse fehlerhaft ausgeführt, dann reicht selbst die raffinierteste Formalisierung nicht aus, den Fehler wieder auszugleichen, weil die Logik nur wahrheitskonservierend, nicht aber wahrheitsschöpfend ist.

### 4.3.1 Gattungsnamen

Unter dem Quantor „alle“ verstehen wir wirklich alle Individuen aus der vorgängig bezeichneten Grundmenge. Sind nicht alle gemeint, so ist der Existenzquantor zu benutzen. „Nicht alle“ umfaßt deshalb alles zwischen eins bis beinahe alle, also „einige“, „manche“, „viele“, „die meisten“ usw. Genau wie bei den Prämissen eines aristotelischen Syllogismus Klarheit über die Modi bestehen muß, so muß eindeutig entscheidbar sein, welchen Quantor wir für die Formalisierung zu wählen haben. Vorsicht ist bei den Allaussagen am Platz, die nicht ohne weiteres als solche zu erkennen sind.

Beispiele:

(1) Die Eidechse ist ein Schuppenkriechtier
(2) Die Eidechse ist grün

Die Aussage (1) faßt „Eidechse" als Gattungsnamen auf und ist deshalb so zu übersetzen: „Für jedes x gilt, wenn x eine Eidechse ist, dann ist es ein Schuppenkriechtier". Formal:

(1′) $(\forall x)\ (Ex \rightarrow Sx)$

Dagegen scheint sich offensichtlich die Aussage (2) auf eine bestimmte Redesituation zu beziehen. Es ist wohl kaum die falsche Behauptung beabsichtig „Alle Eidechsen sind grün". Vielmehr scheint von einem Einzelindividuum die Rede zu sein. Daher:

(2′) $(\exists x)\ (Ex \wedge Gx)$

Wenn es sich nur um ein einziges, bestimmtes Exemplar von Eidechsen handelt, dann dürfen wir ihm den konkreten Namen „a" geben. Dadurch entfällt der Quantor:

(2″) $Ea \wedge Ga$

### 4.3.2 Personen

„Alles" deutet auf eine Aussage über alle Dinge, hingegen „alle" ist eine Einschränkung und meint Menschen oder Personen. Deshalb werden wir, falls es vom Kontext her erforderlich ist, bei „alle" jeweils „Menschen" oder „Personen" ergänzen. Ebenso für „niemand", „nicht eine Person", bzw. „keine Person".

Beispiel:

Alle sind zurück
$(\forall x)\ (Px \rightarrow Zx)$

‚Px' bedeutet: die x, die Personen sind. Die Formel $(\forall x)\,Zx$ besagt eher „alles ist zurück", womit das Ausgeliehene oder sonst etwas gemeint ist.

### 4.3.3 Erweiterung durch mehrere Prädikate

Die aristotelische Logik schreibt einem Individuum nur eine einzige Eigenschaft zu. Eine Ausnahme bilden jene Fälle, wo zwei Eigenschaften durch eine Konjunktion verbunden sind. Dann lassen sich aber zwei Aussagen daraus herstellen. Sind die beiden Aussagen jedoch durch eine Disjunktion verknüpft, durch Implikation oder Äquivalenz, dann sind sie in der aristotelischen Logik nicht mehr zulässig. Diese Einschränkung ist unnatürlich. Da sich unsere Alltagssprache nicht daran hält, wird sie von der Prädikatenlogik nicht übernommen. Deshalb müssen wir uns auch mit der Formalisierung folgender Aussagen vertraut machen:

Einige Wälder sind Sauerstoff- und Ruhespender
$(\exists x)$ [x sind Wälder $\wedge$ (x sind Sauerstoff- $\wedge$ x sind Ruhespender)]
$(\exists x)\ [Wx \wedge (Sx \wedge Rx)]$

Alle Elefanten sind indischer oder afrikanischer Herkunft
$(\forall x)$ [x sind Elefanten $\rightarrow$ (x sind indisch $\vee$ x sind afrikanisch)]
$(\forall x)\ [Ex \rightarrow (Ix \vee Ax)]$

Einige Häuser sind sonnig, gut isoliert und teuer, oder billig und mehrstöckig
$(\exists x)$ [x sind Häuser $\wedge$ (x sind sonnig $\wedge$ x sind gut isoliert $\wedge$ x sind teuer) $\vee$ (x sind billig $\wedge$ x sind mehrstöckig)]
$(\exists x)\ [Hx \wedge (Sx \wedge Ix \wedge Tx) \vee (Bx \wedge Mx)]$

Jeder Bewerber, der Brillenträger oder farbenblind ist, braucht einen Sonderausweis
$(\forall x)$ (wenn x Bewerber ist $\rightarrow$ (x ist Brillenträger $\vee$ x ist farbenblind) $\rightarrow$ benötigt x einen Sonderausweis)
$(\forall x)\ ((Bx \rightarrow (Cx \vee Fx)) \rightarrow Sx)$

*Übung 4.3.3*

1) 1. Die Kuh ist schwarz.
2. Die Kuh ist ein Säugetier.
3. Die Tulpe ist eine Blume.
4. Die Tulpe ist gelb.
5. Alles fehlt.
6. Nichts ist unvergänglich.

2) 1. Jeder ist willkommen.
2. Keiner fehlt.

3. Einige sind Verräter.
4. Alle sind zufrieden.
5. Die meisten sind da.
6. Wenige sind Ehrenbürger.

3)

1. Die meisten Italiener sind ehrlich.
2. Schwarze Tulpen gibt es nicht.
3. Alle politischen Einwände sind nicht demagogisch.
4. Viele Verkehrssünder werden nicht bestraft.
5. Die meisten Übungen sind unterhaltsam, aber schwer.
6. Alle Personenwagen sind betriebsbereit.
7. Alle kontrollierten Personenwagen sind betriebsbereit.
8. Nur die kontrollierten Personenwagen sind betriebsbereit.
9. Betriebsbereite Personenwagen müssen kontrolliert sein.
10. Alle jungen sportlichen Schweizer sind militärdienstpflichtig.
11. Der Turner ist frisch, fromm, froh, frei.
12. Äpfel und Birnen sind nahrhaft.
13. Es gibt keine Raben, die nicht schwarz sind.
14. Nicht alle, die reden, haben etwas zu sagen.
15. Einige Medikamente sind nur gefährlich, wenn sie in Überdosis eingenommen werden.
16. Alles, was glänzt, ist nicht Gold.

4) Formalisieren Sie die folgenden Aussagen mit beiden Quantoren:

1. Einige Vögel können rückwärts fliegen.
2. Nur die Fische haben Kiemen.
3. Alle Papageien und Kolibri sind bunte Vögel.
4. Manches, was laut und modern ist, ist kein Theaterstück.
5. Kein Auto, das über 10 Jahre alt ist, wird repariert, wenn es ernsthaft beschädigt ist.
6. Es gibt keine elektrische Ladung, die nicht ein ganzzahliges Vielfaches elektrischer Elementarquanten wäre.

5) Formalisieren Sie und geben Sie an, welche Sätze äquivalent sind:

1. Einige Nachbarn sind hilfsbereit und beliebt.
2. Alle Nachbarn sind hilfsbereit und beliebt.
3. Einige hilfsbereite Nachbarn sind beliebt.
4. Nur hilfsbereite Nachbarn sind beliebt.
5. Alle hilfsbereiten Nachbarn und nur sie sind beliebt.
6. Kein Nachbar ist beliebt, wenn er nicht hilfsbereit ist.
7. Einige nichtbeliebte Nachbarn sind nicht hilfsbereit.
8. Kein hilfsbereiter Nachbar ist unbeliebt.
9. Jeder Nachbar ist beliebt, sofern er hilfsbereit ist.
10. Einige Nachbarn sind nur beliebt, wenn sie hilfsbereit sind.

Wer die Beispiele 1) bis 5) korrekt gelöst hat, darf die Aufgabe 6) übergehen.

6) Formalisieren Sie:

1. Nicht jede Geburtstagsparty ist ein Erfolg.
2. Der Hund ist ein Fleischfresser.
3. Alle Raben und Dohlen sind Vögel.
4. Alle Raben und Dohlen sind schwarze Vögel.
5. Die Vögel, die nicht schwarz sind, sind weder Raben noch Dohlen.
6. Der Hund ist braun.
7. Früchte und Gemüse sind vitaminreich.
8. Nicht jeder berühmte Schauspieler ist talentiert.
9. Kein Marsmensch ist Europäer.
10. Nur Polizisten und Feuerwehrleute sind beide unentbehrlich und einsatzbereit.
11. Nur die ETH-Architekten sind diplomierte Architekten.
12. Nicht alle Zeitungen sind lesenswert, aber jene, die es sind, liegen in der Bibliothek auf.
13. Der Bürger, der den Stimmzettel nicht einlegt, vernachlässigt seine Pflicht.
14. Keiner darf die Geleise überschreiten, ausgenommen Bahnangestellte und Ordnungshüter.

## 4.4 Quantorenregeln und Deduktion

Für die Deduktion in der Prädikatenlogik gilt folgendes:
- In den Prämissen müssen die Quantoren aufgelöst werden.
- Die verbleibenden Formeln werden mit den Regeln der Aussagenlogik bearbeitet.
- Bei der Konklusion müssen die Quantoren wieder eingesetzt werden.

Es gelten folglich bei der Deduktion in der Prädikatenlogik die gleichen Regeln wie im Aussagenkalkül. Neu hinzu kommen nur die Quantorenregeln. Da wir zwei Quantoren aufzulösen und zwei einzuführen haben, werden vier neue Regeln benötigt.

**4.4.1** Die ∀-Elimination (Universelle Einsetzung, Universelle Spezialisierung) ist eine Regel, die uns sagt: wenn alle x P sind, dann ist auch ein konkretes Individuum ‚a' ein P.

$$\frac{(\forall x)\,Px}{Pa} - \forall$$

Diese Regel ist in der Tradition unter dem Namen „Dictum de omni et nullo" bekannt.

**4.4.2** Die ∀-Einführung (Universelle Verallgemeinerung, Universelle Generalisierung) ist das umgekehrte Verfahren. Wenn wir von einem individuellen Kreis sagen, sein Umfang sei Durchmesser mal Pi, so dient dabei der Kreis als Repräsentant für alle Kreise. Deshalb darf die behauptete Eigenschaft auf alle Kreise ausgedehnt werden.

$$\frac{Pa}{(\forall x)\,Px} + \forall$$

**4.4.3** Die ∃-Elimination (Existenzielle Einsetzung, Existenzielle Spezialisierung) ist trivial. Der Existenzquantor behauptet, daß es wenigstens ein Individuum gibt, das bei der Einsetzung zu einer wahren Aussage führt. Die ∃-Elimination gibt diesem Individuum einen Namen.

$$\frac{(\exists x)\,Px}{Pa} - \exists$$

**4.4.4** Die ∃-Einführung (Existenzielle Verallgemeinerung, Existenzielle Generalisierung) ist ebenfalls trivial. Denn wenn es wenigstens eine einzige Einsetzungsinstanz gibt, so können wir auch verallgemeinernd darüber sprechen. Verallgemeinern heißt natürlich nicht die Behauptung aufstellen, es gebe mehrere.

$$\frac{Pa}{(\exists x)\,Px} + \exists$$

Einsatz der Quantorenregeln:

– Die ∀-Elimination ist immer durchführbar.

– Die ∀-Einführung darf nur vorgenommen werden, wenn die Deduktion aus einer oder mehreren Allaussagen gewonnen wurde. Das in 4.4.2 erwähnte Beispiel ist ein Sonderfall; es ist eine versteckte Allaussage.

– Die ∃-Elimination kennt eine Einschränkung. Werden innerhalb einer Deduktion mehrere ∃-Eliminationen ausgeführt, so ist für jede neue Prämisse eine andere Einsetzungskonstante zu wählen. Der Grund liegt darin, weil von einem Ding beispielsweise ausgesagt werden kann, es sei eine Kugel; sollte von einem Ding behauptet werden, es sei blau, dann dürfen wir nicht dem Trugschluß verfallen, es sei von einer blauen Kugel die Rede. Möglicherweise wird von einer rostigen Kugel und einer blauen Wappenscheibe gesprochen, also von zwei gänzlich verschiedenen Individuen.
– Die ∃-Einführung ist immer durchführbar.

– Negationen vor einem Quantor müssen immer entfernt werden, bevor eine ∀- oder ∃-Elimination ausgeführt wird.

Diese Regeln sollen an einigen Beispielen erprobt werden.

1) Alle Bäume sind Pflanzen
Alle Fichten sind Bäume
Also sind alle Fichten Pflanzen

$$
\begin{array}{lll}
1. & (\forall x)\ (Bx \rightarrow Px) & \\
2. & (\forall x)\ (Fx \rightarrow Bx) & \underline{/\therefore\ (\forall x)\ (Fx \rightarrow Px)} \\
3. & \quad Ba \rightarrow Pa & 1, -\forall \\
4. & \quad Fa \rightarrow Ba & 2, -\forall \\
5. & \quad Fa \rightarrow Pa & 3, 4, HS \\
6. & (\forall x)\ (Fx \rightarrow Px) & 5, +\forall
\end{array}
$$

In 3. und 4. wird die ∀-Elimination aus den beiden Prämissen durchgeführt. 5. ist ein Schluß mit aussagenlogischen Mitteln. Bei 6. ist die ∀-Einführung erlaubt, weil 5. aus 3. und 4. erschlossen wurde, die beide aus Allprämissen hervorgegangen sind.

2) Alle Wallonen sind Patrioten
Einige Belgier sind Wallonen
Also sind einige Belgier Patrioten

$$
\begin{array}{lll}
1. & (\forall x)\ (Wx \rightarrow Px) & \\
2. & (\exists x)\ (Bx \wedge Wx) & \underline{/\therefore\ (\exists x)\ (Bx \wedge Px)} \\
3. & \quad Wa \rightarrow Pa & 1, -\forall \\
4. & \quad Ba \wedge Wa & 2, -\exists \\
5. & \quad Ba & 4a, Simpl. \\
6. & \quad Wa & 4b, Simpl. \\
7. & \quad Pa & 6, 3, MP \\
8. & \quad Ba \wedge Pa & 5, 7, Konj. \\
9. & (\exists x)\ (Bx \wedge Px) & 8, +\exists
\end{array}
$$

Bei 9. wäre eine ∀-Einführung unerlaubt, weil der 4. Schritt aus einer ∃-Elimination gewonnen wurde.

3) Alle Menschen sind sterblich
Platon ist ein Mensch
Also ist Platon sterblich

$$
\begin{array}{lll}
1. & (\forall x)\ (Mx \rightarrow Sx) & \\
2. & \quad Mp & \underline{/\therefore\ Sp} \\
3. & \quad Mp \rightarrow Sp & 1, -\forall \\
4. & \quad Sp & 2, 3, MP
\end{array}
$$

Die 1. Prämisse gilt für alle menschlichen Individuen, also für Albert, Brigitte, Cäsar, Platon usw. Deshalb dürfen wir bei 3. nach ausgeführter ∀-Elimination jeden beliebigen Individuennamen einsetzen, unter ihnen auch ‚p'. Daraus ergibt sich dann: Platon ist sterblich.

4) Aus den Prämissen von 3) kann auch geschlossen werden: Also ist jemand sterblich, $(\exists x)\, Sx$ oder $(\exists x)\ (Mx \wedge Sx)$. Das ist die existenzielle Verallgemeinerung des Schlusses „Platon ist sterblich". Da die 2. Prämisse nur von einem einzigen Individuum spricht, darf in der Konklusion keine $\forall$-Einführung stattfinden. Freilich wäre sie zufällig beim vorliegenden Beispiel nicht falsch; es wäre nur die triviale Wiederholung der 1. Prämisse.

5) Kein Hund ist ein Elefant
Keine Mücke ist ein Hund
Also ist keine Mücke ein Elefant

1. $\neg\ (\exists x)\ (Hx \wedge Ex)$
2. $\neg\ (\exists x)\ (Mx \wedge Hx)$ $\quad \underline{/\ \neg\ (\exists x)\ (Mx \wedge Ex)}$

Wir wissen zwar, daß dieser Syllogismus falsch ist, denn schon Aristoteles stellte das Verbot auf, aus zwei negativen Prämissen zu schließen. Wir wollen sehen, wie sich das in der Deduktion bemerkbar macht.
Zuerst müssen die Prämissen umschrieben werden, um die Negationen vor den Quantoren wegzuschaffen.

3. $(\forall x)\ (Hx \rightarrow \neg Ex)$
4. $(\forall x)\ (Mx \rightarrow \neg Hx)$ $\quad \underline{/\ (\forall x)\ (Mx \rightarrow \neg Ex)}$
5. $\qquad Ha \rightarrow \neg Ea \quad 3, -\forall$
6. $\qquad Ma \rightarrow \neg Ha \quad 4, -\forall$

Weiter kommen wir nicht, denn aus 5. und 6. läßt sich nichts schließen.

6) Einige Schwäne sind weiß
Einige Tiere sind weiß
Also sind einige Tiere Schwäne

1. $(\exists x)\ (Sx \wedge Wx)$
2. $(\exists x)\ (Tx \wedge Wx)$ $\quad \underline{/\ (\exists x)\ (Tx \wedge Sx)}$
3. $\qquad Sa \wedge Wa \quad 1, -\exists$
4. $\qquad Ta \wedge Wa \quad 2, -\exists$ (falsch!)

Hier wurde die Regel der $\exists$-Elimination verletzt. Da bereits in 3.

eine ∃-Elimination ausgeführt wurde, darf beim zweiten Vorkommen nicht mehr die Konstante ‚a' verwendet werden. Die korrekte Ausführung ab 4. wäre so:

| | | |
|---|---|---|
| 4. | $Tb \wedge Wb$ | 3, $-\exists$ |
| 5. | $Sa$ | 3a, Simpl. |
| 6. | $Tb$ | 4a, Simpl. |
| 7. | $Tb \wedge Sa$ | 6, 5, Konj. |

Solange nicht feststeht, daß $a = b$ ist, dürfen wir keine ∃-Einführung vornehmen. Was uns die korrekte Anwendung der Regel lehrt, ist kaum überraschend: Die traditionelle Logik wußte auch hier, aus zwei individuellen Prämissen darf nicht geschlossen werden.

Die moderne Logik erlaubt, die aristotelischen Syllogismen als formal gültig darzustellen, allerdings einmal mehr mit der Einschränkung, daß die abgeschwächten Syllogismen nicht zugelassen werden. Woran liegt es, daß ein *Barbari* der 1. Figur ungültig sein soll?

Alle Italiener sind Europäer
Alle Napolitaner sind Italiener
Also sind einige Napolitaner Europäer

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\forall x)\ (Ix \rightarrow Ex)$ | |
| 2. | $(\forall x)\ (Nx \rightarrow Ix)$ | $\underline{/\ (\exists x)\ (Nx \wedge Ex)}$ |
| 3. | $Ia \rightarrow Ea$ | 1, $-\forall$ |
| 4. | $Na \rightarrow Ia$ | 2, $-\forall$ |
| 5. | $Na \rightarrow Ea$ | 3, 4, Hs |

Weiter gelangen wir nicht. Der Grund für das Versagen liegt in der Tatsache, daß $\dfrac{(\forall x)\,Px}{(\exists x)\,Px}$ nicht gültig ist. Das läßt sich an einem Beispiel verdeutlichen.

1. Alle grünen Schwäne sind im Basler-Zoo
2. Also gibt es grüne Schwäne im Basler-Zoo

$(\forall x)\ ((Sx \wedge Gx) \rightarrow Bx)$
$(\exists x)\ ((Sx \wedge Gx) \wedge Bx)$

Der 1. Satz ist zudem wahr. Wer nicht dieser Ansicht ist, mag den

Gegenbeweis antreten, indem er die grünen Schwäne zeigt, die nicht im Basler-Zoo sind. Da niemand auf diesen ausgefallenen Vorschlag eingehen wird, lohnt es sich nochmals zur bekannten und kurzen Begründung der modernen Logiker zurückzukehren. Sie lautet: Eine Allaussage kann die leere Menge enthalten. Das ist in unserem Beispiel tatsächlich der Fall, denn es gibt keine grünen Schwäne. Und das ist der einzige Grund für die Ablehnung der abgeschwächten Syllogismen, also durchaus nicht irgendeine versteckte Abneigung gegen Aristoteles.

Ferner ist zu beachten, daß innerhalb einer konditionalen Annahme keine universelle Verallgemeinerung auszuführen ist.

Beispiel:

→ 1. Pa
2. $(\forall x)Px$ unerlaubt

3. $Pa \rightarrow (\forall x)Px$
4. $(\forall y)\ (Py \rightarrow (\forall x)Px)$

*Übung 4.4.4*

Deduzieren Sie:

1) Alle Lügner sind unglaubwürdig
Einige Lügner sind Zeitungsleute
Also sind einige Zeitungsleute unglaubwürdig

2) Alle Flüchtlinge sind arm
Einige Arme sind bemitleidenswert
Also sind einige Flüchtlinge bemitleidenswert

3) Kein Käufer wird betrogen
Einige Käufer sind Händler
Also werden einige Händler nicht betrogen

4) Alle Sportler sind gesund
Alfred ist ein Lehrling und Sportler
Also sind einige Lehrlinge gesund

5) Alle Studenten essen Reis oder Fisch
Alle Reisesser sind Japaner

Nicht alle Studenten sind Japaner
Also gibt es einige Studenten, die Fisch essen

6) Nur autoritäre Staaten sind Bürokratien
Autoritäre Staaten sind Diktaturen
Also sind einige Bürokratien Diktaturen

7) Alle Paddler sind ehrgeizig oder faul
Kein Ehrgeiziger ist glücklich
Einige Paddler sind glücklich
Also sind einige Paddler faul

8) Keine Ente tanzt Walzer
Kein Offizier ist dem Walzer abgeneigt
Alle Bewohner meines Hühnerstalles sind Enten
Also ist kein Bewohner meines Hühnerstalles ein Offizier
(Lewis Carroll)

9) Alle Zerstreuten und Alkoholiker sind verkehrsgefährdend
Frau Dupont ist nicht verkehrsgefährdend, obwohl sie Sonntagsfahrerin ist.
Also ist Frau Dupont nicht Alkoholikerin

10) Alle Sterne sind Planeten oder Fixsterne
Einige Sterne gehören zum Sonnensystem
Die Sterne sind genau dann Fixsterne, wenn sie nicht zum Sonnensystem gehören
Einige Sterne gehören nicht zum Sonnensystem
Also sind einige Sterne Fixsterne

Geben Sie bei den beiden folgenden Aufgaben die genauen Schritte an

11)
1. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow \neg Bx)$
2. $\neg (\exists x)\ (Cx \wedge \neg Dx)$
3. $(\exists x)\ (Ax \wedge \neg Dx)$ $\quad \underline{/\therefore\ (\exists x) \neg (Cx \vee Bx)}$
4. $(\forall x)\ (Cx \rightarrow Dx)$
5. $Ca \rightarrow Da$
6. $Aa \rightarrow \neg Ba$
7. $Aa \wedge \neg Da$
8. $Aa$
9. $\neg Ba$

10. $\neg Da$
11. $\neg Ca$
12. $\neg Ca \wedge \neg Ba$
13. $\neg (Ca \vee Ba)$
14. $(\exists x) \neg (Cx \vee Bx)$

12)
1. $(\forall x)\ [(Ax \vee Bx) \rightarrow Cx]$
2. $\neg (\exists x)\ [(Cx \vee Ex) \wedge \neg Fx]$ $\underline{/.\because.\ (\forall x)\ (Ax \rightarrow Fx)}$
3. $(\forall x)\ [(Cx \vee Ex) \rightarrow Fx]$
4. $(Aa \vee Ba) \rightarrow Ca$
5. $\neg (Aa \vee Ba) \vee Ca$
6. $(\neg Aa \wedge \neg Ba) \vee Ca$
7. $Ca \vee (\neg Aa \wedge \neg Ba)$
8. $(Ca \vee \neg Aa) \wedge (Ca \vee \neg Ba)$
9. $Ca \vee \neg Aa$
10. $\neg Aa \vee Ca$
11. $(\neg Aa \vee Ca) \vee Ea$
12. $\neg Aa \vee (Ca \vee Ea)$
13. $Aa \rightarrow (Ca \vee Ea)$
14. $(Ca \vee Ea) \rightarrow Fa$
15. $Aa \rightarrow Fa$
16. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow Fx)$

Deduzieren Sie:

13)
1. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx)$
2. $\neg (\forall x) Qx$ $\underline{/\ (\exists x) \neg Px}$

14)
1. $\neg (\exists x)\ (Px \rightarrow Mx)$
2. $(\forall x)\ (Sx \rightarrow Mx)$ $\underline{/\ (\forall x)\ (Sx \rightarrow \neg Px)}$

15)
1. $\neg (\exists x)\ (Ax \wedge \neg Bx)$
2. $\neg (\exists x)\ (Cx \wedge Bx)$ $\underline{/\ \neg (\exists x)\ (Ax \wedge Cx)}$

16)
1. $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx) \wedge (\exists x)\ (Fx \wedge Hx)$
2. $(\forall x)\ ((Fx \wedge Jx) \rightarrow \neg Hx)$
3. $(\exists x)\ (Fx \wedge \neg Gx)$ $\underline{/\ (\exists x)\ (Fx \wedge \neg Jx)}$

17)
1. $(\forall x)\ [(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (Hx \rightarrow \neg Fx)]$
2. $(\forall x)\ (Hx \rightarrow Jx)$
3. $(\forall x)\ (Jx \rightarrow Fx)$
4. $(\exists x)\ (Gx \wedge Jx)$ $\underline{/\ (\exists x) \neg Hx}$

18) 1. $(\forall x)\ [(Ax \wedge (Ux \vee Ix)) \rightarrow \neg (Hx \vee Cx)]$
2. $(\exists x)\ [Ax \wedge (Ix \wedge Bx)]$
3. $(\forall x)\ [(Ax \wedge Wx) \rightarrow (\neg Hx \rightarrow Dx)]$
4. $(\forall x)\ (Ax \rightarrow Wx)$
5. $(\exists x)\ (Wx \wedge Dx)$ $\quad / \ (\exists x)\ (Ax \wedge Dx)$

19) Der Mensch lebt nicht vom Brot allein.
Der Arme lebt vom Brot allein.
Also ist der Arme kein Mensch.

20) Einige Photographen sind geschickt, aber nicht einfallsreich.
Nur Künstler sind Photographen.
Einige Photographen sind nicht geschickt.
Jeder Handwerker ist geschickt.
Also ist nicht jeder Künstler ein Handwerker.

21) Alle Musiker und Handwerker sind geachtet.
Radiotechniker und Automechaniker sind Handwerker.
Nur Persönlichkeiten mit Fachkenntnissen sind geachtet.
Also sind die Radiotechniker Persönlichkeiten mit Fachkenntnissen.

22) Alle Mitglieder, die den Beitrag nicht bezahlt haben, sind anwesend.
Alle Auswärtigen sind Mitglieder.
Einige Auswärtige sind nicht anwesend.
Also gibt es einige Mitglieder, die den Beitrag bezahlt haben.

23) 1. In diesem Haus sind außer Katzen keine Tiere.
2. Tiere, die gern den Mond anschauen, eignen sich als Schoßtiere.
3. Wenn ich ein Tier verabscheue, so gehe ich ihm aus dem Weg.
4. Es gibt kein fleischfressendes Tier, das nachts nicht heult.
5. Jede Katze fängt Mäuse.
6. Nur die Tiere in diesem Haus mögen mich gut leiden.
7. Känguruhs eignen sich nicht als Schoßtiere.

8. Nur Fleischfresser fangen Mäuse.
9. Ich verabscheue Tiere, die mich nicht leiden mögen.
10. Tiere, die nachts heulen, schauen gern den Mond an.
Also gehe ich Känguruhs aus dem Weg. (Lewis Carroll)

Vokabular:
Tx: x ist ein Tier in diesem Haus.
Kx: ist ein Katze.
Ax: ist ein Tier, das gern den Mond anschaut.
Sx: x ist ein Tier, das sich als Schoßtier eignet.
Vx: x ist ein Tier, das ich verabscheue.
Wx: x ist ein Tier, dem ich aus dem Weg gehe.
Fx: x ist ein Fleischfresser.
Nx: x ist ein Tier, das nachts heult.
Mx: x ist ein Tier, das Mäuse fängt.
Gx: x ist ein Tier, das mich leiden mag.
Px: x ist ein Känguruh

24) Alle unschädlichen Spione reden
Nicht alle Spione werden nicht ausgetauscht
Alle Spione, die nicht reden, sind unschädlich, wenn sie ausgetauscht sind.
Also gibt es einige Spione, die reden.

25) 1. $(\forall x)\ [\neg Px \rightarrow \neg (Qx \vee Rx)]$
2. $\neg (\exists x) \neg [(Px \wedge Tx) \rightarrow Sx]$
3. $(\forall x)\ (Px \leftrightarrow Tx)$
4. $(\forall x)\, Qx$ $\qquad$ $\underline{/\ (\forall x)\, Sx}$

26) 1. $(\forall x)\ [Ax \rightarrow \neg (Bx \wedge \neg Cx)]$
2. $\neg (\forall x)\ (Ax \rightarrow Dx)$
3. $(\forall x)\ [(Cx \rightarrow Ex) \wedge Bx]$ $\qquad$ $\underline{/\ (\exists x)\, Ex}$

27) 1. $(\forall x)\ [Wx \rightarrow (Xx \rightarrow Yx)]$
2. $(\exists x)\ [Xx \wedge (Zx \wedge \neg Ax)]$
3. $(\forall x)\ [(Wx \rightarrow Yx) \rightarrow (Bx \rightarrow Ax)]$
$\underline{/\ (\exists x)\ (Zx \wedge \neg Bx)}$

28) 1. $(\forall x)\ [(Lx \vee Mx) \rightarrow [(Nx \wedge Ox) \vee Px] \rightarrow Qx]$
2. $(\exists x)\ (Mx \wedge \neg Lx)$
3. $(\forall x)\ [((Ox \rightarrow Qx) \wedge \neg Rx) \rightarrow Mx]$
4. $(\exists x)\ (Lx \wedge \neg Mx)$

$\underline{/\ (\exists x)\ (Nx \rightarrow \rightarrow Rx)}$

29) 1. Alle Einbrecher, die nicht Linkshänder sind, werden überprüft.
2. Alle überprüften Gäste sind Linkshänder oder es gibt keinen, der überprüft wird und nicht Linkshänder und nicht Gast ist.
3. Rudolf wird überprüft, obwohl er kein Gast und kein Linkshänder ist. Also sind alle einbrechenden Gäste Linkshänder.

30) 1. Alle Urner oder Luzerner sind Innerschweizer und Steuerzahler.
2. Alle Innerschweizer oder Engländer, falls sie Frauen oder über 20 Jahre alt sind, sind stimmberechtigt.
Also sind alle Urner, falls sie Frauen sind, stimmberechtigt.

31) „Und es gibt folgewidrige Schlüsse aus wahren Prämissen. Beispiel:
1. Wer mordet, übertritt das Gesetz.
2. Schopenhauer hat nie gemordet.
3. Also hat er nie das Gesetz übertreten. Daher genügt es auch nie, zur Widerlegung einer Ansicht die Folgewidrigkeit ihrer Ableitung aufzuweisen: Jene Ansicht kann dennoch zutreffen, weil Inkonsequenz mit Wahrheit vereinbar ist.“ (E. Schneider, Logik für Juristen. Die Grundlagen der Denklehre und der Rechtsanwendung. (München $^{2}$1972) 111–112)
1) Prüfen Sie die Gültigkeit des Schlusses nach.
2) Was braucht es zur Widerlegung einer Ansicht?
3) Wie ist der Satz zu verstehen „Inkonsequenz ist mit Wahrheit vereinbar“?
4) Woran ist der Verfasser gescheitert?

32) „Der folgende Schluß gleicht dem Modus Barbara.

Wenn jemand eine Sache kauft, wird er zur Zahlung des Kaufpreises verpflichtet.
A hat eine Sache gekauft.
Also ist A zur Zahlung des Kaufpreises verpflichtet worden.

Die Bedingung ‚wenn jemand eine Sache kauft' kann als Mittelbegriff behandelt werden. Die Zahlungsverpflichtung wäre dann Prädikat und A Subjekt. Alle drei Urteile des Syllogismus sind allgemein bejahend." (E. Schneider, Logik für Juristen [siehe Beispiel 31)] 149)

1. Was heißt, der Schluß „gleicht" einem Modus *Barbara* und was versteht der Autor darunter?
2. Zeigen Sie, was unser Autor an diesem *Barbara* für Subjekt, Prädikat und Kopula hält.
3. Bilden Sie den Syllogismus mit dem vom Autor vorgeschlagenen Mittelterm und zeigen Sie, daß es kein *Barbara* ist.

## 4.5 Die Verwendung mehrerer Quantoren

Bisher wurde in allen Beispielen von einem Individuum jeweils eine oder mehrere Eigenschaften ausgesagt. Nicht selten könnte es wünschenswert sein, die gleiche Eigenschaft mehreren Individuen zuzuschreiben, etwa „Einige Katzen und Vögel sind Haustiere". Daher wollen wir uns mit den Grundzügen vertraut machen, die bei der Formalisierung mehrerer Individuen zu beachten sind.

### 4.5.1 Der Bereich der Quantoren

Aussagen von der Art „Wenn alle Wolkenkratzer versichert sind, dann sind einige Häuser versichert" beruhen auf der Voraussetzung, Wolkenkratzer seien Häuser. Das läßt sich so formalisieren:

$$(\forall x)\ (Wx \rightarrow Vx) \rightarrow (\exists x)\ (Hx \wedge Vx)$$

Diese Formalisierung ist zwar korrekt. Da es sich jedoch um eine Satzverknüpfung mit verschiedenen Subjekten handelt, ist es vorteilhaft, unterschiedliche Quantoren zu wählen. Verständlicher wäre demnach:

$$(\forall x)\ (Wx \rightarrow Vx) \rightarrow (\exists y)\ (Hy \wedge Vy)$$

Weitere Beispiele:

Wenn alle Straßen vereist sind, dann sind die Autobahnen vereist.

$$(\forall x)\ (Sx \rightarrow Vx) \rightarrow (\forall y)\ (Ay \rightarrow Vy)$$

Wenn alle Bewohner abwesend sind, dann brechen die Diebe ein

$$(\forall x)\ (Bx \rightarrow Ax) \rightarrow (\exists y)\ (Dy \wedge Ey)$$

Einige Blätter sind grün, andere gelb

$$(\exists x)\ (Bx \wedge Gx) \wedge (\exists y)\ (By \wedge Hy)$$

Wenn nicht alle Seile reißfest sind, dann sind einige Fasern nicht aus Nylon

$$\neg (\forall x)\ (Sx \rightarrow Rx) \rightarrow (\exists y)\ (Fy \wedge \neg Ny)$$

*Übung 4.5.1*

1) Wenn alle Lehrer musikalisch sind, dann sind es auch die Kindergärtnerinnen.

2) Wenn ein Tanker versinkt, dann ist (ein Teil der) Natur zerstört.

3) Wenn einige Vierbeiner langohrig sind, dann sind einige Langohrige Vierbeiner.

4) Wenn kein Zug verspätet ist, dann verspäten sich nicht alle Reisenden.

Bei der Formalisierung ist genau auf den Bereich der Quantoren zu achten. Quantoren haben die Aufgabe, Variable zu binden. Da müssen wir zunächst zeigen, was unter gebundenen und freien Variablen zu verstehen ist.

In den Aussagen ‚$(\forall x)\,Px$‘, ‚$(\exists x)\,Px$‘, ‚$(\forall y)\,Py$‘ ‚$(\exists z)\,Pz$‘, ‚$(\forall z)\,Pz$‘ usw. sind die Variablen durch den jeweiligen Quantor gebunden. Hingegen nennen wir in ‚$(\forall x)\,Pa$‘, $(\exists z)\,Px$‘, $(\forall z)\,Af$‘ usw. die Variablen ‚a‘, ‚x‘, ‚f‘ frei.

Der Wirkungsbereich eines Quantors ist beschränkt. Ein Quantor bindet nur den unmittelbar auf ihn folgenden Ausdruck bis zum nächsten logischen Zeichen.

(1) $(\exists x)\, Ax \wedge Bx \wedge Cx$

In (1) ist nur das ‚x' bei ‚A' gebunden, die beiden übrigen sind frei. Deshalb sollte die Formel weniger irreführend so geschrieben werden:

(2) $(\exists x)\, Ax \wedge Ba \wedge Ca$

Sollte jedoch mit (1) beabsichtigt sein, alle Konjunktionsglieder zu binden, dann sind Klammern erforderlich und zwar so:

(3) $(\exists x)\ (Ax \wedge Bx \wedge Cx)$

Es ist ein beachtlicher Unterschied, ob es sich um gebundene oder freie Variable handelt. (2) und (3) ließen sich etwa so interpretieren:

(2) Es gibt etwas Anziehendes und Anita ist beliebt und charmant.

(3) Es gibt etwas Anziehendes, das belgisch und charmant ist (z.B. die Stadt Brügge)

Ähnlich auch

| | | |
|---|---|---|
| (4) | $(\forall x)\ (Ax \rightarrow Bx)$ | Alles Anziehende ist bezaubernd |
| (5) | $(\forall x)\, Ax \rightarrow Bx$ | Wenn etwas anziehend ist, dann ist Xaver ein Blumenhändler |

Gebundene Variable müssen eindeutig im Wirkungsbereich eines Quantors stehen. Bei mehreren Quantoren kann das einen Quantorenaustausch bedingen, der leicht übersehen wird.

Beispiel:

(6) Wenn etwas gestohlen wurde, dann sind die Hausbewohner entsetzt.

$$(\exists x)\, Gx \rightarrow (\forall y)\ (Hy \rightarrow Ey)$$

Der Existenzquantor bezieht sich ausschließlich auf den Vordersatz der Implikation. Die Formalisierung ist korrekt. Ein ähnlicher Fall könnte jedoch so aussehen:

(7) Wenn etwas gestohlen wurde, dann wird es ersetzt.

$$(\exists x)\, Gx \rightarrow Ex$$

Wir wissen bereits, daß der Existenzquantor nur das ‚x' von ‚G' bindet, nicht aber das zweite ‚x'. Eine solche Bindung ist jedoch beabsichtigt, denn das Pronomen *es* der zweiten Aussage ist rückbezüglich auf das Prädikat *gestohlen* in der ersten Aussage. Nach bewährtem Vorgehen könnten wir versucht sein, Klammern zu setzen. Damit hat sich jedoch unversehens eine Bedeutungsänderung eingeschlichen. Um den Sachverhalt von (7) korrekt wiederzugeben, müssen wir schreiben:

(8) $(\forall x)\ (Gx \rightarrow Ex)$

d.h. alles Gestohlene wird ersetzt.

Sobald die Sätze komplexer sind, müssen weitere Vorsichtsmaßnahmen beachtet werden. Dazu die folgenden Beispiele:

(9) Wenn jemand eingeladen ist, dann, wenn niemand mit dem Auto fahrbereit ist, verspätet sich jemand

Vokabular:

| | |
|---|---|
| Px: x ist eine Person | Ex: x ist eingeladen |
| Py: y ist eine Person | Fx: x ist fahrbereit |
| Pz: z ist eine Person | Vx: x verspätet sich |

Wir erhalten:

(9) $(\exists x)\ (Px \wedge Ex) \rightarrow [(\forall y)\ (Py \rightarrow \neg Fy) \rightarrow (\exists z)\ (Pz \wedge Vz)]$

Dazu drei allgemeine Bemerkungen:

Erstens sind die eckigen Klammern wie bisher bedeutungsmäßig identisch mit den runden. Wahrnehmungspsychologisch läßt sich bei der Diskussion um Klammerverschiebungen leichter verfolgen, wohin sie versetzt werden.

Zweitens dürfen beim Beispiel (9) die mit eckigen Klammern besetzten Stellen nicht klammerlos sein; es läge sonst eine mehrdeutige Aussagenverknüpfung vor, analog dem Beispiel ‚$p \rightarrow q \rightarrow r$', das einen unterschiedlichen Wahrheitswert annimmt, je nachdem, ob die zwei ersten oder die beiden letzten Variablen enger zusammengefaßt werden.

Drittens ist es bei komplexen Ausdrücken oft von Vorteil, den Bereich der Rede auf die wesentlich auftretenden Individuen einzuschränken. Was wesentlich ist, kann erst bestimmt werden beim Überblick über die ganze Aufgabe. So erkennen wir, daß bei (9) überall von Personen gesprochen wird, so daß wir vereinfachend schreiben dürfen:

(9′) $(\exists x)\,Ex \rightarrow ((\forall y)\neg\,Fy \rightarrow (\exists z)\,Vz)$

Die Einschränkung des Redebereiches richtet sich nach der Problemstellung. Bedingung ist einzig, die einmal getroffene Einschränkung im betreffenden Kontext durchzuhalten.

Sollte (9) so zu verstehen sein, daß sich unter der genannten Bedingung der Eingeladene verspätet, dann müßte die Formalisierung anders lauten, allerdings nicht so:

(10) $(\exists x)\,Ex \rightarrow [(\forall y)\ (\neg\,Fy \rightarrow Vx)]$ (falsch)

Das letzte Vorkommen der Variablen ‚x' ist außerhalb des Bereiches des ersten Quantors, ‚x' ist also nicht gebunden. Der Fehler darf jedoch nicht so korrigiert werden:

(11) $(\exists x)\ [(Ex \rightarrow (\forall y)\ (\neg\,Fy \rightarrow Vx)]$ (falsch)

Denn hier wiederholt sich die gleiche Sinnverschiebung, der wir bei (8) begegnet sind. Die korrekte Formalisierung von (10) lautet so

$$(\forall x)\ [Ex \rightarrow (\forall y)\ (\neg\,Fy \rightarrow Vx)]$$

Man kann sich allgemein merken: Bezieht sich „einige" oder „etwas" im Vordersatz einer Implikation auf eine Stelle im Nachsatz, so ist er sozusagen ausnahmslos mit einem Allquantor zu formalisieren.

*Übung 4.5.1*

5) Obwohl etwas verschoben ist, finden sich die Besucher zurecht.

6) Wenn etwas musikalisch ist, dann ist es hörenswert.

7) Wenn jemand ein Fahrzeuglenker ist, und ein Kind wird angefahren, dann ist er versichert.

8) Wenn ein Musiker zum Konzert nicht erscheint, dann ist das Publikum enttäuscht, und er bezahlt eine Konventionalstrafe.

9) Wenn alle regieren und keiner gehorcht, dann sind alle (Regierenden) geprellt.

10) 1. Alle Tulpen sind Blumen.
2. Wenn einige Blumen nicht rot sind, dann ist nichts Katalogisiertes eine Blume.
3. Alle katalogisierten Pflanzen sind Tulpen.
4. Also ist jede nicht rote Tulpe, wenn sie eine Pflanze ist, nicht katalogisiert.

11) 1. Alle Urkunden sind unterschrieben.
2. Alle rechtsgültigen Dokumente sind Urkunden.
3. Wenn einige Dokumente unterschrieben sind, dann ist alles Unterschriebene verbindlich.
4. Also, wenn einige Urkunden nicht verbindlich sind, dann ist alles unterschrieben oder es ist nicht der Fall, daß die Dokumente rechtsgültig sind.

### 4.5.2 Quantoren und ihre Distribution

Einige erforderliche Einschränkungen lassen sich inhaltlich verdeutlichen. Wenn es weiße Schwäne gibt, dann gibt es etwas Weißes und es gibt auch Schwäne. Das läßt sich so ausdrücken:

$$(\exists x)\ (Wx \wedge Sx) \rightarrow (\exists x)\, Wx \wedge (\exists x)\, Sx$$

Wenn es aber etwas Weißes gibt und auch Schwäne, darf man daraus schließen, daß es weiße Schwäne gibt? Diese Umkehrung kann gewiß nicht allgemeingültig sein; es genügt, statt „weiß“ und „Schwan“ die harmlose Ersetzung „viereckig“ und „Kreis“ vorzunehmen, und der Widerspruch wird deutlich erkennbar. Diesem Fehler wird in der Deduktion vorgebeugt durch die Vorschrift, bei einer ∃-Einsetzung dürfe nicht zweimal dieselbe Konstante verwendet werden. Die wichtigsten Vorschriften der Quantorendistribution sind in den folgenden Formeln zusammengefaßt:

1. $(\exists x)\ (Px \wedge Qx) \rightarrow (\exists x)Px \wedge (\exists x)Qx$
2. $(\exists x)\ (Px \vee Qx) \leftrightarrow (\exists x)Px \vee (\exists x)Qx$
3. $(\forall x)\ (Px \wedge Qx) \leftrightarrow (\forall x)Px \wedge (\forall x)Qx$
4. $(\forall x)\ (Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x)Px \rightarrow (\forall x)Qx$
5. $[(\exists x)Px \rightarrow (\exists x)Qx] \rightarrow (\exists x)\ (Px \rightarrow Qx)$
6. $(\forall x)Px \vee (\forall x)Qx \rightarrow (\forall x)\ (Px \vee Qx)$

Man beachte, daß nur die Formeln 2. und 3. Äquivalenzen sind, alle übrigen sind Implikationen.

Die Distributionsgesetze gelten auch für zusammengesetzte Ausdrücke. Dazu zwei Beispiele:

(1) Jeder Koffer hat eine Ausdehnung und ein Gewicht
$(\forall x)\ [Kx \rightarrow (Ax \wedge Gx)]$

Die Struktur dieser Aussage ist dieselbe wie bei 3., genauer: ‚$p \rightarrow (q \wedge r)$'. Sie läßt sich umformen über die Implikation ‚$\neg p \vee (q \wedge r)$' und Distribution ‚$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$' zu ‚$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$'. Deshalb gilt auch

(1) $(\forall x)\ [Kx \rightarrow (Ax \wedge Gx)] \leftrightarrow$
$(\forall x)\ (Kx \rightarrow Ax) \wedge (\forall x)\ (Kx \rightarrow Gx)$

In gleicher Weise wird die Distribution wie bei 2. eingesetzt für das folgende Beispiel:

(2) Es gibt rote oder duftende Blumen
$(\exists x)\ [Bx \wedge (Rx \vee Dx)] \leftrightarrow$
$(\exists x)\ (Bx \wedge Rx) \vee (\exists x)\ (Bx \wedge Dx)$

### 4.5.3 Pränexe Normalform

Wir gehen zunächst von folgender Definition aus: Bei der Formel

$(\forall x)\ [Px \rightarrow Qx]$

nennen wir den Quantor – oder gegebenenfalls die Quantoren – Präfix, den anschließenden Klammerausdruck Matrix, also

(Präfix) [Matrix]

Bevor in einer Formel mit mehreren Quantoren Quantoreneliminationen vorgenommen werden, ist es zweckmäßig, die Quantoren als Präfix zu schreiben, also pränexe Normalformen herzustellen. Eine pränexe Normalform liegt vor, wenn

- die Quantoren als Präfix aufgeführt sind,
- kein Quantor verneint ist,
- der Wirkungsbereich der Quantoren auf die ganze Matrix ausgedehnt ist.

Die folgenden Formeln sind nicht in pränexer Normalform:

1. $(\forall x) Px \rightarrow Qa$
2. $(\forall x) Px \rightarrow (\exists y) Qy$
3. $(\forall x) \neg (\forall y) (Px \rightarrow Qy)$
4. $(\forall x) (Px \rightarrow (\forall y) Qy)$

Bei 1. ist der Wirkungsbereich des Quantors nicht auf ‚Qa' ausgedehnt, bei 2. nicht auf den y-Quantor, bei 3. ist ein Quantor negiert und bei 4. ist die Matrix nicht quantorenfrei.

Bei der Bildung der pränexen Normalform (PN) werden zuerst negierte Quantoren ausgetauscht. Aus ‚$\neg (\forall x) \ldots$' ergibt sich ‚$(\exists x) \neg \ldots$' und aus ‚$\neg (\exists x) \ldots$' entsprechend ‚$(\forall x) \neg \ldots$' Nach diesen Schritten dürfen die durch Konjunktion oder Disjunktion verbundenen Quantoren als Präfix vorangestellt werden.

Beispiele:

1)
1. $(\exists x) Px \wedge \neg (\exists x) Qy$
2. $(\exists x) Px \wedge (\forall y) \neg Qy$ — 1. QA
3. $(\exists x) (\forall y) (Px \wedge \neg Qy)$ — 2, PN

2)
1. $(\forall x) Px \vee \neg (\exists y) Qy \vee \neg (\forall z) \neg Rz$
2. $(\forall x) Px \vee (\forall y) \neg Qy \vee (\exists z) \neg \neg Rz$ — 1, QA
3. $(\forall x) (\forall y) (\exists z) (Px \vee \neg Qy \vee Rz)$ — 2, PN

Negierte Formeln sind zuerst mit Hilfe von De M. aufzulösen.

Beispiele:

3)
1. $\neg (p \vee (\forall x) Px)$
2. $\neg p \wedge \neg (\forall x) Px$ — 1, De M.
3. $\neg p \wedge (\exists x) \neg Px$ — 2, QA
4. $(\exists x) (\neg p \wedge \neg Px)$ — 3, PN

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4) | 1. | $\neg (\exists x)\ (Px \wedge (\exists y) Qy) \vee \neg (\forall z) Rz$ | |
| | 2. | $(\forall x) \neg (Px \wedge (\exists y) Qy) \vee (\exists z) \neg Rz$ | 1, QA |
| | 3. | $(\forall x)\ (\neg Px \vee \neg (\exists y) Qy) \vee (\exists z) \neg Rz$ | 2, De M. |
| | 4. | $(\forall x)\ (\neg Px \vee (\forall y) \neg Qy) \vee (\exists z) \neg Rz$ | 3, QA |
| | 5. | $(\forall x)\ (\forall y)\ (\exists z)\ (\neg Px \vee \neg Qy \vee \neg Rz)$ | 4, PN |

*Übung 4.5.3*

Stellen Sie pränexe Normalformen her:

1) $(\forall x)\ ((Px \rightarrow Qx) \vee (\exists y)\ (Ry \wedge Sy))$

2) $(\exists x)\ ((Px \wedge Qx) \wedge (\exists y)\ (Py \vee (\forall z)\ (Fz \rightarrow Gz))$

3) $\neg ((p \vee q) \wedge (\forall x) Px)$ $\underline{/\ (\exists x)\ (Px \rightarrow \neg (p \vee q))}$

4) $\neg (\forall x) \neg (\exists y)\ (\neg (p \wedge (\exists z) Az)$
$\underline{/\ (\exists x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (Az \rightarrow \neg p)}$

Dagegen ist bei der Implikation der Vordersatz mit Vorsicht umzuformen. Die Implikationsregel verhilft uns zu einer Disjunktion, wobei die folgenden zwei Fälle der Negation zu unterscheiden sind:

1)
1. $(\forall x)\ (Px \rightarrow (\exists y) Qy)$
2. $(\forall x)\ (\neg Px \vee (\exists y) Qy)$
3. $(\forall x)\ (\exists y)\ (Px \rightarrow Qy)$

2)
1. $(\forall x) Px \rightarrow (\exists y) Qy$
2. $\neg (\forall x) Px \vee (\exists y) Qy$
3. $(\exists x) \neg Px \vee (\exists y) Qy$
4. $(\exists x)\ (\exists y)\ (Px \rightarrow Qy)$

Quantoren lassen sich bei Konjunktionen, Disjunktionen sowie beim Nachsatz einer Implikation direkt herausholen. Hingegen beim Vordersatz einer Implikation führt die pränexe Normalform zu einem Quantorenaustausch:

$$(\forall x) Px \rightarrow p \leftrightarrow (\exists x)\ (Px \rightarrow p)$$
$$(\exists x) Px \rightarrow p \leftrightarrow (\forall x)\ (Px \rightarrow p)$$

Die Kenntnis der pränexen Normalform ist deshalb unerläßlich, weil eine $\forall$- oder $\exists$-Ersetzung nur über ganze Formeln ausgeführt werden darf.

*Übung 4.5.3*

5) $(\forall x)\,Ax \rightarrow p$
6) $(\exists x)\,Ax \leftrightarrow p$
7) $\neg\,[(\forall x)\,Px \rightarrow (\forall y)\,Qy]$
8) $(\exists x)\,Ax \rightarrow [(\forall y)\,By \rightarrow (\exists z)\,Cz]$
$\underline{/\ (\forall x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ [Ax \rightarrow (By \rightarrow Cz)]}$