2. Die Aussagenlogik

Die Aussagenlogik befaßt sich mit Aussagen. Unter einer Aussage verstehen wir einen Satz, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er wahr oder falsch sei. Für gewöhnlich stehen die Aussagen im Indikativ. Frage-, Wunsch-, Befehls- oder Ausrufesätze werden nicht als Aussagen angesehen. Das Verhältnis zwischen Sätzen und Aussagen ist so, daß unter den vielen Sätzen nur ein Ausschnitt als Aussagen gilt, nämlich jene, die beschreibend behaupten. Es ist beinahe einfacher aufzuzählen, welche Sätze keine Aussagen sind. Das gilt für die folgenden:

1) Frage-, Wunsch-, Befehlssätze usw.
2) Modalsätze: Sätze mit „möglich", „notwendig", „unbedingt" usw.
3) Nichtwohlformulierte Sätze: Dann und so traf.
4) Sinnlose Sätze: Die Bücher weinen gefiederte Felsen.
5) Aussageformen: Die kluge Hausfrau benutzt x für saubere Wäsche.

Mit den nichtwohlformulierten und den sinnlosen Sätzen können wir gar nichts anfangen. Die Aussageformen hingegen gehen sofort in eine Aussage über, sobald die Variable ‚x' – die Unbekannte – ersetzt wird. Auf die Besonderheiten von 1) gehen wir nicht ein, auf 2) später.

Übung 2

Welche Sätze sind Aussagen? Geben Sie den Grund an für die Nichtaussagen

1. Die Milch ist sauer.
2. Haben Sie 5 Minuten Zeit für mich?
3. Am Samstag ist das „Rössli" immer besetzt.
4. $2 + 2 = 7$.
5. Kauf dir doch einen Volvo!
6. Die Stadt x ist berühmt wegen des Bärengrabens.

7. Er spricht dauernd über die Dollarkrise.
8. 4^2.
9. David besiegte Goliath mit einer Steinschleuder.
10. Vermutlich ist das Dampfschiff.
11. Gut, daß der Regen wieder aufgehört hat!
12. Bis ins 17. Jahrhundert glaubte man an einen Zusammenhang zwischen Mondphasen und Krankheiten.
13. Der Schulanfang ist auf den 15. Oktober angesetzt.
14. Die Waage ist ungenau.
15. Wenn ein Mensch denkt, arbeitet er dann?
16. Es regnet.
17. Es ist unmöglich, aus einer Krähe eine Amsel zu machen.
18. Wir fahren mit der SBB im schönen Schweizerland.

2.1 Die Formalisierung von Aussagen

Da wir fortwährend mit einzelnen Aussagen umgehen, dürfte es vorteilhaft sein, eine Abkürzung zu verabreden, oder wie die Logiker sagen, eine Formalisierung vorzunehmen. Die Mathematiker drücken ihre Unbekannten mit ‚x', ‚y' usw. aus. Analog wählen wir ‚p', ‚q' usw. als Variable. Doch stellen wir mit ‚p', ‚q' usw. nicht Zahlen und auch nicht einzelne Worte dar, sondern ganze Sätze, genauer gesagt: Aussagen. Weil die Buchstaben die Stelle von Aussagen einnehmen, nennen wir sie Aussagenvariable. Liegt eine konkrete Aussage vor, dann mag sie als Konstante durch einen großen Buchstaben symbolisiert werden. Bevorzugt wird der Anfangsbuchstabe des Substantivs, des Verbs oder des Adjektivs. Beispiel:

Der Hahn kräht symbolisch: H

Die Aussage ist also durch ‚H' dargestellt. Die Buchstabenwahl ist belanglos, man hätte ebenso gut ‚K' schreiben können. Wichtig ist, daß jede Aussage durch einen einzigen Buchstaben vertreten wird, mag der sprachliche Ausdruck kurz oder lang sein. Deshalb kann ein harmloses ‚H' etwa bedeuten:

H Der Hahn kräht

H	Der Hahn kräht am frühen Morgen
H	Der Hahn kräht am frühen Morgen unaufhörlich zum Entsetzen aller schlechtgelaunten Nachbarn.

Verboten ist jedoch, zwei Aussagen innerhalb des gleichen Kontextes mit demselben Buchstaben darzustellen. Also:

Der Hahn kräht und Hans wacht auf

H und H	falsch
H und W	richtig

Eine Aussage, die sich durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen läßt, nennt man Atomsatz. Die Negation eines Atomsatzes ist selber ein Atomsatz. Sätze, die nicht Aussagen in unserem Sinne sind, werden nicht symbolisiert.

Übung 2.1

Formalisieren Sie:

1. Othmar ist Organist.
2. Am Freitag gibt es Fisch.
3. Endlich kommt der Mai!
4. Die Edelsteine sind beleidigt.
5. Er drückt sich ständig um die Übungen.
6. Vorgestern traf ich sie wieder am Bahnhof.
7. Soll ich das nochmals wiederholen?
8. Er sang fröhlich inmitten seiner Freunde beim dritten Glas.
9. Die Anschrift ist gänzlich unleserlich.
10. Der letzte Sommer hat.
11. Globi kann alles.
12. Keine Rosen ohne Dornen.
13. Wie nett, daß der Onkel Fritz doch noch eine Frau gefunden hat!
14. Alice ist mißmutig, weil die Spaghetti verkocht sind.
15. O du lieber Augustin, alles ist hin!
16. Radetzki litt chronisch unter Geldmangel.
17. „Handtuch“ heißt auf englisch „towel“.
18. Vorsicht beim Schließen!

19. Wollen wir wetten, daß der Stadtpräsident eine Rede hält?
20. Der Kodex 914 von St. Gallen ist die bedeutendste Quelle für die kritische Ausgabe der Benediktsregel.

2.2 Die Formalisierung von Aussagenverknüpfungen

In der Sprache scheint es zwei Arten von Wörter zu geben, solche, die etwas bedeuten, wie „Elefant", „Konfitüre", „beten", „stolpern" usw. und daneben Wörter ohne Bedeutung wie „aber", „zwar", „weil", „so" usw. Das Mittelalter hat die letzteren Synkategoremata genannt. Unter ihnen sind zwei Gruppen zu unterscheiden und zwar:

1) „zwischen", „indessen", „nun", usw.
2) „und", „oder", „nicht" usw.

Es ist nicht unmittelbar einsichtig, wodurch sich die Synkategoremata der ersten Gruppe von denen der zweite abheben sollen. Doch ist der Unterschied sehr bedeutsam. Die zweite Gruppe hat einen engen Zusammenhang mit der Wahrheit der Sätze, während die erste in dieser Beziehung bestenfalls neutral ist und von uns nicht weiter beachtet werden muß.

Aus der zweiten Gruppe werden wir fünf Synkategoremata auswählen. Sie werden auch Funktoren genannt, genauer Wahrheitswertfunktoren, weil sie die Gesamtwahrheit verknüpfter Atomsätze bestimmen.

Bei der Darstellung wollen wir mit dem Negator beginnen. Er entspricht ziemlich genau dem umgangsprachlichen „nicht". Als Abkürzung wählen wir „$\neg$". Mit diesem Negationszeichen, das vor die Aussage gesetzt wird, stellen wir den Negator dar. Es handelt sich dabei um einen einstelligen Funktor. Einstellig heißt er deshalb, weil auf ihn eine einzige Aussage folgt. Wenn „O" bedeutet „Ostern ist 1985 im April", dann bedeutet „$\neg$ 0" soviel wie „Ostern ist 1985 nicht im April". Die Negation verneint die auf sie folgende Aussage.

Bei den zweistelligen Funktoren wollen wir mit dem „und" beginnen, in Symbolschrift „ $\wedge$ “. Dieser Funktor ist deshalb zweistellig, weil vor dem „und“ wie auch nachher je eine Aussage zu stehen hat, um den Bedingungen wohlformulierter Aussagenverknüpfungen zu genügen.

Der zweite zweistellige Funktor ist das „oder“, das symbolisch mit „ $\vee$ “ wiedergegeben wird.

Als dritter Funktor der zweistelligen Gruppe gilt die Implikation, die mit einem Pfeil „$\rightarrow$“ geschrieben wird. Umgangssprachlich entspricht die Implikation ungefähr der sprachlichen Wendung „wenn ... dann ...“.

Der vierte zweistellige Funktor, der mit dem Zeichen „$\leftrightarrow$“ wiedergegeben wird, kann als „dann nur nur dann, wenn ...“ oder „genau dann, wenn ...“ gedeutet werden.

Wir wollen die fünf Funktoren zusammenstellen:

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\rightarrow$	wenn ... dann ...
$\leftrightarrow$	dann und nur dann, wenn ...

Diese Funktoren sind logische Konstanten. Sie dienen dazu, Aussagen oder Aussagenvariable zu verknüpfen. Eine Aussagenverknüpfung ist ein Molekularsatz. Jede Funktorenverknüpfung – außer der Negation – macht Atomsätze zu Molekularsätzen.

Nun können wir uns mit der Formalisierung der Aussagenverknüpfungen vertraut machen. Das soll anhand zweier Aussagen geschehen, nämlich „Die Sonne scheint“ und „Josef geht in den Wald“. Die Symbolisierung lautet:

S	Die Sonne scheint
J	Josef geht in den Wald
$\neg$ S	Die Sonne scheint nicht
$\neg$ J	Josef geht nicht in den Wald

Entsprechend werden die Aussagenverknüpfungen gebildet:

S $\wedge$ J	Die Sonne scheint und Josef geht in den Wald

$S \vee J$	Die Sonne scheint oder Josef geht in den Wald
$S \rightarrow J$	Wenn die Sonne scheint, dann geht Josef in den Wald
$S \leftrightarrow J$	Genau dann, wenn die Sonne scheint, geht Josef in den Wald

Übung 2.2

1) Formalisieren Sie:

1. Herodot war nicht Musiker.
2. Rauchen ist ungesund und Schokolade macht dick.
3. Wenn die Feuerwehr rechtzeitig eintrifft, dann wird das alte Haus gerettet.
4. Er bezahlt die Steuern genau dann voraus, wenn ihm der Zins gutgeschrieben wird.
5. Er bleibt zu Hause oder seine Frau spielt nicht Bridge.
6. Wenn sich der Hund nicht wohlfühlt, dann wedelt er nicht.

Das Prinzip der Formalisierung ist höchst einfach: Die Aussagen müssen mit dem dafür vorgesehenen Funktor verknüpft werden. Freilich treten in der Praxis manchmal Unsicherheiten auf. Sie können dadurch verursacht sein, weil die Umgangssprache reichhaltig ist und für einen Ausdruck, den wir durch einen einzigen Funktor darstellen, mehrere Wörter benutzt. Einige damit verbundene Formalisierungsschwierigkeiten sollen erwähnt werden.

2.2.1 Die Und-Verknüpfung

„Die Sonne scheint und Josef geht in den Wald" ist eine problemlose Aussagenverknüpfung durch Konjunktion. Zwischen die beiden Aussagen wird ein „und" gestellt und damit ist die Verknüpfung vollzogen. Leider sind nicht alle Konjunktionen so leicht durchschaubar. Sehen wir uns einige Beispiele an.

(1) Das Schachspiel ist aufregend und unterhaltsam

Das linke Argument des „und" ist zweifellos eine Aussage. Hingegen ist „unterhaltsam" anscheinend ein Einzelwort und folglich keine Aussage. In Wirklichkeit profitiert jedoch die Umgangssprache von der Tatsache, daß in jenen Fällen, in denen einem Ding zwei, drei oder noch mehr Eigenschaften zugeschrieben werden, der Name des Dinges nicht jedesmal wiederholt werden muß. Beim vorliegenden Beispiel handelt es sich tatsächlich um zwei Aussagen, die explizit so auszudrücken wären: „Das Schachspiel ist aufregend und das Schachspiel ist unterhaltsam". Nun erkennen wir, daß auch das vermeintliche Einzelwort eine abgekürzte, aber korrekte Aussage ist; entsprechend lautet die ganze Formalisierung so:

(1) $A \wedge U$

Die Umgangssprache – und das gilt von jeder sogenannten wissenschaftlichen Fachsprache in gleicher Weise – darf nicht gedankenlos in die Symbolschrift übertragen werden. Bevor mit der Formalisierung eingesetzt wird, müssen die logisch relevanten Satzstrukturen erfaßt sein. Ein solches Verständnis ist nicht identisch mit dem Begreifen des Inhaltes, ist jedoch eine notwendige Bedingung dazu. An Vertrautheit mit der Sprache ist soviel vorausgesetzt, daß Strukturgleichheiten und -verschiedenheiten erkannt werden, selbst wenn sie durch den Buchstaben nicht angedeutet sind. Es geht hier um die irritierende Tatsache:

- Nicht überall deutet das „und" auf eine konjunktive Aussagenverknüpfung hin.
- Ab und zu liegt eine Aussagenverknüpfung durch Konjunktion vor, ohne daß dieser Sachverhalt am „und" abzulesen wäre.

Diese beiden Arten sollen kurz besprochen werden.

2.2.1.1 Vermeintliche Konjunktion

Die deutsche Sprache kennt mindestens zwei Scheinkonjunktionen. Die eine ist ein harmloses Stilmittel, die andere eine Falle für traditionelle Sprachanalyse.

Wenn das Stilmittel konzentriert wiederholt wird, ist es leicht durchschaubar wie etwa in der Zwingliübersetzung des Markusevangeliums. Abgesehen vom Einführungssatz werden nicht nur bis in die Mitte des Kapitels 7 alle Kapitel, sondern auch alle Abschnitte mit dem Wort „und“ eingeleitet in der Absicht, den griechischen Text möglichst wortgetreu wiederzugeben. Indessen hat das „und“ an diesen Stellen durchaus nicht die Bedeutung konjunktiver Satzverknüpfungen; es ist eine bloß rhetorische Anknüpfung an das Vorhergegangene. Dieses „und“ gehört somit der 1. Klasse der Synkategoremata an. Daraus entnehmen wir die erstaunliche Tatsache, daß selbst Synkategoremata mehrdeutig sein können, auch wenn sie uns als bedeutungslos erscheinen.

Der zweite Fall ist für die Logik folgenreicher. Wir gehen von den beiden Sätzen aus:

(1) Franz und Othmar sind Sänger
(2) Franz und Othmar sind Nachbarn

Die beiden Aussagenverknüpfungen scheinen grammatikalisch gleich gebaut zu sein. In Wirklichkeit schreibt jedoch der Satz (1) zwei Menschen eine Eigenschaft zu, die beiden zukommt. Dazu erlaubt die Umgangssprache, wie wir bereits gesehen haben, eine Abkürzung. Ausführlich dargestellt bedeutet die Aussage (1) folgendes: „Franz ist ein Sänger und Othmar ist ein Sänger.“ Hingegen läßt sich (2) nicht in dieser Weise deuten; denn „Franz ist ein Nachbar“ ist kein wohlformulierter Satz; er muß lauten: „Franz ist ein Nachbar von Othmar“ oder es muß mindestens implizit ergänzt werden: „Franz ist ein Nachbar von jemandem“. Was hier vorliegt ist nicht eine Konjunktion aus zwei einfachen Aussagen, vielmehr eine elementare Relation. Aus der Relationslehre, die wir später darstellen werden, geht hervor, daß unter der Bedingung, wie sie (2) ausspricht, auch Othmar ein Nachbar von Franz ist. Es handelt sich aber um eine einzige Aussage und deshalb lautet die Formalisierung von (1) und (2) so:

(1) $F \wedge 0$
(2) N

Selbstverständlich dürfte (2) auch durch „F“ dargestellt werden, nur muß man sich darüber klar sein, daß dieses „F“ mit dem „F“ aus (1) nicht identisch ist. Es ist deshalb ratsam, einen andern Buchstaben für (2) zu wählen.

2.2.1.2 Konjunktive Aussagenverknüpfungen ohne „und"

Eine Formalisierung ist immer eine Abstraktion. Bei unseren Formalisierungen dürfen jene Nuancen weggelassen werden, die logisch nicht relavant sind. Die Umgangssprache benutzt nämlich eine reiche Wortpalette, um mit der konjunktiven Verknüpfung von Sätzen auch noch bestimmte Schattierungen sichtbar zu machen. So sagt man etwa, „Er kommt zum Mittagessen, aber bleibt nicht lange". Hier handelt es sich um zwei Aussagen, die statt durch ein „und" durch ein „aber" verknüpft sind. Im „aber" steckt ein leichter Gegensatz, eine Nuance, die im „und" nicht mehr enthalten ist. Da sie jedoch rhetorischen und nicht wahrheitsbestimmenden Wert hat, verzichtet der auf Wahrheit ausgerichtete Logiker auf ihre Berücksichtigung. Derartige Schattierungen gibt es noch weitere. So könnte das „aber" gegebenenfalls durch „doch", „obwohl", „während" usw. ersetzt werden. Die Schriftsprache kennt überdies die Möglichkeit, die Und-Funktion durch ein Komma anzudeuten, etwa: „Er hat sich lange, eingehend und erfolgreich darum bemüht". Überdies kann das „und" sogar aus der sprachlichen Darstellung verschwinden, wenn die Konjunktion verneint wird.

Die Verneinung einer durch „und" gebildeten Satzverknüpfung mag auf verschiedene Art wiedergegeben werden. Verständlich, aber ungebräuchlich ist:

(3) Franz geht nicht schwimmen, und Othmar geht nicht schwimmen

An Stelle von (3) wird man eher sagen:

(4) Franz und Othmar gehen nicht schwimmen

oder

(5) Weder Franz noch Othmar geht schwimmen

Zweifellos ist (3) so schwerfällig, daß es in der deutschen Sprache nicht ausgesprochen wird. Statt (4) kann jederzeit auch (5) eingesetzt werden, wobei das „und" auf den ersten Blick verschwunden ist, jedoch bei genauerer Analyse im „weder – noch" als Verneinung zu finden ist.

Eine andere Situation liegt im folgenden Beispiel vor:

(6) Er raucht und trinkt nicht

Die Zweideutigkeit wird uns bewußt beim Versuch der Formalisierung:

(6a) $R \wedge \neg T$

(6b) $\neg R \wedge \neg T$

(6a) besagt, daß er raucht, aber nicht Trinker ist, hingegen behauptet (6b), er sei Totalabstinent. Meistens wird aus dem Kontext ersichtlich, ob (6a) oder (6b) gemeint sei. Man mag auch wünschen, daß die Aussage (6), wenn sie im Sinne von (6a) beabsichtigt ist, umgangssprachlich eindeutig formuliert werde, nämlich: „Er raucht, aber er trinkt nicht". Auf jeden Fall, wenn wir die Aussage (6), wie man pathetisch so gerne sagt, „beim Wort nehmen", ist sie mehrdeutig.

Der Reichtum der Umgangssprache bringt es mit sich, daß allerhand Nuancen auch bei den übrigen Funktoren anzutreffen sind. Sie zu erfassen gehört zu den bekanntesten Anfängerschwierigkeiten in der Formalisierung, weil der durchschnittliche Sprecher mit seiner Sprache umzugehen weiß, ohne jedoch mit ihren logischen Strukturen explizit vertraut zu sein. Mit etwas Vorsicht und Übung lassen sich hier verhältnismäßig leicht die bestehenden Lükken ausbessern. Etwas kürzer als beim „und" sei noch auf einige schwierige Zusammenhänge der übrigen Funktoren aufmerksam gemacht.

2.2.2 Die übrigen Funktoren

Die Disjunktion: Das „oder" wird in drei verschiedenen Bedeutungen verwendet, wobei eine davon vernachlässigt werden kann, weil sie äußerst selten vorkommt. Die beiden übrigen nennen wir das inklusive und das exklusive „oder". Die Erklärung ihrer Unterschiede folgt später. Für die Formalisierung bereitet das „oder" geringfügige Schwierigkeiten verglichen mit dem „und", weil unsere Umgangssprache weniger Umschreibungen für „oder" kennt. Täuschen läßt man sich oft von einigen alltäglichen Redewendungen, wie etwa „Kinder und Rentner zahlen halben Preis". Hier

wird das „und" offensichtlich als „oder" aufgefaßt. Deshalb darf nicht das formalisiert werden, was gesagt wird, sondern das Gemeinte.
Die Implikation: Statt „wenn ... dann ..." können ebenfalls Ersatzwendungen in der Umgangssprache benutzt werden, etwa „falls", „es sei denn ...", „... ist eine hinreichende Bedingung für ...", „wenn immer ..." usw. Wichtig ist festzuhalten, daß das „weil" trotz seiner scheinbaren Ähnlichkeit kein ebenbürtiger Ausdruck ist, denn es hat eine wesentlich verschiedene Aufgabe zu erfüllen. Ebenfalls ist auch die konditionale Implikation keine Wahrheitsfunktion. „Wenn Hitler 1935 gestorben wäre, dann wäre Österreich nicht heimgeholt worden." Dieser irreale Satz soll nicht als Wahrheitsfunktion der Implikation gelten.

Daneben ist auf die asymmetrische Funktion der Implikation aufmerksam zu machen. Das Argument vor dem Implikationszeichen nennen wir „Antezedens" oder „Vordersatz", jenes, das auf das Implikationszeichen folgt „Konsequens" oder „Nachsatz". Antezedens und Konsequens sind die beiden Argumente der Implikation. Die Asymmetrie hat zur Folge, daß Vordersatz und Nachsatz nicht gegeneinander ausgetauscht werden dürfen. Bei den übrigen Funktoren ist dieser Austausch erlaubt aufgrund einer Regel, die wir später kennen lernen.

Wird bei der Implikation der Vordersatz mit dem Nachsatz vertauscht, so geht damit eine Sinnänderung einher. Das machen wir uns zunutze, um mit Hilfe des gleichen Funktors eine weitere Aussagenverknüpfung auszudrücken. Die Umstellung von Antezedens und Konsequens entspricht dem alltagsprachlichen „*nur* dann ... wenn ...". Das soll an Beispielen verdeutlicht werden:

(7) Wenn die Sonne scheint, dann geht Josef in den Wald $S \rightarrow W$

(8) Nur wenn die Sonne scheint, geht Josef in den Wald $W \rightarrow S$

Diesen Sachverhalt können wir uns inhaltlich plausibel machen, denn (8) ist gleichbedeutend mit „Wenn Josef in den Wald geht, dann scheint die Sonne". Dieses „nur wenn ... dann ..." wird in der Alltagssprache durch mehrere verschiedene Wendungen wiedergegeben: „... ist eine notwendige Bedingung ...", „... vorausgesetzt, daß ...", „... insofern als ..." usw.

Die Äquivalenz: Die Äquivalenz kann ebenfalls unter verschiedener Gestalt in der Umgangssprache auftreten. Sie hat die gleiche Bedeutung wie „wenn p, dann q und wenn q, dann p", so daß wir schreiben: $p \leftrightarrow q$. Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit „p ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für q". Die Grundform der Äquivalenz ist „dann und nur dann, wenn ..." oder „genau dann, wenn ..." Statt dieser umständlichen Ausdrucksweise kann oft auch kurz „muß" stehen, etwa „Wenn ein Pferd ein Schimmel ist, dann muß es weiß sein". Das dürfte die geläufigere Redeweise sein als „dann und nur dann, wenn ein Pferd ein Schimmel ist, ist es weiß", obwohl dies korrekt wäre.

Übung 2.2.2

1) Formalisieren Sie:

1. Hans studiert Biologie oder Chemie.
2. Im Anfang schuf Gott Himmel und Erde.
3. Das Bier ist trinkbar, aber nicht kalt.
4. Wenn das Konzert öffentlich ist, dann spielt der Solist gut.
5. Nur wenn das Konzert öffentlich ist, spielt der Solist gut.
6. Weder Napoleon noch de Gaulle waren Engländer.
7. Die höchste Steigung der Gotthardbahn beträgt 27 Promille, jene der Engelbergerbahn jedoch 246 Promille.
8. Nur wenn eine Zahl ungerade ist, läßt sie sich nicht durch 2 teilen.
9. Heidi und Bruno haben am 14. Juli geheiratet, obwohl sie nicht Franzosen sind.
10. Die Türe ist offen oder zu.
11. Der Millionär befürchtet, daß sein Vermögen kleiner wird, der Philosoph, daß sein Unvermögen größer wird.
12. Die Katze fängt Vögel statt Mäuse.
13. Es genügt nicht, daß Hans kommt, damit Alice bleibt.

14. Er geht in die Oper, falls nicht Wagner auf dem Programm steht.
15. Carl spielt Klavier und Orgel, Praxedis hingegen Klavier und Harfe.
16. Ein erfolgreicher Witz muß eine Pointe haben.

2) Formalisieren Sie weiter

1. Nicht p, sondern q
2. Weder p noch q
3. p, falls q
4. Nur p, wenn q.
5. p ist eine hinreichende Bedingung für q.
6. p ist eine notwendige Bedingung für q.

3) Übersetzen Sie die Aussagenverknüpfungen in Worte mit dem Vokabular:

T = Die Temperatur steigt
R = Es hat geregnet
K = Der Kirschbaum blüht

1. $(T \wedge R) \rightarrow K$
2. $(T \rightarrow R) \leftrightarrow (\neg T \vee R)$
3. $\neg (K \rightarrow R)$
4. $\neg T \vee (K \rightarrow R)$
5. $T \leftrightarrow \neg K$
6. $K \rightarrow (R \wedge \neg T)$

4) „‚p ↔ q' soll stehen für: ‚Sokrates ist der Philosoph, welcher den Giftbecher nahm'" E. Walther, Kleiner Abriß der Mathematischen Logik (Kevelaer 1950). zit. J. v. Kempski, Max Bense als Philosoph. Archiv f. Philos. 4 (1952) 280.
Wie beurteilen Sie diese Behauptung?

2.3 Klammerregeln

Da nicht bloß zwei, sondern beliebig viele Aussagen miteinander verknüpft werden dürfen, können sich bei Unachtsamkeit Mehrdeutigkeiten einschleichen, wie etwa in der folgenden Aussagenverbindung:

(1) $A \vee B \rightarrow C$

Dieser Ausdruck kann auf zwei Arten interpretiert werden:

(1a) $(A \vee B) \rightarrow C$ oder
(1b) $A \vee (B \rightarrow C)$

(1a) Wenn Albert oder Brigitte ins Kino geht, dann bleibt Claudia zu Hause.
(1b) Albert geht ins Kino, oder, wenn Brigitte geht, dann bleibt Claudia zu Hause.

(1a) und (1b) sind offensichtlich nicht identisch. Wir werden später eine einfache Methode kennen lernen, um den Unterschied zwischen den beiden genau auszudrücken.

Beachtung verdient auch die Negation.

(2) Es ist nicht der Fall, daß Emil raucht oder trinkt

Die Negation bezieht sich hier auf die ganze Aussagenverknüpfung, so daß sich folgende Formalisierung aufdrängt:

(2a) $\neg (R \vee T)$

Wenn man die Klammern wegließe, dann würde sich die Negation auf die erste Konstante beschränken

(2b) $\neg R \vee T$

was der etwas sonderbaren Behauptung entspräche: „Emil raucht nicht oder er trinkt“. Das Sonderbare liegt aber nur am zufällig gewählten Beispiel. Die Struktur von (2b) kann sinnvoll etwa so gedeutet werden:

(3) Emil geht nicht weg oder er nimmt das Auto

Das heißt: Er beabsichtigt hier zu bleiben; falls er es sich gleichwohl anders überlegen sollte, dann nimmt er das Auto.

(3a) $\neg W \vee A$

Wenn keine Klammern vorhanden sind, dann gilt die Konvention, daß „$\wedge$“ und „$\vee$“ stärker binden als „$\rightarrow$“ und „$\leftrightarrow$“. Gemäß dieser Konvention müßte (1) als (1a) gedeutet werden. Wir werden jedoch auch bei (1a) Klammern zulassen, auch wenn sie, streng genommen, überflüssig wären. Reicht die Konvention hingegen nicht aus wie bei der Formel (1b), dann werden Klammern unerlässlich. Daher ist der Ausdruck ‚$A \rightarrow B \rightarrow C$' nicht wohlformuliert; je nachdem, ob er ‚$(A \rightarrow B) \rightarrow C$' oder ‚$A \rightarrow (B \rightarrow C)$' bedeuten soll, behauptet er etwas Verschiedenes.

Übung 2.3

Formalisieren Sie

1. Entweder gehen wir schwimmen, oder wenn wir nicht schwimmen gehen, dann machen wir Musik.
2. Er ist nur dann mutig, wenn er im Wirtshaus sitzt und die Frau nicht bei ihm ist.
3. Wir können nicht beides haben, den Fünfer und das Weggli.
4. Er hat nicht Wein getrunken, oder wenn er Wein getrunken hat, dann fährt er nicht mit dem Auto.
5. Es ist nicht der Fall, daß er Wein getrunken hat und Auto fährt.
6. Wenn der Dirigent einen falschen Einsatz gibt oder der Pianist zwei Seiten gleichzeitig dreht, dann stimmt die Harmonie nicht.
7. Die Versammlung ist beschlußfähig, oder wenn sie es nicht ist, dann heben wir sie auf.
8. Bei Einbruch, Brand und Diebstahl zahlt die Versicherung, jedoch nicht bei Hagel.
9. Nur bei Einbruch und Brand zahlt die Versicherung, bei Diebstahl nicht.
10. Der Computer unterbricht den Schüler nicht, es sei denn, um Fehler anzuzeigen oder den Stromausfall zu melden.
11. Der Gast ist abgereist ohne die Rechnung zu bezahlen, oder er hat einen Spaziergang gemacht und kommt jeden Augenblick zurück.
12. Wenn Verena weder ein Streich- noch ein Schlaginstrument spielt, jedoch sicher singt, dann spielt sie ein Holzinstrument oder Orgel und komponiert.

Eine Bemerkung zu den uneinheitlichen Symbolzeichen der Logiker: Meistens bestehen die Unterschiede in geringfügigen Nebensächlichkeiten, etwa wenn die Konjunktion mit „ . “ oder „&“ geschrieben wird. Eine einzige Schreibweise macht eine Ausnahme, die deshalb gesondert erlernt werden muß. Es handelt sich um die polnische Notation. Sie hat den Vorteil, keine Klammern zu benötigen und gleichwohl immer eindeutig zu bleiben. In dieser Hinsicht ist sie allen andern Schreibweisen überlegen. Darauf gehen wir später ein.

Zusammenstellung einiger wichtiger Fachausdrücke

$p, q, r \ldots$	Aussagenvariable
$A, B, C \ldots$	Aussagenkonstante
$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$	Logische Konstante
p	
$\neg p$	Atomsätze
A	
$\neg\neg C$	
$p \vee q$	
$A \rightarrow B$	Molekularsätze oder Formeln
$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$	
p	1 Argument, 1 Variable
$p \vee p$	2 Argumente, 1 Variable
$(p \vee p) \rightarrow p$	3 Argumente, 1 Variable
$(p \vee q) \rightarrow r$	3 Argumente, 3 Variable
$A \rightarrow B$	A = Antezedens, Vordersatz;
	B = Konsequens, Nachsatz

2.4 Die Wahrheitsfunktionen

Als Wahrheitswerte seien nur zwei zugelassen: das Wahre und das Falsche. Unter dieser Voraussetzung kann ein Einzelargument nur wahr oder falsch sein. Die Wahrheit oder Falschheit einer Satzverknüpfung hängt von der Wahrheit oder Falschheit der einzelnen Argumente ab. Wir wollen die Leistung für die bereits bekannten Funktoren im Hinblick auf die Wahrheitswerte untersuchen.

2.4.1 Die Negation

Die Negation ist jene Funktion, die einem Argument den entgegengesetzten Wahrheitswert zuschreibt. Die Aussage „Die Lampe brennt“ kann für eine bestimmte Lampe wahr oder falsch sein. Ist sie wahr, dann ist die Verneinung „Die Lampe brennt nicht“ falsch; ist hingegen die Aussage „Die Lampe brennt nicht“ für eine bestimmte Lampe wahr, dann ist bei diesem Zustand ihre Verneinung „Die Lampe brennt“ falsch. Daraus folgt, daß wir mit der Bejahung eines Satzes gleichzeitig das kontradiktorische Gegenteil verneinen. Das läßt sich verallgemeinert in einer Wahrheitstafel darstellen:

p	$\neg$ p
wahr	falsch
falsch	wahr

F	1) Blau ist eine Farbe
I	2) Hirsche sind Insekten
B	3) Belgien ist kleiner als Luxemburg
V	4) San Marco ist in Venedig

Welche Aussagen sind wahr?

Blau ist tatsächlich eine Farbe, also ist ‚F‘ wahr. Hingegen sind Hirsche keine Insekten, sodaß ‚I‘ falsch und folglich ‚$\neg$ I‘ wahr ist. Belgien übertrifft Luxemburg flächenmäßig um mehr als das elffache. Die Aussage ‚B‘ ist falsch und daher ‚$\neg$ B‘ wahr. Alle Besucher von Venedig wissen, daß San Marco die Hauptkirche ist. ‚V‘ ist also wahr.

Man hätte die Frage auch so stellen können: Welche Aussagen sind falsch
Antwort: $\neg$ F, I, B, $\neg$ V.

Eine einzelne Variable ist also wahr oder falsch. Die Übersicht wird erschwert, sobald zwei ($p \wedge q$), drei ($p \wedge q \wedge r$) oder noch mehr Variable gegeben sind. Wir reden hier absichtlich von Variablen und nicht von Argumenten, weil etwa bei den Argumenten ($p \vee p \vee p$) der Wahrheitswert von der einzigen Variable ‚p‘ abhängig ist. Ist ‚p‘ wahr, dann ist der ganze Ausdruck wahr; ist ‚p‘ falsch, dann überträgt sich das wieder auf den ganzen Ausdruck;

denn eine Behauptung, die dreimal ausgesprochen wird, hat nicht mehr Wahrheit oder Falschheit als eine einmalige Aufzählung. Wenn jedoch ‚p ∨ q' vorliegt und ‚p' falsch ist, dann steht der Wahrheitswert von ‚q' noch offen. Daraus ersehen wir: sobald wir es mit zwei oder mehr Variablen zu tun haben, gibt es mehrere Kombinationen zwischen wahr und falsch.

Wie groß die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten bei zwei Variablen ist, das läßt sich an einem Beispiel darstellen. Nehmen wir an, wir hätten einen Sack mit weißen und farbigen Kugeln. Nun greife ich mit beiden Händen hinein und nehme je eine Kugel aus dem Sack heraus. Kurzes Nachdenken belehrt uns, daß nur die folgenden vier Kombinationen zu erwarten sind:

linke Hand	rechte Hand	abgekürzt	
weiß	weiß	w	w
weiß	farbig	w	f
farbig	weiß	f	w
farbig	farbig	f	f

Falls wir nun bei der Abkürzung „w" als „wahr" und „f" als „falsch" deuten, so haben wir die Wahrheitskombinationen wahr–falsch zweier Variablen vor uns. International hat sich dabei eine einheitliche Schreibweise durchgesetzt. Für „wahr" wird „1" geschrieben, für „falsch" „0".

Eine Wahrheitsfunktion mit zwei Variablen ist dann eindeutig definiert, wenn der Wahrheitswert für jeden der vier möglichen Fälle eindeutig festgelegt ist. Das ist gleichbedeutend mit einer strengen Definition unserer bereits bekannten Funktoren. Sie sollen einzeln untersucht werden.

2.4.2 Die Konjunktion

„Der Briefträger bringt die Zeitung und ein Paket". Das sind zwei durch eine Konjunktion verbundene Aussagen, die sich formal so darstellen lassen: ‚Z ∧ P'. Wie bereits bekannt, gibt es für zwei Variable vier Kombinationsmöglichkeiten hinsichtlich der Wahrheit oder Falschheit. Wir schreiben diese vier Fälle unter die Buchstaben ‚Z' und ‚P', was folgende Tabelle ergibt:

P	$\wedge$	Z
1		1
1		0
0		1
0		0

Diese Aussagenverknüpfung ist dann wahr, wenn sowohl die erste Aussage wahr ist wie auch die zweite, also wenn der Briefträger mit der Zeitung auch das Paket abliefert. Wir sagen, sie sei falsch, wenn er ohne Paket ankommt oder wenn er das Paket zustellt ohne Zeitung und erste recht, wenn er weder Zeitung noch Paket bringt. Das deuten wir so an, daß die Spalte unter dem Konjunktionszeichen dort eine „1“ erhält, wo beide Variable 1 sind, also in der ersten Zeile. Die übrigen drei Zeilen füllen wir mit „0“ aus. Dann lautet die Definition der Konjunktion allgemein so:

p	$\wedge$	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

Aus dieser Wahrheitstafel entnehmen wir, daß die Konjunktion gemäß Definition genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind. Statt vertikal können wir unser Resultat aus der $\wedge$-Spalte auch horizontal schreiben: 1000. Das hat nichts mit tausend zu tun; es ist vielmehr die exakte Definition des Funktors „ $\wedge$ “.

Beispiele zur Konjunktion:

$F \wedge V$	1)	Blau ist eine Farbe und San Marco ist in Venedig.
$Z \wedge A$	2)	12 ist teilbar durch 2 und Pflaumen sind Aprikosen.
$P \wedge \neg B$	3)	Paris ist eine Stadt und Holz brennt nicht.
$\neg I \wedge \neg S$	4)	Die Eskimos leben nicht in Italien und die Neger nicht auf dem Südpol.

Welche Aussagenverknüpfungen sind wahr?

Im Beispiel 1) sind beide Aussagen wahr, deshalb auch die ganze

Aussagenverknüpfung. Bei 2) ist ‚A' falsch, denn Pflaumen sind keine Aprikosen. Deshalb ist 2) als Ganzes falsch, obwohl die Aussage ‚Z' wahr ist. Wir haben es mit der zweiten Zeile unserer Definition zu tun, wo sich aus dem wahren ‚p' und dem falschen ‚q' etwas Falsches ergibt, was als „0" zwischen die beiden gesetzt wird. Da jedermann weiß, daß Holz brennbar ist, also ‚B' wahr und ‚¬B' falsch, so ist auch die Aussage 3) falsch. Den Eskimos wäre es in Italien zu warm, sie wohnen nicht dort. Daher ist ‚¬I' wahr. Entsprechend fänden es die Neger auf dem Südpol zu kalt und so ist auch ‚¬S' wahr. Da beide Argumente der Konjunktion wahr sind, ist die gesamte Aussagenverknüpfung wahr.

2.4.3 Die Disjunktion

Als Beispiel für eine Disjunktion wählen wir den Satz: „Zum Nachtisch gibt es Käse oder Früchte". Unter der Disjunktion verstehen wir jene Funktion mit zwei Argumenten, die nur dann falsch ist, wenn beide Argumente falsch sind, also wenn es weder Käse noch Früchte gibt. Die Wahrheitstafel der Disjunktion lautet demnach verallgemeinert so:

p	∨	q
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

Auch hier ist das Resultat der Definition aus der Spalte unter dem Funktor „ ∨ " abzulesen und kann horizontal übertragen werden: 1110. Der Funktor läßt sich in der Umgangssprache so umschreiben: „Eines von beiden, vielleicht auch beides". Das entspricht genau dem lateinischen „vel", das auf deutsch nicht gerade eindeutig mit „oder" übersetzt wird. Die Formel „und/oder", die man in juristischen Texten und neuerdings wieder vermehrt in theologischen Arbeiten antrifft, ist ein Pleonasmus, wie aus der Definition von „ ∨ " hervorgeht. Die Wahrheitstabelle bringt es an den Tag.

Nun kann aber das umgangssprachliche „oder" eine weitere Bedeutung annehmen, die Kontravalenz, die an einem Beispiel erklärt werden soll. „Albert ist Katholik oder Protestant". Da es nicht möglich ist, beiden Konfessionen gleichzeitig anzugehören, nimmt die Wahrheitstabelle den Wahrheitswert 0110 an. Dieses ausschließende „oder" wird lateinisch mit „aut-aut" und deutsch mit „entweder-oder" übersetzt. Die konsequente lateinische Unterscheidung wird von der deutschen Sprache allerdings nicht übernommen, so daß die bedeutsame Abweichung zwischen Disjunktion und Kontravalenz nur vom Kontext her feststellbar wird. Ich muß im voraus wissen, wie Katholiken zu Protestanten stehen, um zu erfassen, daß es sich bei diesem Beispiel um eine Kontravalenz handelt. Weniger zweideutig müßte gesagt werden: „Entweder ist Albert Katholik oder Protestant". Der Logiker hat der Sprache indessen keine Vorschriften über konsequenten Gebrauch zu machen; er stellt nur fest, wie sorglos im Alltag gesprochen wird, eine Tatsache, die sich nur wegen der unerhörten Redundanz nicht chaotisch auswirkt.

Da sich die Kontravalenz, wenn auch etwas umständlich, mit Hilfe der Disjunktion darstellen läßt – Albert ist Katholik oder Protestant, aber nicht Katholik und Protestant – so wollen wir auf die Einführung einer zusätzlichen logischen Konstante für die Kontravalenz (symbolisch: $\rightarrowtail\!\!\!\leftarrow$) verzichten. Wir begnügen uns mit der Disjunktion, die von einigen Autoren Adjunktion genannt wird.

Beispiele zur Disjunktion:

$F \vee V$	1)	Blau ist eine Farbe oder San Marco ist in Venedig.
$Z \vee A$	2)	12 ist teilbar durch 2 oder Pflaumen sind Aprikosen.
$\neg P \vee B$	3)	Paris ist nicht eine Stadt oder Holz brennt.
$I \vee S$	4)	Die Eskimos leben in Italien oder die Neger auf dem Südpol.

Welche Aussagenverknüpfungen sind wahr?

Im Beispiel 1) sind beide Aussagen wahr, deshalb auch die ganze Aussagenverknüpfung. Bei 2) ist ‚Z' wahr. Da die Disjunktion als ganze wahr ist, wenn mindestens eines ihrer Argumente wahr ist, so vermag auch das falsche ‚A' am Wahrheitswert von 2) nichts mehr zu ändern. Bei 3) haben wir ein wahres ‚B', was ausreicht für die Wahrheit der Aussagenverknüpfung. Hingegen ist bei 4) sowohl ‚I' wie ‚S' falsch, also alle Disjunktionsglieder. Deshalb ist 4) falsch.

2.4.4 Die Implikation

Der Wahrheitswert der Implikation läßt sich nicht mehr so leicht aus einem Beispiel ablesen. Versuchen wir es für den Anfang gleichwohl.

„Wenn Erika die höchste Punktzahl erreicht, so ist sie Siegerin". Daraus kann ohne Zögern entnommen werden, daß wir eine Implikation für richtig halten, wenn Vordersatz und Nachsatz zutreffen. Ebenso einsichtig ist es, daß der Wert der Implikation falsch ist, wenn der Vordersatz wahr, hingegen der Nachsatz falsch ist. Wir müßten es als ungerecht empfinden, wenn Erika trotz der höchsten Punktzahl nicht Siegerin wäre. Aber wie steht es mit den beiden Möglichkeiten in denen der Vordersatz falsch ist? Diese beiden Fälle wollen wir als wahr festsetzen unabhängig davon, ob uns die zur Verdeutlichung beigezogenen Beispiele zu überzeugen vermögen. Danach erhalten wir folgende Wahrheitstabelle für die Implikation:

p	→	q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Die Umgangssprache gibt diesen Funktor mit „wenn ... dann ..." wieder. Es ist zweifellos der Funktor, der unter den bisher behandelten von unserem intuitiven Verständnis am meisten abweicht, und dies nicht bloß in den Fällen eines falschen Vordersatzes. Unser schwankender Gebrauch kommt daher, weil wir im täglichen Umgang zwei zusätzliche außerlogische Voraussetzungen annehmen: Erstens deuten wir in eine Wenn-dann-Aussage ein Kausalverhältnis hinein, das mit der Implikation nicht beabsichtigt ist, und zweitens behalten wir uns Wenn-dann-Aussagen vorwiegend für jene Fälle vor, wo der Vordersatz noch nicht eindeutig wahr oder falsch ist. Beispiele:

1) Wenn die Temperatur unter Null Grad sinkt, so gefriert das Wasser.
2) Wenn das Wetter am Sonntag schön ist, dann machen wir einen Ausflug.

Beide Sätze sind echte Implikationen, nur steckt in beiden viel mehr, als durch die Implikation ausgedrückt wird. Das Wenige, das die streng definierte Implikation aussagt, das soll dafür konsequent durchgehalten werden. Welche Schwierigkeiten dabei auftreten mögen, das zeigt der folgende Vergleich:

1. Erika hat die höchste Punktzahl.
2. Erika ist Siegerin.
3. Bonn ist in Deutschland.
4. Das Wasser gefriert bei Null Grad.

Die vier Aussagen seien wahr. Aus ihnen lassen sich die beiden Implikationen bilden:

(1) Wenn Erika die höchste Punktzahl hat, dann ist sie Siegerin
(2) Wenn Bonn in Deutschland ist, dann gefriert Wasser bei Null Grad

Das Beispiel (2) ist befremdlich, weil zwischen Bonn und dem gefrorenen Wasser kein Kausalzusammenhang besteht und weil überdies Vordersatz und Nachsatz zum vornherein als wahr bekannt sind. Bei (1) liegt wohl ein Kausalzusammenhang vor, – die Logik reicht bei weitem nicht aus, die Kausalität zu analysieren, schon gar nicht der elementare Ausschnitt, mit dem wir uns hier befassen – auf jeden Fall kann man sich einen Zeitpunkt ausdenken, wo der Ausgang noch nicht entschieden ist. Aber wenn sich dann Erika tatsächlich die höchste Punktzahl geholt hat, soll dann von diesem Augenblick an der Satz (1) als falsch anzusehen sein? Die Alltagssprache hält ihn weiterhin für richtig, auch wenn es jetzt üblich ist zu sagen: „Erika hat die höchste Punktzahl erlangt und ist Siegerin". Nuancen zwischen (1) und (2) sollen keineswegs geleugnet werden. Doch sind sie nicht von solcher Tragweite, daß sie den Logiker umzustimmen vermöchten, seine Implikation anders zu definieren.

Was sollen wir ferner von einer Implikation mit falschem Vordersatz halten? Es lassen sich auch hier Beispiele und Gegenbeispiele anführen, die unsere Definition der Implikation als sinnvoll oder als unvernünftig erscheinen lassen. Ein sinnvolles Beispiel wäre etwa das folgende:

(3) Wenn Karajan dirigiert, dann ist das Haus voll

Nehmen wir an, Karajan sei verhindert, so daß der Vordersatz falsch wird. Muß deswegen das Haus leer sein? Das entspricht nicht der Intuition; erfreulicherweise sind Konzerte nicht selten auch unter andern Dirigenten gut besucht. Es ist also nicht zum vornherein abwegig, eine Implikation mit falschem Vordersatz als wahr zu definieren.

Wie steht es schließlich bei der Implikation mit falschem Vordersatz und falschem Nachsatz? Auch hier gibt es umgangssprachliche Rechtfertigungen für das Vorgehen der Logiker. Göbbels soll gesagt haben: „Wenn wir den Krieg verlieren, dann heiße ich Meier". Mit dieser Implikation wollte er etwas Wahres sagen; er hielt es für ausgeschlossen, den Krieg zu verlieren und dachte nicht im entferntesten an eine Namensänderung. Beide Argumente galten in seinen Augen als falsch, die Aussage war als wahr vorgetragen und ist auch so verstanden worden.

Entscheidend für die Definition des Logikers ist letztlich nicht die Tatsache, daß er auf dieser Grundlage Beispiele vernünftig analysieren kann: es gibt genügend beunruhigende Gegenbeispiele. Der tiefste Grund für das strenge Festhalten des Logikers an der Definition seiner Implikation liegt im inneren Zusammenhang mit den andern Funktoren, an der Geschlossenheit des Systems.

Beispiele zur Implikation:

$H \rightarrow M$	1)	Wenn Heu dürres Gras ist, dann hat die Stunde 60 Minuten.
$\neg H \rightarrow M$	2)	Wenn Heu nicht dürres Gras ist, dann hat die Stunde 60 Minuten.
$H \rightarrow \neg M$	3)	Wenn Heu dürres Gras ist, dann hat die Stunde nicht 60 Minuten.
$\neg H \rightarrow \neg M$	4)	Wenn Heu nicht dürres Gras ist, dann hat die Stunde nicht 60 Minuten.

Welche Aussagen sind wahr?

Bei 1) sind ‚H' und ‚M' wahr, also auch die Implikation. Bei 2) ist ‚¬ H' falsch. Eine Implikation mit falschem Antezedens ist zum vornherein wahr, was sich auf 2) überträgt. Bei 3) haben wir einen wahren Vordersatz und einen falschen Nachsatz. Das ist der einzige Fall, bei dem eine Implikation falsch ist. Bei 4) haben wir es wieder mit einer wahren Implikation zu tun, weil Vordersatz und Nachsatz falsch sind.

2.4.5 Die Äquivalenz

Die Äquivalenz ist eine weitere zweistellige Funktion. Sie läßt sich an einem Beispiel etwa so ausdrücken: „Alice geht genau dann zum Ball, wenn sie eingeladen wird". Die Äquivalenz schreiben wir so: ‚A ↔ E'.

Der Wahrheitswert der Äquivalenz läßt sich aus dem Schriftbild ablesen: Der Funktor ist ein nach zwei Seiten gerichteter Pfeil. Für die Implikation haben wir den Wahrheitswert als 1011 definiert. Der Rückkehrpfeil gilt dual dazu als 1101. Zusammen ergibt das 1001, wie wir aus der Tabelle ersehen:

p	↔	q
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Die Äquivalenz ist also genau dann wahr, wenn beide Aussagen gleich sind, d.h. beide wahr oder beide falsch.

Sprachlich läßt sich die Äquivalenz durch verschiedene Wendungen wiedergeben: „... dann und nur dann, wenn ...", „... genau dann, wenn ...", „wenn ... dann ... und umgekehrt", „... ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für ..." usw. In wissenschaftlichen Texten sind überdies noch folgende Abkürzungen üblich:

deutsch: gdw = genau dann, wenn ...
frz.: ssi = si et seulement si ...
engl.: iff = if and only if ...

Die Umgangssprache empfindet all diese Ausdrücke meist als schwerfällig und sagt kurzerhand: „wenn ... dann ...“. Beispiel: „Wenn heute Montag ist, dann ist morgen Dienstag“. Dem Sachverhalt nach handelt es sich eindeutig um eine Äquivalenz und nicht um eine Implikation, was durchschaut sein muß, bevor die Formalisierung einsetzt.

Beispiele zur Äquivalenz:

$R \leftrightarrow K$	1)	Wenn die Figur rund ist, dann ist es ein Kreis.
$\neg A \leftrightarrow U$	2)	Genau dann, wenn der Hörer nicht aufgelegt wird, ist das Gespräch unterbrochen.

Welche Aussagen sind wahr?

Beispiel 1) ist richtig formalisiert. Die Wenn-dann-Aussage verbirgt eine Äquivalenz. Da beide Aussagen wahr sind, ist die ganze Aussagenverknüpfung wahr. Auch 2) ist richtig formalisiert. Hingegen sind die Wahrheitswerte ungleich, daher ist die Äquivalenz falsch.

Wir haben nun fünf Funktoren definiert und ihnen folgende Werte gegeben:

$\neg$	1	0		
$\wedge$	1	0	0	0
$\vee$	1	1	1	0
$\rightarrow$	1	0	1	1
$\leftrightarrow$	1	0	0	1

Mit dieser Erkenntnis lassen sich die folgenden Aufgaben leicht lösen.

Übung 2.4.5

1) Welche Aussagen sind wahr?
   1. $\neg$ (London liegt am Rhein).
   2. $(4 + 9 = 12) \vee$ (Nelken verbreiten einen angenehmen Duft).
   3. (Der Schnee ist schwarz) $\rightarrow$ (Der Schnee ist weiß).

4. (5 ist eine Primzahl) $\wedge$ (Einige Schweizer lieben Kartenspiele).
5. (Tauben fressen Schlagen) $\rightarrow$ (Paris liegt im Schwarzwald).
6. $\neg$ (Es gibt rote Rosen) $\vee$ (Manchmal regnet es in Luzern).
7. (Die Großmutter geht spazieren) $\vee$ (4 ist eine Quadratzahl).
8. (Franz ist Hausbesitzer) $\leftrightarrow$ (Franz bezahlt hohe Steuern).
9. (Alle Mädchen heißen Rita) $\rightarrow$ (Einstein war ein großer Physiker).

2) Formalisieren Sie die folgenden Aussagenverknüpfungen und geben Sie den Wahrheitswert an:
   1. Mücken sind Insekten, und das Tote Meer ist salzig.
   2. Einige Offiziere sind Piloten, und auf den Montag folgt der Sonntag.
   3. Ein ehemaliger UNO-Generalsekretär heißt Waldheim, oder Salat ist gesund.
   4. Tokio ist die Hauptstadt von Japan, oder Schneeglöcklein sind blau.
   5. Wenn Mozart ein Musiker war, dann ist $4 + 4 = 8$.
   6. Wenn $2 \cdot 3 = 7$ ist, dann war Mozart ein Musiker.
   7. Wenn der Jupiter keine Monde hat, dann ist John Amerikaner.
   8. Amseln singen melodiös, oder der Fiat ist ein italienisches Auto.
   9. Genau dann, wenn wir ein Raumplanungsgesetz haben, wird der Autofriedhof nicht mehr geduldet.
   10. Wenn der Computer ein Philips ist, spricht das für Qualität.

3) A und B sind wahr, X, Y, Z falsch. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte
   1. $A \wedge B$
   2. $A \wedge X$
   3. $\neg A \wedge X$
   4. $A \wedge \neg Z$
   5. $\neg\neg B \wedge \neg Y$

6. $\neg(\neg A \wedge Y)$
7. $\neg(A \wedge Z) \wedge (\neg Y \wedge B)$
8. $A \wedge B \wedge \neg(Y \wedge \neg Z)$
9. $\neg[A \wedge \neg(B \wedge \neg(Y \wedge \neg(Z \wedge \neg A)))]$
10. $A \vee Y$
11. $\neg A \vee Z$
12. $(A \wedge B) \vee \neg X$
13. $\neg A \vee \neg Z \vee \neg(A \wedge B)$
14. $A \to Y$
15. $Y \to A$
16. $A \to (B \vee \neg Z)$
17. $(Z \wedge A) \to (\neg A \vee B \vee \neg Z)$
18. $B \to [Y \to (Z \to \neg B)]$

4) Wie steht es mit der Wahrheit der folgenden Satzverknüpfungen, wenn die vier Aussagen eingesetzt werden:

P: Platon war Grieche	(wahr)
A: Aristoteles war der Lehrer von Alexander	(wahr)
K: Kant hat im Mittelalter gelebt	(falsch)
R: Russel war ein Freund von Hegel	(falsch)

a) 1. $(\neg R \vee K) \to P$
2. $\neg[\neg(K \to \neg A)]$
3. $(A \wedge \neg K) \to (P \wedge \neg R)$
4. $\neg P \vee (\neg A \to K)$
5. $\neg K \to \neg R$
6. $(\neg P \vee K) \to (A \wedge \neg R)$
7. $\neg(\neg P \vee \neg A) \vee R$
8. $\neg A \to (\neg K \wedge \neg R)$

b) Ändert sich der Wahrheitswert, wenn in 2, 4, 7, 8 ‚$\neg A$‘ durch ‚A‘ ersetzt wird, wenn in 3, 6 ‚A‘ durch ‚$\neg A$‘ ersetzt wird? Beantworten Sie die Fragen mit ja oder nein.

5) Wer sich nicht für mathematische Beweise interessiert, der mag 5) übergehen und gleich bei 2.5 weiterlesen. Für die andern wird hier nicht eine Aufgabe gestellt, sondern ein Beweis für die Einzigkeit der leeren Menge vorgelegt. Den Schlüssel dazu liefert die Implikation.

Es genügt zu zeigen, daß die leere Menge von A = der leeren Menge von B ist, also $\emptyset_A = \emptyset_B$. Das trifft dann und nur dann zu, wenn jedes Element von $\emptyset_A$ auch Element von $\emptyset_B$ ist.

1. a sei ein beliebiges, aber festes Element von A. Dann ist die Aussage „a ist ein Element von $\emptyset_A$“ sicher falsch. Folglich ist

(1) $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{a Element von } \emptyset_A}_{\substack{p\\0}}, \underbrace{\text{dann}}_{\substack{\rightarrow\\1}} \underbrace{\text{ist a Element von } \emptyset_B}_{q}\text{“ wahr.} \qquad \begin{array}{l} p = a \in \emptyset_A \\ q = a \in \emptyset_B \end{array}$$

Da ‚p‘ falsch ist, ist die ganze Implikation zum vornherein wahr, welches auch der Wert von ‚q‘ sein mag.

2. Ist nun b ein beliebiges festes Element der Menge B, so ist die Aussage „b ist Element von $\emptyset_B$“ ebenfalls falsch. Folglich ist die Implikation

(2) $$\text{„Wenn } \underbrace{\text{b Element von } \emptyset_B}_{\substack{q\\0}}, \underbrace{\text{dann}}_{\substack{\rightarrow\\1}} \underbrace{\text{ist b Element von } \emptyset_A}_{\substack{p\\0}}\text{“ wahr} \qquad \begin{array}{l} q = b \in \emptyset_B \\ p = b \in \emptyset_A \end{array}$$

Da die beiden Implikationen für jedes beliebige $a \in A$ und jedes beliebige $b \in B$ gelten, so ist tatsächlich $\emptyset_A = \emptyset_B$. Es gibt also nur eine Menge, die keine Elemente enthält. Sie heißt die leere Menge und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. Das war zu beweisen.

2.5 Die Auswertung der Wahrheitsfunktionen

Die Formalisierung oder Symbolisierung ist kein Ziel, sie ist bloß eine Durchgangsstufe. Sie befähigt uns zu einer exakten Auskunft darüber, wann eine Aussagenverknüpfung wahr oder falsch ist. Wenn uns beispielsweise jemand sagt, im letzten Jahr hätten sich die Autounfälle in unserem Land erhöht, dann nehmen wir eine solche Aussage zunächst als wahr hin, weil wir dem Wissen des Sprechers vertrauen. Wir können keinen logischen Grund geltend machen, nach dem der Satz in Zweifel zu ziehen wäre. Hingegen, wenn der gleiche Sprecher auch noch hinzufügt, im letzten Jahr hätten sich alle Arten von Unfällen in unserem Land verringert, dann greifen wir aus logischen Gründen ein. Dazu ist jeder Hörer berechtigt, selbst wenn der Sprecher ein berühmter Statistiker ist und wir von diesem Gebiet nichts verstehen. Denn die Behauptung „Autounfälle haben zugenommen und alle Arten von Unfällen haben sich verringert" ist widersprüchlich. Der Widerspruch ist aus logischen Gründen unhaltbar. Widerspruch oder Nichtwiderspruch läßt sich am Wahrheitswert der Aussagenverknüpfung ablesen. So bleibt uns zu zeigen, wie man zu diesen Wahrheitswerten kommt.

Für das Aufstellen der Wahrheitstafel wählen wir ein einfaches Beispiel. Wir gehen von einer Satzverknüpfung aus, von der wir zum vornherein wissen, daß sie wahr ist. Das ist sicher der Fall für „Die Sonne scheint genau dann, wenn die Sonne scheint". Zuerst symbolisieren wir diese Behauptung:

$$S \leftrightarrow S$$

Als nächsten Schritt zählen wir die Anzahl der Aussagen(konstanten oder -variablen). In unserem Beispiel ist es eine einzige, nämlich ‚S', die zweimal auftritt, also zwei Einsetzungen hat. Gemäß unserer Annahme hat eine Aussage genau zwei Wahrheitswerte, sie kann wahr oder falsch sein. Deshalb setzen wir unter alle ‚S' eine „1" und eine „0":

S	↔	S
1		1
0		0

Als dritter Schritt folgt die Auswertung der Äquivalenz. Wir vergleichen die Wahrheitswerte in den Spalten von oben nach unten. In unserem Beispiel haben wir in der ersten Zeile zweimal eine „1". Gemäß unserer Äquivalenzdefinition (1001) ergibt die Äquivalenz zwischen zwei „1" selber eine „1". Deshalb schreiben wir unter „↔" zwischen die beiden „1" eine „1". Anschließend erfolgt der Vergleich der zweiten Zeile. Die Definition der Äquivalenz besagt, daß dann, wenn beide Argumente den Nullwert haben (1001), der Gesamtwert wieder „1" ist. Diese „1" setzen wir in die zweite Zeile. Das ergibt folgendes Bild:

S	↔	S
1	1	1
0	1	0

Die Spalte unter dem Funktor „↔“ enthält jetzt zwei „1“. Das ist unser Beweis für die logische Wahrheit des Ausdrucks. Wenn in der Spalte des Hauptfunktors – hier haben wir nur einen Funktor und deshalb nimmt er auch die Stelle eines Hauptfunktors ein – alle Stellen mit „1“ belegt sind, dann ist die Verknüpfung immer wahr, wie im vorliegenden Beispiel. Stehen unter dem Hauptfunktor nur „0“, dann ist der Ausdruck immer falsch. Zeigen sich „1“ und „0“ gemischt, dann können wir die Bedingungen angeben, unter denen die Verknüpfung wahr oder falsch ist.

Bereits komplizierter wird der Nachweis in einem Beispiel mit zwei Variablen:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$$

Hier liegen zwei Variable vor, ‚p‘ und ‚q‘. Bei zwei Variablen gibt es vier Kombinationsmöglichkeiten von wahr–falsch. Wir schreiben sie gleich unter die entsprechenden Variablen:

(p	∨	q)	↔	(q	∨	p)
1		1		1		1
1		0		0		1
0		1		1		0
0		0		0		0

Der Hauptfunktor ist hier die Äquivalenz. Zuerst müssen die Nebenfunktoren ausgewertet werden. Deshalb beginnen wir sogleich mit ‚p ∨ q‘. Die Definition der Disjunktion besagt, daß die Disjunktion nur dann falsch ist, wenn ihre beiden Argumente falsch sind. Das ist spaltenabwärts in der 4. Zeile der Fall. Wir setzen dort eine „0“ ein. Die übrigen drei Zeilen bekommen eine „1“. Nun gehen wir zur Auswertung des zweiten Funktors über. ‚q ∨ p‘ ist wiederum eine Disjunktion und auch sie bekommt in der letzten Zeile eine „0“. Jetzt sieht unser bisheriges Resultat – um die Übersicht zu erleichtern, lassen wir die ‚p‘ und ‚q‘ Werte weg, die wir jetzt ohnehin nicht mehr brauchen – so aus:

(p	∨	q)	↔	(q	∨	p)
	1		1		1	
	1		1		1	
	1		1		1	
	0		1		0	

Es muß deutlich und eindeutig erkennbar sein, welches der Hauptfunktor ist, der zuletzt auszuwerten ist. Dazu stehen Klammern zur Verfügung. Es sei nochmals daran erinnert, daß die Funktoren enger binden in der Reihenfolge, wie wir sie aufgezählt haben, also $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Das hat zur Folge, daß etwa bei der Formel

$$p \vee \neg q$$

nach dem Anschreiben der Wahrheitswerte unter ‚p‘ und ‚q‘ zuerst die Negation auszuwerten ist und erst dann die Disjunktion. Eine allfällige Zweideutigkeit ist durch Klammern zu beheben. Dabei wird die aus der Arithmetik bekannte Regel von der Logik übernommen: Klammern sind von innen her aufzulösen.

Bei den folgenden Beispielen sind die Schritte numeriert, wie sie der Reihe nach auszuführen sind. Die höchste Zahl, also der letzte auszuführende Schritt, gibt jeweils den Hauptfunktor an.

	2		1	
p	$\rightarrow$	(p	$\vee$	p)
1	1	1	1	1
0	1	0	0	0

2	1		3	
$\neg$	$\neg$	p	$\leftrightarrow$	p
1	0	1	1	1
0	1	0	1	0

	3	2		1	
p	$\vee$	$\neg$	(p	$\rightarrow$	q)
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0

5		4		6	1		3	2	
$\neg$	(p	$\vee$	q)	$\leftrightarrow$	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Das 3. Beispiel ist falsch, was sich daraus ersehen läßt, daß unter dem Hauptfunktor 3 in der vierten und fünften Zeile je eine „0" steht. Beim letzten Beispiel hätten wir auf der linken Seite beginnen können, also in der Reihenfolge: 4, 5, 1, 2, 3, 6.

Bisher haben wir in unseren Beispielen jeweils eine oder zwei Variable zugelassen. Es gibt keinen Grund für eine solche Beschränkung. Wenn jedoch drei, vier oder noch mehr Variable auftreten, dann nimmt die Kombinationsmöglichkeit der Wahrheitswerte in rascher Folge zu:

1 Variable	$2^1 = 2$ Zeilen
2 Variable	$2^2 = 4$ Zeilen
3 Variable	$2^3 = 8$ Zeilen
4 Variable	$2^4 = 16$ Zeilen
5 Variable	$2^5 = 32$ Zeilen
n Variable	$2^n = 2^n$ Zeilen

Bei drei Variablen schreiben wir die Wahrheitswerte analog unter die betreffenden Buchstaben. Es empfiehlt sich dabei, systematisch vorzugehen. Die erste Variable wird zur Hälfte mit „1" belegt, der Rest, d.h. die andere Hälfte mit „0". Bei der zweiten Variablen wird jede Hälfte nochmals unterteilt und bei der dritten finden wir fortwährende Abwechslung von „1" und „0". Das sieht so aus:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Das gleiche Verfahren wird bei vier und mehr Variablen angewandt. Bei p, q, r, s haben wir $2^4 = 16$ Zeilen. Deshalb wird unter ‚p' in den ersten 8 Zeilen „1" gesetzt, in den übrigen überall „0". Bei der zweiten Variable ‚q' zuerst 4mal „1", dann 4mal „0", wieder 4mal „1" usw. Bei der dritten jeweils mit 2mal „1", 2mal „0" usw. und bei der letzten abwechslungsweise „1" und „0".

Beispiel mit 3 Variablen:

	1		5		2		4		3	
(p	↔	q)	→[(p		∧	m)	→	(q	∧	m)]
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0

Übung 2.5

1) Beweisen Sie mit Hilfe der Wahrheitstabellen die Gültigkeit der folgenden Aussagenverknüpfungen:

1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $q \rightarrow (p \vee q)$
3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
5. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$

Das sind die 5 Axiome der *Principia Mathematica* von Whitehead/Russell. Ihre Gültigkeit ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, um ein Axiomensystem zu konstituieren. Anstelle von 4. und 5. ist denn auch von Bernays eine Verbesserung vorgeschlagen worden:

4a. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

Beweisen Sie auch die Gültigkeit von 4a.

2) Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Axiome, die Frege seinem System zugrunde legt:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$
3. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

5. $\neg\neg p \to p$
6. $p \to \neg\neg p$

3) 1. Wenn Hans spazieren geht, dann nimmt er den Hund mit.
Formalisieren Sie die Aussage 1. und kontrollieren Sie, ob sie dasselbe besagt wie: „Wenn Hans nicht spazieren geht, dann nimmt er den Hund nicht mit".
2. Wenn Werner mit einem Auto fährt und es ein Sportwagen ist, dann ist es ein Jaguar.
Ist 2. identisch mit (a) oder (b)
(a) $(W \wedge S) \to J$ (b) $W \to (S \wedge J)$
3. Wenn der Hund bellt, dann fürchte ich mich.
a) Wie lautet diese Aussage verneint?
b) Prüfen Sie das Resultat mit der Wahrheitstabelle nach.
4. Wenn Urs keinen Fehler macht, dann wird er belohnt. Folgt daraus logisch, daß ihm die Belohnung entzogen wird, falls er einen Fehler macht?
5. $[p \wedge (p \to q) \to q] \leftrightarrow [p \to ((p \to q) \to q)]$

4) Welche der folgenden Aussagen oder Aussagenverknüpfungen werden impliziert von $p \vee q$?
1. p
2. q
3. $p \vee q$
4. $p \wedge q$
5. $\neg p \vee q$
6. $p \wedge \neg q$
7. $\neg q \to p$
8. $p \leftrightarrow q$

5) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?
1. $(p \to q) \leftrightarrow (p \vee q)$
2. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
3. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
4. $(p \to q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
5. $(p \to q) \leftrightarrow (p \to q)$
6. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

2.5.1 Tautologie, Kontradiktion und Kontingenz

Tautologie und Kontradiktion nehmen in der Logik eine Sonderstellung ein. Es sind zwei Grenzfälle, mit denen wir vorsichtig umzugehen haben. Deshalb ist es nötig, genau zu wissen, was sie besagen.

Tautologie:
Als Beispiel einer Tautologie wollen wir die folgende Aussagenverknüpfung betrachten:

(1) $p \vee \neg p$

Daß es sich hier tatsächlich um eine Tautologie handelt, das läßt sich an der Bewertung erkennen. In der Spalte unter dem Hauptfunktor sind alle auftretenden Werte 1. Die wahren Bewertungen einer Aussagenverknüpfung bilden den Spielraum. Eine Tautologie ist demnach dadurch gekennzeichnet, daß sie den totalen Spielraum hat, während etwa die Aussagenverknüpfung ‚$p \wedge q$' nur den Spielraum der ersten Zeile hat.

Eine Tautologie ist trivialerweise wahr, weil sie den totalen Spielraum hat, denn aufgrund des totalen Spielraumes schließt sie keine Möglichkeit aus, und deshalb nennt man sie auch Leerformel. Eine Tautologie bleibt wahr, welcher konkrete Sachverhalt auch immer vorliegen mag. Deshalb sagt derjenige, der eine Tautologie ausspricht, nicht etwas Falsches, aber er vermittelt keine Information.
Es ist in weiten Kreisen üblich, eine leicht durchschaubare Tautologie zu belächeln. Das gilt etwa für die Behauptung „Es regnet oder es regnet nicht", was eine Einsetzung für das Beispiel (1) ist. Gewiß ist das trivial, aber Trivialität, Tautologie oder Leerformel darf weder mit Lächerlichkeit noch mit Einfalt verwechselt werden. Der tautologische Gehalt kann manchmal übersehen werden, weil er verschleiert ist, wie im Beispiel „Hans schläft oder ist wach". Was der gesunde Menschenverstand bei hinreichender Anstrengung noch zu bewältigen vermag, das gelingt ihm in abnehmendem Maße mit der Steigerung der Komplexität von Aussagenverknüpfungen. Spätestens bei einer Aussagenverknüpfung mit fünf Variablen wird auch für einen denkgewohnten Wissen-

schaftler eine Tautologie völlig undurchschaubar. Er ist dann auf eine Methode für die Wahrheitsauswertung angewiesen.

Der Laie fragt sich erstaunt, zu was Tautologien nützlich sein könnten, wenn sie zugegebenermaßen leer sind. Nun, die Leere bezieht sich einzig auf die Information hinsichtlich der Wirklichkeit. Dadurch werden Tautologien freilich nicht, wie man voreilig vermuten möchte, wertlos. Als immer wahre Aussagenverknüpfungen sind Tautologien logische Gesetze. Da sie die Eigenschaft haben, zum vornherein gültig zu sein, bedeutet das einerseits, daß sie keinen empirischen Sachverhalt hervorbringen, andererseits, daß sie ohne empirische Prüfung auskommen. Was aus logischen Gründen wahr ist, ist immer wahr; oder was dasselbe ist, es ist tautologisch oder trivialerweise wahr.

Kontradiktion:
Die Kontradiktion läßt sich allgemein so formulieren:

(2) $p \wedge \neg p$

Die Auswertung zeigt uns unter dem Hauptfunktor lauter Nullen. Damit haben wir den leeren Spielraum. Der leere Spielraum darf nicht verwechselt werden mit der Leerformel; die Kontradiktion ist die Verneinung einer Leerformel.

Wer eine Kontradiktion ausspricht, der behauptet zum vornherein etwas Unsinniges. Ebensowenig wie für die Tautologie muß für die Kontradiktion eine Auskunft von irgendeinem Sachgebiet eingeholt werden. Eine Kontradiktion ist eine logische Kategorie, der in der Wirklichkeit nichts entspricht. In der materiellen oder geistigen Welt finden wir nur Gegensätze wie hart–weich, gut–bös usw., aber nicht gleichzeitig hart und nicht hart. Eine vermeintliche Kontradiktion in der Wirklichkeit ist ein Anzeichen für eine mangelhafte Beschreibung eines Sachverhaltes.

Manchmal wird Kontradiktion gleichgesetzt mit Absurdität. Wenn etwa einem Politiker vorgeworfen wird, er rechtfertige die Sklaverei, dann mag er antworten: „Das ist absurd". Der Hörer versteht dann „das habe ich nie gesagt", „das kann ich gar nicht gesagt haben" usw. Wer das Wort „absurd" benutzt, der meint für gewöhnlich noch etwas Zusätzliches, nämlich, die Anschuldigung stehe in Widerspruch zu seinen oder zu allgemein anerkannten Prinzipien.

Nur weil Tautologien logische Gesetze und Kontradiktionen die Verneinung von logischen Gesetzen sind, haben sie diese unbeschränkte Gültigkeit. Während die Kontradiktion in der Rede unter allen Umständen zu vermeiden ist, besitzt die Tautologie eine Nützlichkeit, die sich allerdings nicht auf faktische Aussagen bezieht.
Kontingenz:
Unter Kontingenz verstehen wir hier eine Aussagenverknüpfung, die wahr oder falsch sein kann. Beispiel: „Wenn es Mittwoch ist, dann ist die Bäckerei geschlossen".

(3) $M \rightarrow G$

Die Wahrheitstafel würde eine Mischung zwischen „1" und „0" zeigen, nämlich in der zweiten Zeile eine „0", in allen übrigen eine „1". Da unter den vier Zeilen aus logischen Gründen keine einen Vorzug besitzt, so haben wir es mit einer logisch indeterminierten Form zu tun. Ob heute Mittwoch ist oder ein anderer Wochentag, ob die Bäckerei offen oder geschlossen ist, diese beiden Fragen können nicht mit logischen Mitteln entschieden werden. Die vorgängige Bestimmung des Wahrheitswertes der Einzelaussagen ist jedoch Voraussetzung für die Beurteilung der Gesamtwahrheit von Beispiel (3). Darin zeigt sich der Unterschied zu den Tautologien, die zum vornherein wahr, und der Kontradiktionen, die zum vornherein falsch sind, welchen Wahrheitswert auch immer die einzelnen Aussagen tatsächlich annehmen mögen.

Kontingente Aussagen sind logisch nicht eindeutig festgelegt und nur aufgrund weiterer empirischer Informationen entscheidbar. Ihr Wahrheitsgehalt kann nicht durch die Logik allein bestimmt werden.

Wenn in der Philosophiegeschichte von Kontingenz gesprochen wird, so ist darunter etwas anderes zu verstehen. Auf diesen Kontingenzbegriff werden wir in anderem Zusammenhang noch zu sprechen kommen.

Übung 2.5.1

1) Der kleine Prinz

„Der kleine Prinz blieb stehen, und da er müde war, gähnte er. ‚Es verstößt gegen die Etikette in Gegenwart eines Königs zu gähnen', sagt der Monarch. ‚Ich verbiete es dir'. ‚Ich kann es nicht unterdrücken', antwortete der kleine Prinz ganz verwirrt. ‚Ich habe eine weite Reise gemacht und habe nicht geschlafen'. ‚Dann', sagte der König, ‚befehle ich dir zu gähnen. Ich habe seit Jahren niemanden gähnen sehen, das Gähnen ist für mich eine Seltenheit. Los! Gähne noch einmal! Es ist ein Befehl'. ‚Das ängstigt mich, ich kann nicht mehr', stammelte der kleine Prinz und errötete. ‚Hm, hm!' antwortete der König. ‚Also dann befehle ich dir, bald zu gähnen und bald ...' Denn der König hielt in hohem Maße darauf, daß man seine Autorität respektiere. Er duldete keinen Ungehorsam. Er war ein absoluter Monarch. Aber da er sehr gütig war, gab er vernünftige Befehle." A. de Saint-Exupéry, Der kleine Prinz (München 1978) 3, 521.

Weisen Sie nach, daß sich der kleine Prinz strikte an den Befehl des Königs hält. Warum?

2) „Sätze, in denen das ‚x' vorkommt, gelten als Leerformeln. So jedenfalls in einem Wittgensteinischen oder in einem an ein solches sich anlehnenden Sprachspiel". H. Ogiermann, Metaphysik der Zukunft. Festschr. J.B. Lotz. (Hg.) de Vries (J.)/Brugger (W.) (Frankfurt a.M. 1973) 74.

Wie beurteilen Sie diese Behauptung (ohne bei Wittgenstein nachzusehen)?

3) „Das Sein ist nicht unmittelbar in sich widersprüchlich, es begründet jedoch die Möglichkeit des Widerspruchs, die jederzeit eintreten kann. Der Widerspruch selbst ist indessen ausgeschlossen." P.-C. Courtès, Teilhabe und Kontingenz bei Thomas von Aquin. (Hg.) K. Bernath, Thomas von Aquin. Philosophische Fragen (Darmstadt 1981) 2, 275.

1. Was ist von der Möglichkeit eines Widerspruchs zu halten, die jederzeit eintreten kann, während der Widerspruch ausgeschlossen ist?

2. Wie kann der Autor sein Anliegen verständlich formulieren?

4) „(1) Eine ‚Leerformel' von der Form: ‚X ist entweder A oder nicht A' enthält nämlich immerhin insofern eine ‚Information', das heißt, eine bestimmte Aussage über etwas, als in einem solchen Satz zumindest die mögliche Verwirklichung *zweier Fälle*, nämlich ‚A' und ‚nicht A', vorausgesetzt wird. (2) Ein solcher Satz wäre also zumindest insofern keine Leerformel, als er sowohl das Bestehen als auch das Nichtbestehen eines Sachverhalts einkalkuliert. (3) Formallogisch kann zwar der Satz: ‚X ist A oder nicht A' niemals falsch sein, weil er immer dann wahr ist, wenn eins von beiden wahr ist. (4) Empirisch dagegen kann ein Satz gerade dadurch falsch werden, daß er zwei Möglichkeiten unterstellt, von denen empirisch nur eine gegeben ist. (5) So ist der Satz: ‚Der Papst ist entweder katholisch oder er ist nicht katholisch' formal nicht zu beanstanden, empirisch aber falsch, da der Papst nur katholisch sein kann ... (6) Ein Satz, der in seinem ‚oder'-Teil eine andere Möglichkeit auch nur in Betracht zieht, müßte also insofern als falsch bezeichnet werden, als diese Möglichkeit im vorliegenden Fall tatsächlich nicht gegeben ist. (7) An unseren Beispielen läßt sich nun sehr schön zeigen, wie fragwürdig es ist, Sätze von der Form: ‚X ist A oder nicht A' als ‚Leerformeln' zu disqualifizieren." H. Seiffert, Einführung in die Wissenschaftstheorie (München ^{5}1972) *1*, 229–230.

Beurteilen Sie jeden einzelnen Satz ganz genau.

2.5.2 Die teilweisen Wahrheitstafeln

Bei der Auswertung von 2 Variablen bekommen wir in der Wahrheitstafel 4 Zeilen, mit 3 Variablen bereits 8 Zeilen. Sollten wir es gar mit 5 Variablen zu tun haben, dann wird es mühsam, die Wahrheitstafel mit den 32 Zeilen auszufüllen. Eine solche Wahrheitstafel gibt uns eine totale Übersicht über alle Wahrheitswerte. Oft sind wir jedoch gar nicht an solcher Vollständigkeit interessiert; statt dessen möchten wir manchmal mit geringem Aufwand herausbekommen, ob eine Satzverknüpfung tautologisch ist. Das kann indirekt nachgewiesen werden. In der Praxis erleichtern Teilweise-Wahrheitstafeln die Auswertung.

Von einer tautologischen Formel weiß man, daß sie immer wahr ist. Nun gehen wir von der Annahme aus, die zu prüfende Formel sei falsch. Das wird angedeutet, indem unter den Hauptfunktor provisorisch der Wahrheitswert „0“ gesetzt wird. Wenn sich aus den Folgerungen ein Widerspruch ergibt, so ist das ein Beweis dafür, daß die Annahme nicht berechtigt war und es sich tatsächlich um eine tautologische Formel handelt. Entsteht jedoch kein Widerspruch, so wird dadurch die falsche Annahme bestätigt und es handelt sich nicht um eine Tautologie.

Beispiel:

$$p \leftrightarrow p$$

Wir nehmen an, die Äquivalenz sei falsch. Daher setzen wir unter das Äquivalenzzeichen eine „0“. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

a) ‚p‘ sei wahr. Dann wird unter ‚p‘ eine 1 gesetzt. Das zweite ‚p‘ ist eine Einsetzung oder eine Wiederholung der gleichen Variable, muß also ebenfalls mit „1“ unterstellt werden. Die Äquivalenz zweier wahrer Aussagen ist jedoch wahr, so daß sich die ursprüngliche Annahme „0“ als falsch erwiesen hat.

b) ‚p‘ sei falsch. Dann belegen wir die Variable ‚p‘ mit „0“. Für das zweite ‚p‘ muß ebenfalls eine 0 gesetzt werden. Die Äquivalenz zweier falscher Aussagen ist aber wahr, so daß wir wiederum 1 bekommen und sich die Annahme als falsch herausgestellt hat. Infolge der gescheiterten Widerlegung hat sich das Beispiel als wahr erwiesen.

Die Widerlegung der falschen Annahme ist auf zwei Arten durchgeführt worden. Zur Überprüfung genügt eine der beiden Kontrollen a) oder b). Hier sollte nur gezeigt werden, daß ein zufälliges Herausgreifen eines Wahrheitswertes die Prüfung nicht beeinflußt.
Weiteres Beispiel:

$$\begin{array}{cccccccccc}
(p & \lor & q) & \rightarrow & \neg & (p & \land & q) \\
 & 1 & & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & 0 & & &
\end{array}$$

Aufgrund der Annahme, die Aussage sei falsch, setzen wir eine 0 unter die Implikation, unter den Hauptfunktor. Eine Implikation ist nur falsch, wenn der Vordersatz wahr und der Nachsatz falsch ist. Deshalb setzen wir unter den Hauptfunktor des Vordersatzes eine 1, unter den Nachsatz eine 0. Beim Vordersatz hätten wir nun drei verschiedene Fälle zu überprüfen. Daher wenden wir uns dem einfacheren Nachsatz zu. Wenn ‚$\neg$ (p $\wedge$ q)' falsch ist, dann muß die Bejahung, also ‚(p $\wedge$ q)' wahr sein. Eine Konjunktion ist nur wahr, wenn alle Argumente wahr sind. Folglich sind ‚p' und ‚q' wahr. Dann ist aber die Verneinung dieser Konjunktion, also ‚$\neg$ (p $\wedge$ q)' falsch, was mit der ursprünglichen Annahme übereinstimmt. Es ist also nicht gelungen, die Annahme von der Falschheit zu widerlegen. Deshalb ist das Beispiel tatsächlich falsch.

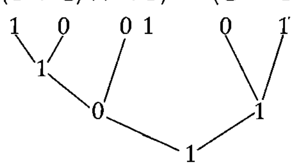
Wenn uns der Wahrheitswert der Aussagen bekannt ist, dann können wir auch den umgekehrten Weg wählen.

Beispiel:

Wilhelm Tell war ein Schweizer	T
Winston Churchill war ein Franzose	C

Falls Tell ein Schweizer oder Churchill ein Franzose, jedoch Tell kein Schweizer war, dann gilt, daß wenn Churchill ein Franzose war, Tell ein Schweizer war.

$$((T \vee C) \wedge \neg T) \rightarrow (C \rightarrow T)$$



Übung 2.5.2

1) Prüfen Sie die Wahrheit der folgenden Aussagenverknüpfung mit Hilfe von teilweisen Wahrheitstafeln

1. $(p \vee p) \rightarrow (p \wedge p)$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$

3. $\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \wedge p) \rightarrow (q \wedge r)]$
5. $[p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow \neg q]$
6. $[p \leftrightarrow (\neg q \vee p)] \rightarrow (q \wedge \neg p)$
7. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)$
8. $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

2) Wenn Urs und Gabriela in der Schule sind, dann spielt Heidi auf der Flöte, und wenn Othmar auf dem Cembalo spielt, dann ist Gabriela nicht in der Schule, und wenn Franz auf Besuch kommt, dann hört Heidi mit der Flöte auf zu spielen, und wenn alles dies zutrifft, dann spielt Othmar auf dem Cembalo, vorausgesetzt, daß Urs in der Schule ist und Franz auf Besuch kommt. (Ockham, 14. Jahrhundert. Vgl. J. Salamucha, Die Aussagenlogik bei Wilhelm Ockham. Franziskan. Studien 32 (1950) 116.)
Prüfen Sie 2) mit einer teilweisen Wahrheitstafel.

3) Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.
1. Jede Disjunktion, bei der ein Argument eine Tautologie ist, ist tautologisch.
2. Jede Disjunktion, bei der ein Argument eine Kontradiktion ist, ist als ganze kontradiktorisch.
3. Jede Konjunktion mit einer Tautologie ist eine Tautologie.
4. Jede Konjunktion mit einer Kontradiktion ist eine Kontradiktion.
5. Jede Implikation, deren Vordersatz eine Tautologie ist, ist eine Tautologie.
6. Jede Implikation, deren Vordersatz eine Kontradiktion ist, ist eine Kontradiktion.
7. Jede Implikation, deren Nachsatz eine Tautologie ist, ist eine Tautologie.
8. Jede Implikation, deren Nachsatz eine Kontradiktion ist, ist eine Kontradiktion.
9. Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie.
10. Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion.

11. Jede Implikation, deren Vordersatz kontingent ist, ist kontingent.
12. Jede Implikation, deren Nachsatz kontingent ist, ist kontingent.

2.5.3 Zwischenergebnis

Der verständnisvolle Umgang mit den Wahrheitstafeln verschafft uns mindestens drei wertvolle Einsichten:

– Die Aussagenlogik besitzt ein Entscheidungsverfahren. Darunter verstehen wir ein mechanisches Vorgehen, bei dessen Anwendung jede Aussagenverknüpfung nach einer endlichen Anzahl von Schritten auf ihre Gültigkeit hin eindeutig geprüft werden kann. Wahrheit oder Falschheit kann aufgrund einer allgemein anerkannten und überprüfbaren Methode nachgewiesen werden, es bleibt nicht mehr der Einsicht des einzelnen überlassen. Dieses rechnungsähnliche Prüfverfahren, ja schon der ganze Aufbau, hat dazu geführt, von einem Kalkül zu reden.

– Bei Aussagenverknüpfungen kommt dem Spielraum große Bedeutung zu. Liegt der totale Spielraum vor wie bei der Tautologie, dann haben wir eine informationsleere Verknüpfung vor uns. Der leere Spielraum ist gleichbedeutend mit einem Widerspruch. Aus der Gegenüberstellung ergibt sich, daß jene Behauptungen aussagekräftiger sind, die den eingeschränkteren Spielraum haben. Deshalb ist der Informationsgehalt einer Konjunktion wertvoller als derjenige einer Disjunktion.

– Logische Gesetze sind Tautologien oder allgemeingültige Strukturgesetze. Wissenschaftler neigen manchmal dazu, sie und die Folgerungen aus ihnen für notwendig zu halten. Das kann durchaus richtig verstanden werden. Nur bleibt zu beachten, daß es noch einen strengeren Notwendigkeitsbegriff gibt; er steht korrelativ zur Allgemeingültigkeit, die hier nicht absolut behauptet wird. Die Allgemeingültigkeit der Aussagenlogik bezieht sich auf den Rahmen, in dem die Definitionen aufgestellt wurden. Die Abklärung der Frage, wie weit Tautologien Denk- oder gar Seinsgesetze ausdrücken, gehört in den Bereich der Erkenntnistheorie, wozu hier nicht Stellung genommen wird.

2.6 Die Deduktion

„Eine einzelne Aussage ist wahr, wenn sie mit der Wirklichkeit übereinstimmt". Solche Aussagen sind Beschreibungen. Wenn wir argumentieren, dann ist vieles an unserer Rede nicht beschreibend, sondern gefolgert. Eine gültige Folgerung setzt jedoch voraus, daß die logischen Strukturen respektiert werden. Mit Hilfe von Wahrheitstafeln können wir diese Bedingung zwar nachprüfen. Doch bleibt weiterhin offen, welche Regeln wahrheitskonservierend sind, d.h. welche Regeln zu Schlüssen führen ohne den in den Prämissen enthaltenen Wahrheitswert zu ändern.

Die Regeln dienen dazu, aus unseren Behauptungen weitere wahre Behauptungen abzuleiten. Grundsätzlich kommt man mit sehr wenigen Regeln aus. Eine größere Anzahl erlaubt indessen kürzere Ableitungen. Da insbesondere dem Anfänger kürzere Ableitungen durchsichtiger erscheinen, wollen wir uns den Umgang mit verhältnismäßig vielen Regeln aneignen. Wir verzichten also auf Sparsamkeit zugunsten einer verständlicheren Darstellung.

Unsere zwanzig Regeln unterteilen wir in zwei Gruppen: Schluß- und Äquivalenzregeln. Dazu sei noch bemerkt, daß die Kinder in den frühesten Jahren die meisten der hier besprochenen Regeln zusammen mit der Sprache erlernen.

Bei der Darstellung der Regeln wählen wir einen einheitlichen Ablauf. Zuerst wird die Regel in ihrer allgemeinen Formulierung vorgelegt. Daran schließen sich soweit nötig Bemerkungen an, gefolgt von einer unterschiedlichen Anzahl von Beispielen. Schließlich kann der Leser an den Übungen sein Verständnis der Regeln nachprüfen.

Schlußregeln

1. Modus ponens (MP)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{p\qquad\;\;} \\ \qquad\; q \end{array}}$$

Oberhalb des Striches stehen die Prämissen, unterhalb alles, was gefolgert werden darf. Wir haben es demnach beim Modus ponens mit zwei Prämissen zu tun, aus denen eine einzige Folgerung abzuleiten ist. In Worten können wir die Regel so ausdrücken: Wenn eine Implikation gegeben ist und zugleich ihr Vordersatz, dann dürfen wir auf ihren Nachsatz schließen. Es handelt sich um Schlüsse der folgenden Art:

1. Wenn Kurt Bundesrat ist, dann wohnt er in Bern
2. Kurt ist Bundesrat
3. Also wohnt er in Bern

Dieser Schluß kommt uns natürlich vor. Der Eindruck der Selbstverständlichkeit rührt daher, weil eine Regel verwendet wird, mit deren Allgemeingültigkeit wir längst vertraut sind, nämlich die Abtrennungsregel oder Regel des Modus ponens.

Zur Überprüfung einer Deduktion wählen wir eine einheitliche Schreibweise. Wir beginnen mit der Formalisierung der Prämissen. Für das genannte Beispiel erhalten wir:

1. $A \rightarrow B$
2. A

Nachdem alle Prämissen aufgezählt sind, wird rechts von der letzten Prämisse das gesuchte Resultat in $\underline{/\quad\;}$ hingesetzt. Bei unserem Beispiel ist es ‚B'. Das sieht dann so aus:

1. $A \rightarrow B$
2. A $\qquad \underline{/\;\; B}$

Die weiteren Schritte werden fortlaufend numeriert. Auf der rechten Seite zeigen die Zahlen und Regelabkürzungen an, aus welchen Zeilen und mit welchen Regeln die betreffende Behauptung erarbeitet wurde. Dann sieht unser Beispiel, vollständig formalisiert, so aus:

1. $A \rightarrow B$
2. A $\qquad \underline{/\therefore B}$
3. B $\qquad$ 1, 2, MP

„MP" bedeutet, daß mit der Regel Modus ponens geschlossen wurde und zwar unter Verwendung der ersten und zweiten Prämisse. Nachdem uns diese Regel tatsächlich zum gesuchten ‚B' geführt hat, setzen wir davor noch drei Punkte, so: $\therefore$. Sie bedeuten: Quod erat demonstandum = was zu beweisen war.

Weitere Beispiele:

1. Wenn es nicht regnet, dann besuche ich die Tante
2. Es regnet nicht
3. Also besuche ich die Tante

Formal:

1. $\neg R \rightarrow T$	
2. $\neg R$	$/\therefore T$
3. T	1, 2, MP

Aus diesem Beispiel ersehen wir, daß es unerheblich ist für die Anwendung des Modus ponens, ob der Vordersatz bejaht oder verneint ist. Die Regel darf immer dann angewandt werden, wenn die zusätzliche Prämisse genau dem Vordersatz entspricht. Deshalb gilt auch:

1. Wenn es Samstag oder Sonntag ist, dann geht Gisela ins Konzert
2. Es ist Samstag oder Sonntag
3. Also geht sie ins Konzert.

1. $(S \vee T) \rightarrow K$	
2. $S \vee T$	$/\therefore K$
3. K	1, 2, MP

Falsch wäre jedoch die folgende Ableitung:

1. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$	
2. A	$/ \quad B$
3. B	

Mit der einzigen Zusatzprämisse ‚A' darf aus der Implikation in 1. nichts abgeleitet werden.

Übung 2.6.1

1) 1. Wenn das Baby schläft, dann ist es friedlich

2. Das Baby schläft
3. Also ist es friedlich

2) 1. Wenn der Käse Löcher hat, dann ist es Emmentaler
2. Der Käse ist Emmentaler
3. Also hat er Löcher

3) 1. $((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (f \vee s)$
2. $(p \wedge q) \vee r$ $\quad \underline{/\qquad\quad}$

4) Wie ist die Redeweise logisch zu erklären: „Wer A sagt, muß B sagen"?

2. Modus tollens (MT)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\neg q \quad} \\ \quad \neg p \end{array}}$$

Die Regel des Modus tollens kommt zur Anwendung, wenn außer der Implikation als Zusatzprämisse die Verneinung des Nachsatzes vorliegt. Dann darf auf die Verneinung des Vordersatzes geschlossen werden.

1. Wenn Markus den Zug verpaßt hat, dann ist er in Berlin geblieben
2. Er ist nicht in Berlin geblieben
3. Also hat er den Zug nicht verpaßt

1.	$V \rightarrow B$	
2.	$\neg B$	$\underline{/\therefore \neg V}$
3.	$\neg V$	1, 2, MT

Der Anfänger unterläßt es oft aus Unachtsamkeit, den mit Hilfe des Modus tollens erschlossenen Vordersatz zu verneinen, insbesondere dann, wenn er in der Implikation schon verneint ist.

Beispiel:
1. Wenn es nicht kalt ist, dann trägt Silvia keinen Pelz.
2. Nun trägt sie einen Pelz.
3. Also ist es kalt.

1. $\neg K \rightarrow \neg P$
2. P $\quad\quad$ $\underline{/\therefore\ K}$
3. $\neg\neg K$ $\quad\quad$ 1, 2, MT

Wie wir schon bei der Auswertung der Wahrheitstafeln gesehen haben, so hebt sich auch hier die doppelte Negation auf. Das ist so selbstverständlich, daß man beim inhaltlichen Überlegen des Beispiels die doppelte Negation meistens unterdrückt. Wir wollen uns allgemein merken: eine gerade Anzahl von Negationen hebt sich auf.

Übung 2.6.2

1) Wenn Gabriela weiter spielt, dann kommt sie zu spät. Gabriela kommt nicht zu spät. Also spielt sie nicht weiter.

2) Wenn es schneit, dann reisen die Touristen nicht ins Engadin. Die Touristen reisen ins Engadin. Also?

3) 1. $(p \vee q) \rightarrow \neg (r \wedge \neg s)$

   2. $r \wedge \neg s$ $\quad\quad$ $\underline{/\quad\quad\quad}$

4) Wenn Protagoras gegen die Götter geschrieben hat, dann wurde er gemäß dem Strafgesetz zu Recht verurteilt. Wenn er nicht gegen die Götter geschrieben hat, dann ist seine Einleitung neu zu überdenken. Er ist nicht zu Recht verurteilt worden. Also ist seine Einleitung neu zu überdenken.

Aufgrund der beiden Regeln Modus ponens und Modus tollens ergibt sich bereits eine bedeutsame Einsicht: Aus einer Implikation darf nichts geschlossen werden. Um zu einem gültigen Schluß zu kommen, ist eine Zusatzprämisse unerläßlich. Sofern diese Zusatzprämisse identisch ist mit dem Vordersatz der Implikation, dann schließen wir mit dem Modus ponens; ist sie identisch mit der Negation des Nachsatzes – also nicht mit dem Nachsatz selber – so schließen wir auf die Negation des Vordersatzes. Die übrigen Schlüsse sind nicht gültig.

1. Wenn der Bewerber sich nicht ausweist, bekommt er das Dokument nicht.

2. Er weist sich aus.
3. Also bekommt er das Dokument.

$$\begin{array}{ll} 1.\ \neg A \rightarrow \neg D & \\ 2.\ A & /\ \ D \\ \hline 3.\ D & ? \end{array}$$

Dieser Schluß ist falsch, weil die zweite Prämisse nicht identisch ist mit dem Vordersatz der Implikation. Noch weniger ist die 2. Prämisse identisch mit der Verneinung des Nachsatzes. Deshalb darf auch nicht mit Modus tollens geschlossen werden. Modus ponens und Modus tollens – sowie ihre später zu behandelnden Umformungen – sind aber die beiden einzigen gültigen Regeln für eine Implikation. Da die Voraussetzung für keine der beiden gegeben ist, dürfen wir im vorliegenden Fall nicht schließen. Der Verstoß gegen eine der beiden Regeln heißt Rückschluß oder Fallacia consequentis. Es sind die am häufigsten anzutreffenden Logikfehler der elementaren Logik.

Übung 2.6.2

5) Wie muß im letzgenannten Beispiel die 2. Prämisse lauten, damit ein gültiger Schluß zustande kommt?

Sind die folgenden Schlüsse korrekt, oder was folgt aus den Prämissen?

6) Wenn die Katze einen Hund sieht, dann macht sie einen Buckel. Sie macht einen Buckel. Also sieht sie einen Hund.

7) Wenn Isabella Italienerin ist, dann ist sie Europäerin. Isabella ist nicht Italienerin. Also ist sie nicht Europäerin.

8) Wenn $2 \cdot 2$ nicht 4 ist, dann ist der Mond ein Würfel. Nun ist aber $2 \cdot 2 = 4$. Also?

9) Wenn Pythagoras ein Amerikaner war, dann ist im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$. Nun ist im rechtwinkligen Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$. Also?

10) Wenn Thomas die Bibel für göttliche Offenbarung hält,

dann ist er nicht ungläubig. Thomas ist nicht ungläubig. Also hält er die Bibel für geoffenbart.

11) „Der Philosoph, der tritt herein
und beweiset Euch, es müßt so sein:
Das Erst' wär so, das Zweite so,
und drum das Dritt' und Vierte so.
Und wenn das Erst' und Zweit' nicht wär,
das Dritt' und Viert' wär nimmermehr."
Goethe, Faust, Szene IV, Auftritt 2; 399–404

3. Simplifikation (Simpl.)

$\boxed{\dfrac{p \wedge q \wedge r}{p}}$ oder $\boxed{\dfrac{p \wedge q \wedge r}{q}}$ oder $\boxed{\dfrac{p \wedge q \wedge r}{r}}$

Aus einer Konjunktion darf ohne Zusatzprämisse geschlossen werden. Überdies dürfen alle Argumente einzeln behauptet werden.

Beispiele:

1. Olbers war Arzt und Hobbyastronom
2. Also war er Arzt

Oder: 2a. Also war er Hobbyastronom

1. $A \wedge H$	$/ \therefore A$
2. A	1a, Simpl.
oder	
2a. H	1b, Simpl.

1. Gespielt wird die Jupitersinfonie, die Unvollendete und Pacific 231
   Also wird die Pacific 231 gespielt

1. $J \wedge U \wedge P$	$/ \therefore P$
2. P	1c, Simpl.

Innerhalb einer Deduktion dürfen alle zugelassenen Regeln beliebig oft wiederholt werden.

Beispiel:

1. Wenn es Tag ist, dann gibt es Licht

2. Der Mond ist verschwunden und es ist Tag
3. Also gibt es Licht

$$\begin{array}{ll} 1.\ T \rightarrow L & \\ 2.\ V \wedge T & \underline{/\quad L} \end{array}$$

Um zielstrebig vorzugehen, empfiehlt es sich, gedanklich vom gesuchten Resultat auszugehen. Gesucht wird ‚L'. Es kommt nur in der 1. Prämisse vor. Dort ist es allerdings mit einer Implikation verknüpft. Es ließe sich herausholen, wenn wir ‚T' hätten. In der Prämisse 2. ist ein ‚T' enthalten, das sich aufgrund der Simplifikationsregel erschließen läßt. Bei Anwendung zweier Regeln erhalten wir folgende Deduktion:

$$\begin{array}{ll} 1.\ T \rightarrow L & \\ 2.\ V \wedge T & \underline{/\therefore L} \\ 3.\ T & 2b,\ \text{Simpl.} \\ 4.\ L & 3,1,\ \text{MP} \end{array}$$

Übung 2.6.3

1) Wenn Gebhard zu einem Drink eingeladen wird, dann ist er lustig. Er faucht die Sekretärin an und ist nicht lustig. Also?

2) Wenn der Taxifahrer nicht arbeitet, dann geht er stempeln. Es ist Herbst, kalt, regnerisch und er arbeitet nicht. Also geht er stempeln.

3) Wenn Churchill ein Franzose war, dann trank er Champagner, aber wenn er ein Engländer war, dann trank er Whisky. Er war Engländer. Also trank er Whisky.

4) Die Dachse bohren Höhlen, die Füchse wohnen darin und die Jäger machen sich auf die Jagd. Wenn die Dachse nicht ausgezogen sind, dann wohnen die Füchse nicht in der Höhle. Also sind die Dachse ausgezogen.

5) Wenn ein Fahrgast den halben Preis bezahlt oder eine Ermäßigung bekommt, dann ist er Soldat, Student oder Rentner. Nun ist der Fahrgast weder Soldat noch Student noch

Rentner. Also bezahlt er weder halbe Taxe noch bekommt er eine Ermäßigung.

6) Wenn das nach dem ersten Weltkrieg ausgebrochene Kriegszittern nicht von den Nerven herrührte, dann war die Analyse von Oppenheimer richtig. Nonne ging psychotherapeutisch vor und die Analyse von Oppenheimer bewährte sich nicht. Wenn das Kriegszittern von den Nerven ausging, dann konnte es nicht anatomisch behandelt werden. Folglich konnte das Kriegszittern nicht anatomisch behandelt werden.

4. Konjunktion (Konj.)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \\ \underline{q\qquad} \\ p \wedge q \end{array}}$$

Die Konjunktionsregel erlaubt, Einzelaussagen durch Konjunktionen zu verbinden. Es ist die inverse Regel zur Simplifikation.

Beispiel:

1. Olbers war Arzt
2. Olbers war Hobbyastronom
3. Also war er Arzt und Hobbyastronom

1. A	
2. H	$/ \therefore A \wedge H$
3. $A \wedge H$	1, 2, Konj.

Übung 2.6.4

1) Es gibt Kastanien und Unterhaltung. Es gibt belegte Brote und das Nachtessen ist um sieben Uhr. Wenn das Nachtessen um sieben ist und es Kastanien gibt, dann ist es Sauserabend. Also ist es Sauserabend und es gibt Unterhaltung.

2) 1. $\neg t$
   2. $p \wedge q$

3. $r \wedge p$
4. $(r \wedge q) \rightarrow (s \rightarrow t)$ $\underline{/\quad p \wedge \neg s}$

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben die genauen Schritte und Regeln an:

3)
1. $p \rightarrow q$
2. $((r \vee s) \rightarrow z) \wedge (\neg t \wedge u)$
3. $(v \vee w) \wedge (\neg t \wedge x)$
4. $(v \rightarrow w) \wedge p$
5. $y \rightarrow t$ $\underline{/ \therefore q \wedge \neg y}$
6. p
7. q
8. $\neg t \wedge u$
9. $\neg t$
10. $\neg y$
11. $q \wedge \neg y$

4)
1. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
2. $(s \wedge t) \rightarrow u$
3. $(v \vee w) \wedge (t \wedge \neg r) \wedge (\neg x \vee y)$
4. $\neg z \wedge s$ $\underline{/ \therefore u \wedge \neg (p \rightarrow q)}$
5. $t \wedge \neg r$
6. $\neg r$
7. $\neg (p \rightarrow q)$
8. s
9. t
10. $s \wedge t$
11. u
12. $u \wedge \neg (p \rightarrow q)$

5. Hypothetischer Syllogismus (HS)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ p \rightarrow r \end{array}}$$

Der Hypothetische Syllogismus ist als Kettenschluß bekannt. In der einfachsten Form besteht er aus zwei Implikationen, deren erster Nachsatz von der zweiten Prämisse als Vordersatz aufgenommen wird und dadurch die Verbindung herstellt.

Beispiele:

1. Wenn die Times eingeht, dann fehlt es an Informationen.
2. Wenn die Löhne steigen, dann geht die Times ein.
3. Also, wenn die Löhne steigen, fehlt es an Informationen.

1.	$T \rightarrow I$	
2.	$L \rightarrow T$	$/\therefore L \rightarrow I$
3.	$L \rightarrow I$	2, 1, HS

1. Wenn die Hypothekarzinse steigen, gehen die Mietpreise nicht zurück
2. Wenn die Mietpreise nicht zurückgehen, dann sinkt der Lebensstandard
3. Also wenn die Hypothekarzinse steigen, sinkt der Lebensstandard.

1.	$H \rightarrow \neg M$	
2.	$\neg M \rightarrow L$	$/\therefore H \rightarrow L$
3.	$H \rightarrow L$	1, 2, HS

Übung 2.6.5

1) Wenn es der Pfarrer eilig hat, dann geht er ziellos an die Predigt heran. Wenn er ziellos an die Predigt herangeht, dann wird sie nicht kurz. Also wenn es der Pfarrer eilig hat, dann wird die Predigt nicht kurz.

2) Es ist nicht etwas Farbiges. Nur wenn es etwas Farbiges ist, ist es gelb. Wenn es eine Gelbmeise ist, dann ist es gelb. Also ist es nicht eine Gelbmeise.

3) Wenn der Lord das Haus vergrößert, dann braucht er ein neues Zimmermädchen. Wenn er einen Fahrer einstellt, dann vergrößert er das Haus. Wenn er einen Rolls Royce kauft, dann stellt er einen Fahrer ein. Also wenn er einen Rolls Royce kauft, braucht er ein neues Zimmermädchen.

4) Wenn Hildegard an ihre Blumen und an den Hund denkt,

dann macht sie sich Sorgen. Sie hat am 2. August Geburtstag. Wenn sie Rosen bekommt, dann denkt sie an ihre Blumen und an den Hund. Wenn der 2. August einfällt, dann bekommt sie Rosen. Also macht sich Hildegard Sorgen.

5) Wenn der Lehrling keine Lust hat an der Arbeit, dann wird er entlassen. Er sucht nicht nach einer neuen Stelle. Wenn er entlassen wird, dann sucht er eine neue Stelle. Wenn es heiß ist, dann hat er keine Lust an der Arbeit. Also ist es nicht heiß.

6) Wenn Meyer bei der Wahl anwesend ist, dann wird er Präsident. Er rechnet jeden Monat ab und bezahlt den Vereinsbeitrag pünktlich. Wenn er Mitglied ist, dann ist er bei der Wahl anwesend. Wenn er den Beitrag pünktlich bezahlt, dann ist er Mitglied. Also wird Meyer Präsident.

7) Wo Glaube, da Liebe; wo Liebe, da Frieden; wo Frieden, da Segen; wo Segen, da Gott; wo Gott, keine Not.

a) Was folgt daraus?
b) Darf die Regel HS bei einer Wortkette eingesetzt werden?

8)
1. $p \rightarrow q$
2. $r \wedge s \wedge t$
3. $u \rightarrow p$
4. z
5. $t \rightarrow u$ $\quad \underline{/ \quad q}$

Hinweis: Wie schon bei der kurzen Ableitung in 2.6.3, so dürfen wir erst recht bei längeren Deduktionen die Konklusion nicht aus dem Auge verlieren. Gesucht wird ‚q'. Es ist in der 1. Prämisse enthalten, jedoch durch eine Implikation mit ‚p' verknüpft. Aus der 3. Prämisse könnte ‚p' herausgeholt werden, vorausgesetzt, daß noch ‚u' gegeben wäre. ‚u' ist ferner in der 5. Prämisse vorhanden, aber auch wieder herauszuholen nur wenn ‚t' gegeben ist. ‚t' ist aus der zweiten Prämisse herauszuholen. Nun läßt sich der ganze Gedankengang rückwärts durchführen, indem man mit ‚t' beginnt.

9) 1. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $(q \to r) \to (r \to s)$
3. $(q \to s) \to [t \to (s \to u)]$
4. $t \wedge \neg p$ $\quad / \; \underline{q \to u}$

6. Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\boxed{\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p} \\ \quad q \end{array}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\quad \neg q} \\ p \end{array}}$$

Wird durch eine Zusatzprämisse das eine Argument einer Disjunktion verneint, dann bleibt das andere übrig.

1. Josef raucht Pfeife oder Zigarren
2. Er raucht nicht Pfeife
3. Also raucht er Zigarren

1. $P \vee Z$	
2. $\neg P$	$/ \therefore Z$
3. Z	2, 1, DS

1. Stephan studiert in Genf oder Luzern.
2. Er studiert nicht in Luzern.
3. Also studiert er in Genf.

1. $G \vee L$	
2. $\neg L$	$/ \therefore G$
3. G	2, 1, DS

Übung 2.6.6

1) Der Beweis ist sophistisch oder Achilles holt die Schildkröte ein. Wenn Achilles die Schildkröte einholt, dann versagt die Logik. Die Mathematiker haben alles geprüft und die Logik versagt nicht. Also ist der Beweis sophistisch.

2) Es regnet oder es regnet nicht. Nun regnet es. Folglich regnet es nicht.

3) Pettenkofer lebte weiter oder seine Hypothese versagte.

Wenn die Hypothese versagte, dann wurde er in der Hygiene abgeschrieben. Er verschluckte öffentlich eine Kultur Cholerabazillen und wurde in der Hygiene nicht abgeschrieben. Also lebte Pettenkofer weiter.

4) Der Fischer trinkt gerne Wein und der Müller singt im Männerchor. Wenn der Metzger Hausbesitzer ist, dann wählt er nicht eine Linkspartei. Der Metzger ist Hausbesitzer oder der Müller singt nicht im Männerchor. Also trinkt der Fischer gern ein Glas Wein und der Metzger wählt nicht eine Linkspartei.

5) Wenn Schopenhauer so früh aufstand wie Kant, dann hat er ihn in dieser Hinsicht gut nachgeahmt. Schopenhauer war eingebildet, liebte die Demokratie nicht und hatte Wutanfälle. In einem Wutausbruch warf er die Näherin die Stiege hinunter. Er stand so früh auf wie Kant oder war nicht eingebildet. Also hat er die Näherin die Stiege hinuntergeworfen und Kant im Frühaufstehen gut nachgeahmt.

6) Dorothea bekommt ein Pferd oder ein Auto. Wenn sie ein Auto bekommt, fährt sie auf der Autobahn. Wenn sie ein Pferd erhält, dann reitet sie im Wald. Sie geht zu Fuß oder mit dem Zug, schwimmt und steigt auf die Berge, aber reitet nicht im Wald. Also fährt sie auf der Autobahn.

7. Addition (Add.)

$$\boxed{\frac{p}{p \vee q}}$$

Zu einer Aussage darf jede beliebige weitere Aussage durch Disjunktion hinzugefügt werden. Die Regel heißt allerdings nicht Disjunktions-, sondern Additionsregel.

1. Hermann trinkt Bier
2. Also trinkt Hermann Bier oder Wein

1. B	$\underline{/\therefore\ B \vee W}$
2. B $\vee$ W	1, Add.

1. Der Mond ist rund
2. Also ist der Mond rund oder die Tannen sind aus Holz.

1. R	$/ \therefore R \vee T$
2. $R \vee T$	1, Add.

1. Wenn Albert Trompete spielt oder Brigitte auf dem Klavier klimpert, dann ärgert sich Claudia.
2. Albert spielt Trompete.
3. Also ärgert sich Claudia

1. $(A \vee B) \rightarrow C$	
2. A	$/ \therefore C$
3. $A \vee B$	2, Add.
4. C	3, 1, MP

1. Wenn Alfred und Bernhard ein Geschäft eröffnen, dann, wenn Cäsar auch dabei ist, wird es Konkurs und Verleumdung geben.
2. Alfred, Bernhard und Cäsar eröffnen ein Geschäft.
3. Also gibt es Konkurs oder Verleumdung.

1. $(A \wedge B) \rightarrow [C \rightarrow (K \wedge V)]$	
2. $A \wedge B \wedge C$	$/ \therefore K \vee V$
3. $A \wedge B$	2ab, Simpl.
4. $C \rightarrow (K \wedge V)$	3, 1, MP
5. C	2c, Simpl.
6. $K \wedge V$	5, 4, MP
7. K	6a, Simpl.
8. $K \vee V$	7, Add.

Übung 2.6.7

1)
1. $(\neg p \vee q) \rightarrow r$
2. $(s \wedge r) \rightarrow t$
3. $t \rightarrow u$
4. $u \wedge q \wedge s$ $\qquad / \; q \vee t$

2)
1. $p \rightarrow q$
2. $p \vee r$
3. $r \rightarrow (r \rightarrow s)$
4. $\neg q$ $\qquad / \; s \vee q$

3)
1. $p \wedge q$
2. $q \rightarrow (r \wedge s)$
3. $(r \vee s) \rightarrow (s \leftrightarrow p)$ $\quad$ $\underline{/\ s \leftrightarrow p}$

4)
1. $\neg p \wedge q$
2. $r \rightarrow s$
3. $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow t)$
4. $s \rightarrow p$ $\quad$ $\underline{/\ s \rightarrow t}$

8. Konstruktives Dilemma (KD)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ \underline{p \vee r \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\qquad q \vee s \end{array}}$$

In der Umgangssprache ist das Konstruktive Dilemma kaum gebräuchlich. Deshalb wirken auch die Beispiele etwas gekünstelt. Immerhin ist diese Regel genau dann nützlich, wenn zwei Implikationen vorliegen und dazu eine Disjunktion, die aus den Vordersätzen der beiden Implikationen besteht.

1. Wenn es regnet, dann wird die Straße naß, und wenn es kalt ist, dann heizen wir.
2. Es regnet oder es ist kalt.
3. Also ist die Straße naß oder wir heizen.

1. $(R \rightarrow N) \wedge (K \rightarrow H)$	
2. $R \vee K$	$\underline{/.\because.\ N \vee H}$
3. $N \vee H$	1, 2, KD

1. Wenn der Vater früh kommt, macht Urs die Hausaufgaben rechtzeitig, und wenn die Mutter spät kommt, spielt Urs mit Gabriela.
2. Urs spielt nicht mit Gabriela
3. Der Vater kommt früh oder die Mutter spät
4. Also macht Urs die Hausaufgaben rechtzeitig

1. $(V \rightarrow H) \wedge (M \rightarrow S)$	
2. $\neg S$	
3. $V \vee M$	$\underline{/.\because.\ H}$
4. $H \vee S$	3, 1, KD
5. H	2, 4, DS

Übung 2.6.8

1) Wenn Pia Überstunden macht, dann ist sie müde, und wenn sie in der Stadt wohnt, hat sie zu wenig Sonne. Sie macht Überstunden oder sie wohnt in der Stadt. Also ist sie müde oder hat zu wenig Sonne.

2) Wenn Stephan portugiesisch spricht, dann geht er nach Brasilien. Wenn er englisch spricht, dann geht er in die Wissenschaft. Wenn er türkisch spricht, dann macht er Kaffee. Er spricht englisch oder russisch. Wenn er russisch spricht, dann ist er als Politiker verdächtig. Also geht er in die Wissenschaft oder ist als Politiker verdächtig.

3) Der Logiker ist frei in der Wahl der Regeln oder er benutzt die Simplifikation oder das Konstruktive Dilemma. Wenn er die Simplifikation anwendet, dann ist er frei in der Wahl der Regeln, und wenn er das Konstruktive Dilemma benutzt, dann gelingt ihm die Lösung schneller. Wenn er frei in der Wahl der Regeln ist oder schneller zur richtigen Lösung kommt, dann ist er frei in der Wahl der Regeln oder er benutzt des Konstruktive Dilemma. Er ist nicht frei in der Wahl der Regeln. Also benutzt der klugerweise das Konstruktive Dilemma.

4)
1. $s \rightarrow t$
2. $\neg p \wedge \neg r$
3. $p \vee q \vee r \vee s$
4. $(u \vee t) \rightarrow (p \vee q \vee r)$
5. $q \rightarrow u$ $\quad\quad$ $\underline{/\ q}$

9. Destruktives Dilemma (DD)

$$\boxed{\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ \neg q \vee \neg s \\ \hline \qquad \neg p \vee \neg r \end{array}}$$

Wer die Ähnlichkeit des Konstruktiven Dilemmas mit dem Modus ponens beachtet hat, dem wird auch die Analogie zwischen Destruktivem Dilemma und Modus tollens nicht entgehen.

1. Wenn Johnny schwimmt, dann gibt es Wellen, und wenn er auf den Titlis steigt, dann bekommt er Muskelkater
2. Es gibt nicht Wellen oder er bekommt nicht Muskelkater
3. Also schwimmt Johnny nicht oder er steigt nicht auf den Titlis

1. $(S \rightarrow W) \wedge (T \rightarrow M)$	
2. $\neg W \vee \neg M$	$/ \therefore \neg S \vee \neg T$
3. $\neg S \vee \neg T$	2, 1, DD

1. Wenn es die Partei sagt, dann ist es richtig, und wenn es die Bank sagt, dann ist es teuer
2. Es ist nicht richtig oder es ist nicht teuer
3. Also sagt es nicht die Partei oder nicht die Bank

1. $(P \rightarrow R) \wedge (B \rightarrow T)$	
2. $\neg R \vee \neg T$	$/ \therefore \neg P \vee \neg B$
3. $\neg P \vee \neg B$	2, 1, DD

Übung 2.6.9

1) 1. $\neg\neg p$
   3. $r \rightarrow s$
   3. $p \rightarrow q$
   4. $\neg q \vee \neg s$
   5. $(t \wedge u) \rightarrow r$ $/\ \neg (t \wedge u)$

2) 1. $(\neg p \vee \neg r \vee t) \rightarrow z$
   2. $r \rightarrow q$
   3. $\neg s$
   4. $p \rightarrow s$ $/\ z$

3) Zu Nr. 2) gibt es einen kürzeren Weg ohne die Regel DD. Wie verläuft er?

4) 1. $t \rightarrow \neg r$
   2. $\neg p$
   3. $(\neg s \vee \neg t) \rightarrow (p \vee m)$
   4. $p \vee q \vee r$
   5. $s \rightarrow \neg q$ $/\ m$

Äquivalenzregeln

Die bisher erwähnten 9 Regeln können wir als Schlußregeln bezeichnen, weil sie Vorschriften für die Bedingungen sind, unter denen ein gültiger Schluß erreicht wird. Wir wollen noch 11 weitere Umformungs- oder Äquivalenzregeln beifügen. Sie dienen zur Vereinfachung von Ausdrücken, ohne ihren Wahrheitswert zu verändern.

Eine Äquivalenzregel haben wir bisher öfters wenn auch unerlaubterweise benutzt, nämlich die Regel der doppelten Negation. Unerlaubt war es deshalb, weil diese Regel als einzige nicht ausdrücklich eingeführt wurde. Das soll hier nachgeholt werden.

10. Doppelte Negation (DN)	$p \leftrightarrow \neg\neg p$
11. Kommutation (Komm.)	$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
12. Assoziation (Ass.)	$[p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$ $[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
13. Idempotenz (Idemp.)	$(p \vee p) \leftrightarrow p$ $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

Übung 2.6.13

1. $\neg s$
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow q)$
3. $p \vee q \vee s$ $\quad\quad$ $\underline{/\ q}$

14. Kontraposition (Kontr.)	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Übung 2.6.14

1) Wenn das Alphorn ertönt, dann schlafen die Gäste nicht.

Wenn es ruhig ist, dann schlafen die Gäste. Also wenn das Alphorn ertönt, dann ist es nicht ruhig.

2) 1. $(\neg p \lor q \lor \neg r) \rightarrow [\neg s \rightarrow (t \rightarrow u)]$
2. $\neg p$
3. $\neg p \rightarrow [(t \rightarrow u) \rightarrow (u \rightarrow v)]$
4. $(\neg p \lor q) \rightarrow [(u \rightarrow v) \rightarrow \neg w]$ $\quad$ $\underline{/\ w \rightarrow s}$

15. Implikation (Impl.) $\boxed{(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)}$

Übung 2.6.15

1) 1. $p \rightarrow q$
2. $r \lor \neg q$
3. p $\quad$ $\underline{/\ r}$

2) Gustav spielt Trompete oder Klavier. Er spielt Posaune oder nicht Klavier. Also spielt er Trompete oder Posaune.

3) 1. $\neg v \rightarrow (q \rightarrow \neg x)$
2. $(t \land u) \rightarrow \neg v$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
4. $\neg s \lor \neg (q \rightarrow \neg x)$
5. $(q \rightarrow r) \rightarrow s$ $\quad$ $\underline{/\ \neg p \lor \neg (t \land u)}$

4) Entweder werden die Tarife gesenkt oder die Importe gedrosselt, oder unsere Käseindustrie blüht. Wenn die Tarife gesenkt werden, dann werden die Importe gedrosselt. Also blüht unsere Käseindustrie, oder die Importe werden gedrosselt.

16. Distribution (Distr.)

$$\boxed{\begin{array}{l}[p \land (q \lor r)] \leftrightarrow [(p \land q) \lor (p \land r)]\\ [p \lor (q \land r)] \leftrightarrow [(p \lor q) \land (p \lor r)]\end{array}}$$

Übung 2.6.16

1) 1. $p \rightarrow (q \land r)$
2. $r \lor (p \land \neg q)$ $\quad$ $\underline{/\ r}$

2) 1. $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$
2. $(\neg p \wedge s) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ $\underline{/ \quad \neg p \wedge r}$

Die Distributionsregeln gelten auch für komplexere Ausdrücke, etwa:

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$
$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$$

17. Äquivalenz (Äquiv.)

$$\boxed{\begin{array}{l}(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \\ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]\end{array}}$$

Übung 2.6.17

1) Die Veilchen duften genau dann, wenn sie blühen. Nun duften sie nicht. Also blühen sie nicht.

2) 1. $(r \rightarrow s) \wedge (t \vee u)$
2. $(\neg q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$
3. $(\neg q \rightarrow s) \rightarrow (p \vee t)$
4. $\neg p \wedge \neg s$ $\underline{/ \; q \vee u}$

18. Exportation (Exp.)

$$\boxed{[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]}$$

Übung 2.6.18

1) Es ist nicht der Fall, daß die Amerikaner und Belgier ihr Geld aufwerten oder die Deutschen ruhig zusehen. Also wenn die Amerikaner ihr Geld aufwerten, dann werten es die Belgier nicht auf, oder die Deutschen sehen ruhig zu.

19. Absorption (Abs.)

$$\boxed{\begin{array}{l}p \wedge (p \vee q) \rightarrow p \\ p \vee (p \wedge q) \rightarrow p \\ p \rightarrow (p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)\end{array}}$$

Übung 2.6.19

1) 1. $\neg p \vee (q \wedge p)$
2. $\neg q \vee \neg r$
3. $\neg (p \wedge q) \rightarrow r$ $\quad$ $\underline{/\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}$

20. De Morgan (De M)	$\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ $\neg (p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Die De Morganschen Gesetze sind besonders wichtig, weil es für sie kein Ausweichen auf andere Regeln gibt. Sicherheit im Umgang mit ihnen soll freilich nicht durch Auswendiglernen erworben werden, man muß verstehen, wie diese Gesetze umgeformt werden. Dazu empfiehlt sich die Schreibweise von Hilbert, bei der die Negation als Balken über den zu negierenden Ausdruck gestellt wird.

Beispiele:

Scholz	Hilbert
$\neg p$	$\bar{p}$
$\neg p \vee q$	$\bar{p} \vee q$
$\neg (p \wedge q)$	$\overline{p \wedge q}$
$\neg (p \rightarrow q)$	$\overline{p \rightarrow q}$

Zur Anwendung kommen die De Morganschen Gesetze, wenn ganze Klammerausdrücke negiert sind, also etwa bei ‚$\neg (p \wedge q)$', was in der Schreibweise von Hilbert so lautet: ‚$\overline{p \wedge q}$'. Der Balken über dem Ausdruck wird folgendermaßen aufgelöst:

1. In der Mitte wird er „durchschnitten".
2. Die Konjunktion (bzw. Disjunktion) wird „umgestürzt", so daß die Konjunktion zur Disjunktion, bzw. die Disjunktion zur Konjunktion wird.

$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p \vee q}$
$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$

Es bleibt nur noch, das Resultat wieder in die bekannte Schreibweise umzusetzen. Der Ablauf der Schritte läßt sich so zusammenstellen:

1. $\neg (p \wedge q)$		Dual	1. $\neg (p \vee q)$
1a. $\overline{p \wedge q}$			1a. $\overline{p \vee q}$
1b. $\bar{p} \vee \bar{q}$			1b. $\bar{p} \wedge \bar{q}$
2. $\neg p \vee \neg q$			2. $\neg p \wedge \neg q$

Selbstverständlich lassen sich die De Morganschen Regeln auch bei verneinten Implikationen und Äquivalenzen einsetzen, nur müssen diese zuerst umgeformt werden in Disjunktionen bzw. Konjunktionen.

1. $\neg (p \rightarrow q)$

    2. $\neg (\neg p \vee q)$ Impl.
    2a. $\overline{\bar{p} \vee q}$
    2b. $\bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}$
    2c. $\neg\neg p \wedge \neg q$

3. $p \wedge \neg q$

Übung 2.6.20

1) Es trifft nicht zu, daß eine Schnecke sich nicht zusammenrollen und nicht schwimmen kann. Es stimmt zwar, daß sie nicht schwimmen kann. Also kann sie sich zusammenrollen.

2) Wenn der Abgeordnete die Stimmen der Bauern erhält, dann gewinnt er die Landgegend, und wenn er die Stimmen der Arbeiter hat, dann gewinnt er die Stadt. Wenn er beide, sowohl Stadt und Land auf seiner Seite hat, dann wird er sicher gewählt. Er wird nicht sicher gewählt. Also fehlen ihm die Stimmen der Arbeiter, wenn er jene der Bauern gewinnt.

21. Überflüssige Regeln

Mit der Aufzählung der 20 Regeln sind wird weit über das hinausgegangen, was unbedingt notwendig ist. Man könnte ohne sachliche Einschränkung mit einer weit geringeren Anzahl an Regeln auskommen. Die Kenntnis vieler Regeln erlaubt uns jedoch kürzere Deduktionen und besseres Nachzeichnen unserer intuitiven Argumentationen. An drei Beispielen soll gezeigt werden, wie Schluß- und Äquivalenzregeln untereinander austauschbar sind.

Beispiel 1 Ersetzen der Regel DS

1. $p \vee q$
2. $\neg p$ $\quad$ $\underline{/.\because\ q}$

Mit der Regel DS können wir aus den beiden Prämissen unmittelbar auf ‚q' schließen. Wir können diese Regel jedoch auch so umgehen:

3. $\neg p \rightarrow q$ $\quad$ 1, Impl.
4. q $\quad$ 2, 3, MP

Beispiel 2 Ersetzen der Regel MT

1. $p \rightarrow q$
2. $\neg q$ $\quad$ $\underline{/.\because\ \neg p}$

Es empfiehlt sich ebenfalls, aus den beiden Prämissen direkt mit MT zu schließen. Derselbe Schluß läßt sich aber auch mittels anderer Regeln erreichen, etwa so:

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $\quad$ 1, Kontr.
4. $\neg p$ $\quad$ 2, 3, MP

Beispiel 3 Ableitung der Exportation

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $\neg (p \wedge q) \vee r$ $\quad$ 1, Impl.
3. $(\neg p \vee \neg q) \vee r$ $\quad$ 2, De M.
4. $\neg p \vee (\neg q \vee r)$ $\quad$ 3, Ass.
5. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$ $\quad$ 4, Impl.
6. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $\quad$ 5, Impl.

Wir haben die Exportation abgeleitet; sie müßte folglich nicht notwendig als Regel vorgelegt werden. Diese gegenseitige Austauschbarkeit bei sachlicher Übereinstimmung erlaubt den Logikern, in der Anzahl der zu verwendenden Regeln voneinander abzuweichen.

Übung 2.6.21 Wiederholung aller Regeln

1) Wenn die Olympiade in Davos oder in Zermatt ausgetragen wird, dann freuen sich die Schweizer und der Wirteverband. Der

Wirteverband freut sich nicht. Also wird die Olympiade nicht in Zermatt ausgetragen.

2) $\neg (p \leftrightarrow q)$ Lösen Sie die verneinten Klammerausdrücke auf.

3) Wenn ich arbeite, dann komme ich zu Geld, aber wenn ich faul bin, dann habe ich es gemütlich. Entweder arbeite ich oder bin faul. Aber wenn ich arbeite, dann habe ich es nicht gemütlich, und wenn ich faul bin, dann komme ich nicht zu Geld. Deshalb habe ich es genau dann gemütlich, wenn ich nicht zu Geld komme.

4) Wenn der Nordwind abflaut und der Föhn einsetzt, dann haben wir Sturm. Der Nordwind flaut ab und wir ziehen die Segel ein. Es ist nicht der Fall, daß bei Föhn das Deck trocken bleibt. Wenn wir Sturm haben, dann trifft es nicht zu, daß wir uns über die Warnung hinwegsetzen oder die Segel nicht einziehen. Also setzt der Föhn ein und wir beachten die Warnung.

5) Der Onkel Walter steigt auf das Matterhorn, die Rigi oder den Pilatus. Genau dann, wenn er den Calanda bezwingt, steigt er auf die Bernina. Wenn er auf das Matterhorn klettert, dann steigt er auf den Pilatus. Nur wenn er auf den Pilatus oder die Rigi geht, bezwingt er den Pilatus oder den Eiger. Er steigt nicht auf den Pilatus. Wenn er auf die Rigi geht, dann geht er auf den Calanda. Also steigt er auf die Bernina.

6) Franz liest Goethe und Schiller oder Marcel und Camus. Er liest nicht Goethe. Also liest er Camus.

7)
1. $(p \vee q) \rightarrow r$
2. $s \rightarrow t$
3. $q \wedge \neg t$
4. $p \vee s$
5. $\neg (v \rightarrow \neg w)$ $\underline{/ \therefore r \wedge w}$
6. q
7. $q \vee p$
8. $p \vee q$
9. r
10. $v \vee w$
11. $v \wedge w$

12. w
13. $r \wedge w$

8)
1. $p \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
2. $p \leftrightarrow q$ $\quad$ $\underline{/\therefore \neg p \wedge \neg q}$
3. $\neg p \vee (\neg q \vee \neg p)$
4. $(\neg q \vee \neg p) \vee \neg p$
5. $\neg q \vee (\neg p \vee \neg p)$
6. $\neg q \vee \neg p$
7. $\neg p \vee \neg q$
8. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
9. $\neg (p \wedge q)$
10. $\neg p \wedge \neg q$

9)
1. $s \rightarrow \neg s$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3. $(t \rightarrow p) \wedge (u \rightarrow q)$ $\quad$ $\underline{/\therefore t \rightarrow \neg u}$
4. $\neg s \vee \neg s$
5. $\neg s$
6. $(p \wedge q) \rightarrow s$
7. $\neg (p \wedge q)$
8. $\neg p \vee \neg q$
9. $\neg t \vee \neg u$
10. $t \rightarrow \neg u$

10)
1. $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $t \rightarrow (u \rightarrow v)$
3. $(\neg w \rightarrow \neg s) \wedge (x \rightarrow q)$
4. $(\neg y \wedge \neg t) \rightarrow (\neg p \vee \neg w)$
5. $\neg (u \rightarrow v)$
6. $\neg y \vee (u \rightarrow v)$ $\quad$ $\underline{/\therefore x \rightarrow \neg r}$
7. $x \rightarrow q$
8. $\neg p \rightarrow \neg q$
9. $q \rightarrow p$
10. $\neg (u \rightarrow v) \rightarrow \neg t$
11. $\neg t$
12. $u \wedge \neg v$
13. $\neg y \vee (\neg u \vee v)$
14. $\neg y$

15. $\neg y \wedge \neg t$
16. $\neg p \vee \neg w$
17. $p \rightarrow \neg w$
18. $\neg w \rightarrow \neg s$
19. $r \rightarrow s$
20. $\neg s \rightarrow \neg r$
21. $x \rightarrow \neg r$

11) Ein Text aus 1 Korinther 15, 12–20.

Gibt es aber keine Auferstehung der Toten, so ist auch Christus nicht auferweckt worden (V 13). Ist Christus nicht auferweckt worden, so ist unsere Predigt leer, und auch der Glaube ist leer (V 14).

a) Was läßt sich aus diesen beiden Prämissen ableiten?
Fügen wir die folgende Prämisse hinzu:
Nun ist aber Christus auferweckt worden (V 20)

b) Was folgt jetzt
   ba) hinsichtlich der Auferstehung der Toten?
   bb) über die Leere des Glaubens?

c) Behauptet Paulus: Es gibt keine Auferstehung der Toten?

d) Ist die Auferstehung der Toten Voraussetzung für die Auferstehung Christi?

e) Thomas von Aquin hat so argumentiert:

1. $\neg A \rightarrow \neg C$ (V 13)
2. C (V 20)
3. $C \rightarrow A$
4. A

Geben Sie die Gesetze an, die Thomas benutzt hat.

12)
1. $(\neg q \vee \neg y) \rightarrow [z \rightarrow (s \wedge \neg t)]$
2. $\neg(\neg p \rightarrow q) \wedge (x \rightarrow z)$
3. $(\neg q \wedge \neg p) \rightarrow ((s \wedge \neg t) \rightarrow x)$ $\underline{/\ \neg(\neg x \wedge z)}$

13)
1. $\neg p \rightarrow \neg q$
2. $p \vee \neg s$
3. $\neg h \rightarrow s$ $\underline{/\ \neg(h \vee \neg q) \rightarrow p}$

14) 1. $p \vee \neg (q \wedge \neg r)$
2. $\neg s \vee p$
3. $\neg s \rightarrow \neg (t \wedge \neg q)$
4. $\neg p$
5. $\neg s$ $\quad$ $\underline{/ \ \neg (t \wedge \neg r)}$

15) 1. $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$
2. $(s \rightarrow \neg t) \rightarrow (\neg t \wedge \neg p)$
3. $(t \vee s) \rightarrow r$ $\quad$ $\underline{/ \ r}$

16) 1. $p \vee (\neg q \vee p)$
2. $q \vee (\neg p \vee q)$ $\quad$ $\underline{/ \ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)}$

2.7 Konjunktive Normalform

Die Distributionsregeln verhelfen uns zu einem neuen Entscheidungsverfahren. Bisher lernten wir als vollständige Entscheidungsverfahren die Auswertung der Wahrheitstafeln kennen. Mit Hilfe der Distributionsregeln können wir die konjunktive oder die disjunktive Normalform ausführen. Wir beschränken uns auf die Beschreibung der konjunktiven.

Die konjunktive Normalform ist eine Reduktion der Aussagenverknüpfungen von Disjunktionen auf Konjunktionen. Wir wissen, daß eine Konjunktionsverknüpfung genau dann wahr ist, wenn alle Argumente der Konjunktion wahr sind. Die Molekularformeln ihrerseits sind Disjunktionen, etwa von der Form ‚$p \vee \neg p$'. Falls sich ein Gesamtausdruck als Konjunktion solcher Disjunktionen umformen läßt, dann ist er immer gültig.

Beispiel 1

1. $\underline{(p \vee p)} \rightarrow p$
2. $\overline{(p \vee p)} \vee p$ $\quad$ 1, Impl.
3. $(\bar{p} \wedge \bar{p}) \vee p$ $\quad$ 2, De M.
4. $\bar{p} \vee p$ $\quad$ 3, Idemp.

Der Ausdruck ‚$\neg p \vee p$' ist eine Tautologie, folglich immer wahr.

Da zur Bildung der Normalformen häufig De Morgansche Gesetze gebraucht werden, schreiben wir die Negationen nach Hilbert über die Aussagen. Es empfiehlt sich noch eine weitere abkürzende Schreibweise: Die Konjunktionen schreiben wir mit „·“, die Disjunktionen lassen wir ganz weg, was die Übersicht erleichtert.

Beispiel 2

1. $q \rightarrow (p \vee q)$
2. $\bar{q} \vee (p \vee q)$ 1, Impl.
3. $\bar{q}pq$

Beispiel 3

1. $[p \vee (q \vee r)] \rightarrow [q \vee (p \vee r)]$
2. $\overline{p \vee (q \vee r)} \vee (qpr)$ 1, Impl.
3. $(\bar{p} \cdot \bar{q} \cdot \bar{r}) \vee qpr$ 2, De M.
4. $\bar{p}qpr \cdot \bar{q}qpr \cdot \bar{r}qpr$ 3, Dist.

Alle drei Konjunktionsargumente bestehen aus Alternativen, von denen jede eine Tautologie darstellt; die erste ‚$\bar{p}p$‘, die zweite ‚$\bar{q}q$‘, die dritte ‚$\bar{r}r$‘.

Beispiel 4

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$
2. $\overline{(p \rightarrow q)} \vee (\bar{\bar{p}} \vee \bar{q})$ 1, Impl.
3. $\overline{(\bar{p} \vee q)}\, p\bar{q}$ 2, Impl.
4. $(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q})\, p\bar{q}$ 3, De M.
5. $pp\bar{q} \cdot \bar{q}p\bar{q}$ 4, Distr.

Weder das erste noch das zweite Konjunktionsglied ist eine Tautologie. Folglich ist das Beispiel 4 keine Tautologie.

Wenn es sich im Verlauf einer Distribution herausstellt, daß ein Konjunktionsglied selber schon eine Tautologie ist, dann darf man dieses Argument weglassen. Der Grund ist einleuchtend: bei einer Tautologie bleibt die tautologische Form erhalten, mögen noch so viele Variable daran angehängt werden.

Beispiel 5

1. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)]$
2. $(q \rightarrow r) \rightarrow [\overline{(p \vee q)} \vee (p \vee r)]$ 1, Impl.
3. $(q \rightarrow r) \rightarrow [(\bar{p} \cdot \bar{q})\, pr]$ 2, De M.

4. $(q \to r) \to (\bar{p}pr \cdot \bar{q}pr)$	3, Dist.
5. $(q \to r) \to \bar{q}pr$	4, Weglassen von $\bar{p}pr$
6. $\overline{(q \to r)}\ \bar{q}pr$	5, Impl.
7. $\overline{(\bar{q} \vee r)}\ \bar{q}pr$	6, Impl.
8. $(\bar{\bar{q}} \cdot \bar{r})\ \bar{q}pr$	7, De M.
9. $q\bar{q}pr \cdot \bar{r}\bar{q}pr$	8, Dist.

Die Beispiele, die wir bisher mit Wahrheitstafeln oder Deduktionsregeln nachgeprüft haben, lassen sich ebenfalls durch die disjunktive Normalform kontrollieren. Da bei einer Deduktion die Prämissen die Vordersätze eines Schlusses ausmachen, läßt sich jede Deduktion umschreiben. Sie hat folgende Form:

(1. Prämisse, 2. Prämisse ...) $\to$ Konklusion

Beispiel 6

1. $p \to q$
2. p $/ \therefore q$

1. $[(p \to q) \wedge p] \to q$	
2. $\overline{[(p \to q) \wedge p]} \vee q$	1, Impl.
3. $[\overline{(p \to q)} \vee \bar{p}] \vee q$	2, De M.
4. $[\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \bar{p}] \vee q$	3, Impl.
5. $(p \cdot \bar{q})\ \bar{p}q$	4, De M.
6. $p\bar{p}q \cdot \bar{q}\bar{p}q$	5, Dist.

Beispiel 7

1. p
2. q
3. r $/ \therefore p \wedge q \wedge r$

1. $(p \wedge q \wedge r) \to (p \wedge q \wedge r)$	
2. $\overline{(p \wedge q \wedge r)} \vee (p \wedge q \wedge r)$	1, Impl.
3. $(\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \vee (p \wedge q \wedge r)$	2, De M.
4. $\bar{p}\bar{q}\bar{r}p \cdot \bar{p}\bar{q}\bar{r}q \cdot \bar{p}\bar{q}\bar{r}r$	3, Dist.

Beispiel 8

1. $p \to q$
2. $\neg p$ $/ \neg q$ (falsch)

1. $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$	
2. $\overline{[(p \to q) \wedge \bar{p}]} \vee \bar{q}$	1, Impl.

3. $\overline{(\bar{p} \vee q)} \vee \bar{\bar{p}}\bar{q}$	2, Impl.
4. $(\bar{\bar{p}} \cdot \bar{q})\ p\bar{q}$	3, De M.
5. $pp\bar{q} \cdot \bar{q}p\bar{q}$	4, Dist. (keine Tautologie)

Wie mit der Deduktionsmethode, so haben sich aufgrund der disjunktiven Normalform die Beispiele 6 und 7 richtig, hingegen 8 als falsch herausgestellt.

Übung 2.7

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow m)$
3. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
5. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
6. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
8. $[q \vee \neg ((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))] \rightarrow \neg (p \wedge \neg p)$
9. $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow \neg s)$
10. $(p \rightarrow (q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

2.8 Annahmen

Bisher haben wir aus bestimmten Prämissen einen Schluß gefolgert. Wir können die Prämissen dabei durch Annahmen erweitern. Dann folgt der Schluß aus den Prämissen und den Annahmen. Eine solche Deduktion scheint auf den ersten Blick weniger kräftig zu sein, weil mit beliebigen Annahmen sich so etwas wie Willkür einzuschleichen droht. Doch können wir je nach Art der Annahmen diesem Vorwurf entgegentreten. Wir wollen uns mit zwei Arten von Annahmen befassen, dem konditionalen Beweis und dem indirekten Beweis.

2.8.1 Der Konditionale Beweis (KB)

Eine beliebig gewählte Annahme braucht nicht zu einem willkürlichen Resultat zu führen, nämlich dann nicht, wenn die Annahme wieder ausgelöst wird. In diesem Fall ist das Schlußresultat letztlich doch wieder nur aus den Prämissen erschlossen worden; die Annahme ist bloß intern zum Zweck einer vereinfachten Deduktion eingeführt worden. Wir kennen dieses Verfahren aus dem Beispiel des reichen Arabers.

Ein Araber hatte 17 wertvolle Pferde. Sie sollten ungleichmäßig auf seine drei Söhne aufgeteilt werden und zwar im folgenden Verhältnis: Der älteste Sohn sollte die Hälfte bekommen, der zweite $^1/_3$ und der jüngste $^1/_9$. Will man nicht den Metzger herbemühen, empfiehlt es sich, ein Pferd auszuleihen. Das entspricht der Annahme, man habe 18 Pferde. Dann bekommt

der 1.	die Hälfte	von 18 Pferden	= 9 Pferde
der 2.	$^1/_3$	von 18 Pferden	= 6 Pferde
der 3.	$^1/_9$	von 18 Pferden	= 2 Pferde
			17 Pferde

Nun wird die Annahme rückgängig gemacht, indem das geliehene Pferd dem früheren Besitzer zurückgegeben wird. Es ist ja nicht geteilt worden, und den Zweck hat es erfüllt, nämlich bei der sonst unausführbaren Rechenaufgabe auszuhelfen.

Der konditionale Beweis erlaubt unter Umständen, eine langwierige Deduktion zu verkürzen. Vorteilhaft wird er eingesetzt, wenn der Schluß eine Implikation ist. Zeigen wir das an einem Beispiel

1. A $\quad \underline{/ \ B \rightarrow A}$

Aus ‚A' läßt sich die Bedingung ‚B → A' erschließen.

Übung 2.8.1

1) Zeigen Sie, daß sich diese Deduktion auch mit Hilfe unserer bisherigen Regeln als richtig erweist.

Der Einsatz des konditionalen Beweises geht davon aus, daß das nicht gegebene ‚B' angenommen wird. Logisch gesehen ist jede beliebige Annahme vertretbar, sofern sie als solche deutlich gekennzeichnet ist und am Schluß wieder ausgelöst wird. Wir deuten das mit einem Pfeil auf der linken Seite an.

1. A	/ B → A	
→ 2. B	KA	KA = konditionale Annahme

Im dritten Schritt wiederholen wir ‚A'. Das heißt jetzt trivialerweise, daß ‚B' und ‚A' gegeben sind. Genauer. Wenn ‚B', dann auch ‚A'. Damit können wir die Annahme auslösen. Das wird durch den heruntergezogenen und quer gerichteten Pfeilschwanz angezeigt. Das Resultat ist der konditionale Beweis, abgekürzt KB:

1. A	/∴ B → A	
→ 2. B	KA	
3. A	1, Rep.	Rep. = Repetition
4. B → A	2–3 KB	

Allgemein gilt:

→ p	KA
...	
...	
q	
p → q	KB

Der konditionale Beweis ist nicht, wie es den Anschein macht, eine ausgefallene logische Spitzfindigkeit. Er entspricht im Gegenteil einer häufig benutzten umgangssprachlichen Argumentation. Man stellt beispielsweise fest, daß das Auto anhält. Dann ist es nicht abwegig, die Überlegung anzustellen, der leere Benzintank könnte die Ursache für das Anhalten sein. Ich überlege so:

1. Das Auto steht still (Tatsachenfeststellung).
2. Wenn der Benzintank leer ist, dann steht das Auto still.

1. läßt 2. vermuten. Freilich ist damit nicht gesagt, der Benzintank sei wirklich leer. Diese Behauptung wäre ein unerlaubter Rückschluß.

Weiteres Beispiel:

1. p → q	
2. ¬ p → r	/∴ q ∨ r
→ 3. ¬ r	KA
4. p	3, 2, MT
5. q	4, 1, MP

6. $\neg r \rightarrow q$	3–5 KB
7. $r \vee q$	6, Impl.
8. $q \vee r$	7, Komm.

Innerhalb derselben Deduktion dürfen beliebig viele Annahmen gemacht werden. Dabei sind zwei Bedingungen einzuhalten. Erstens müssen die Annahmen der Reihe nach wieder gelöst werden. Die Verletzung dieser Forderung zeigt sich im Überschneiden der Pfeile. Zweitens muß jede Annahme wieder ausgelöst werden. Ein Verstoß gegen die letztere Bedingung ist erkennbar an einem Pfeil ohne Schwanz.

Beispiel mit zwei Annahmen.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2. $r \rightarrow (q \rightarrow s)$	/∴ $p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3. p	KA /∴ $q \rightarrow s$
4. q	KA /∴ s
5. $q \rightarrow r$	3, 1, MP
6. r	4, 5, MP
7. $q \rightarrow s$	6, 2, MP
8. s	4, 7, MP
9. $q \rightarrow s$	4–8 KB
10. $p \rightarrow (q \rightarrow s)$	3–9 KB

Wenn die Annahmen in der Reihenfolge der Konklusion, von links nach rechts, gesetzt werden, so wird dadurch eine Pfeilüberschneidung vermieden. Fehlerhaft kann die Ableitung werden, wenn man sich von den Prämissen verführen läßt. Dazu das gleiche Beispiel mit umgeformter erster Prämisse:

1. $(q \rightarrow r) \vee \neg p$	
2. $r \rightarrow (q \rightarrow s)$	/ $p \rightarrow (q \rightarrow s)$
3. q	KA
4. p	KA
5. $q \rightarrow r$	4, 1, DS
6. r	3, 5, MP
7. $q \rightarrow s$	6, 2, MP
8. s	3, 7, MP
9. $q \rightarrow s$	3, 8, KB
10. $p \rightarrow (q \rightarrow s)$	4–9, KB

Pfeilüberschneidungen sind unerlaubt.
Schließlich noch ein Beispiel mit nicht ausgelöster Annahme:

1. $p \rightarrow q$	/ $p \rightarrow (q \wedge r)$
2. p	KA / $q \wedge r$
3. q	2, 1, MP
4. r	KA
5. $q \wedge r$	3, 4, Konj.
6. $p \rightarrow (q \wedge r)$	

Übung 2.8.1

2) $p \rightarrow q$ / $\neg q \rightarrow \neg p$

3) 1. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
2. $s \vee q$
3. $p \rightarrow \neg s$ / r

4) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ / $p \rightarrow r$

5) 1. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
2. $s \rightarrow (t \wedge p)$
3. q / $r \vee \neg s$

6) – / $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

7) – / $(p \wedge q) \rightarrow p$

8) – / $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

9) – / $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$

10) 1. $r \rightarrow (v \rightarrow \neg q)$
2. $w \rightarrow \neg (p \wedge s)$
3. $\neg (w \vee t) \rightarrow v$ / $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow t)))$

2.8.2 Der indirekte Beweis (IB)

In der Wahl der Annahmen unterscheidet sich der indirekte Beweis deutlich vom konditionalen. Der indirekte Beweis zweifelt das Resultat an. Logisch gesehen ist das gleichbedeutend mit seiner Verneinung. Wenn sich dann im Lauf der Deduktion eine

Kontradiktion einstellt, dann ist das ein Anzeichen dafür, daß das verneinte Resultat eine unerlaubte Annahme war. Es ist der klassische Beweis ad absurdum. Der Vorgang läßt sich aus Beispielen deutlich ersehen. Analog zum konditionalen Beweis benutzen wir IA für indirekte Annahme und IB für indirekten Beweis.

1. $p \wedge q$	$/ \therefore q$
2. $\neg q$	IA
3. q	1b, Simpl.
4. $q \wedge \neg q$	3, 2, Konj.
5. $\neg\neg q$	2–4 IB
6. q	5, DN

Da wir bei 4. auf einen Widerspruch gestoßen sind, muß die ursprüngliche Annahme 2. verneint werden.

Der indirekte Beweis kann auch mit einem konditionalen verknüpft werden.

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	
2. $(r \vee s) \rightarrow t$	$/ \therefore p \rightarrow t$
3. p	KA
4. $\neg t$	IA
5. $\neg (r \vee s)$	4, 2, MT
6. $p \vee q$	3, Add.
7. r	6, 1, MP
8. $r \vee s$	7, Add.
9. $(r \vee s) \wedge \neg (r \vee s)$	8, 5, Konj.
10. t	4–9, IB
11. $p \rightarrow t$	3–10, KB

Übung 2.8.2

1) 1. $p \rightarrow (q \vee s)$
2. $s \vee p$
3. $(q \vee s) \rightarrow t$ $\quad$ $/ \; t$

2) 1. $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$
2. $(q \vee s) \rightarrow t$
3. $\neg t$ $\quad$ $/ \; \neg (p \vee r)$

3) 1. $p \quad \underline{/\ q \vee \neg q}$

4) 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)$
2. $(s \rightarrow t) \rightarrow (p \wedge r) \quad \underline{/\ s}$

5) 1. $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
2. $(r \vee t) \rightarrow (s \rightarrow \neg p) \quad \underline{/\ \neg p}$

6) 1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)$
2. $q \rightarrow \neg s \quad \underline{/\ \neg p \vee \neg q}$

7) 1. $\neg s \quad \underline{/\ \neg [((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge ((p \rightarrow r) \rightarrow s)]}$

8) 1. $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg r$
2. $p \rightarrow q \quad \underline{/\ r \rightarrow \neg p}$

2.9 Reduktion von Funktoren

Wir haben uns in der Darstellung der Aussagenlogik auf fünf Funktoren festgelegt. Das entspricht der üblichen Darstellungspraxis. Aus den zahlreichen Umformungsregeln ergibt sich, daß wir sachlich mit weniger auskommen könnten. Es lassen sich alle Aussagenverknüpfungen auf eines der folgenden drei Paare zurückführen:

$\neg, \wedge$
$\neg, \vee$
$\neg, \rightarrow$

Übung 2.9

1) $q \rightarrow (p \vee q)$

2) $p \leftrightarrow q$

Geben Sie für beide Ausdrücke die Umformungen an:

a) Negation und Konjunktion
b) Negation und Disjunktion
c) Negation und Implikation

Nun haben schon Peirce 1880 und Sheffer 1913 herausgefunden, daß es sogar möglich ist, mit einem einzigen Funktor auszukommen. Freilich ist keiner aus dem bisherigen Vorrat dazu geeignet. Deshalb haben die beiden Autoren je einen neuen Funktor definiert, die Peircefunktion und den Shefferstrich:

Peirce				Sheffer		
p	↓	q		p	|	q
1	0	1		1	0	1
1	0	0		1	1	0
0	0	1		0	1	1
0	1	0		0	1	0

Die Peircefunktion hat die gleiche Wahrheitstafel wie der Ausdruck ‚$\neg (p \vee q)$'. Deshalb läßt er sich mit „weder p noch q" wiedergeben. Der Shefferstrich entspricht genau dem Ausdruck ‚$\neg (p \wedge q)$'. Alle Funktoren lassen sich in einen der beiden umschreiben. Das sei nur an der Peircefunktion gezeigt:

$\neg p$	$p \downarrow p$	$p \downarrow p$
$p \wedge q$	$\bar{p} \downarrow \bar{q}$	$(p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
$p \vee q$	$\overline{p \downarrow q}$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
$p \rightarrow q$	$\overline{\bar{p} \downarrow q}$	$((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

Übung 2.9

3) a) „Eine weitere Konsequenz ist Whitehead's Überzeugung, daß die Aussagenlogik, wenn sie auf der Inkonsistenz beruht (H. M. Sheffer zeigte, wie das System der ‚Principia Mathematica' auf der Inkonsistenz als der einzigen undefinierten Relation aufgebaut werden kann. Er spricht zwar nicht von der Inkonsistenzrelation, sondern von einer Operation namens „Rejektion" [= Shefferstrich], „Non-Konjunktion") die fundamentale Tatsache einer pluralistischen Prozeßmetaphysik reflektiert." V. Lowe, The Development of Whitehead's Philosophy (Ed.) A. Schilpp. Library of Living Philosophers (New York 1951) 121.

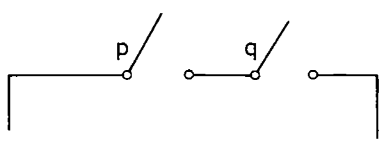
b) Sheffer sagt folgendes: „Schließlich gelang es durch unglaublich geistreiche symbolische Analysen, die Prinzipien der Formalen Logik auf eine kleine Anzahl grundlegender Aussagen zu redu-

zieren, die in einer äußerst geringen Anzahl von Grundbegriffen ausgedrückt wird. Bei dieser Behandlung der Logik ist die Ökonomie der Basisbegriffe dermaßen bedeutsam, daß die Ersetzung der zwei Aussagenoperatoren Negation und Disjunktion durch einen einzigen Operator der Nicht-Konjunktion von den Autoren für eine kardinale Verbesserung der neuen Auflage angesehen wird."
H. M. Sheffer, Rez. A. N. Whitehead/B. Russell, Principia Mathematica. vol. 1 (^{2}1925) Cambridge Univ. Press. Isis 8 (1926) 229.

1. Um was geht es Sheffer (in Text b)?
2. Wie stehen Rejektion oder Nicht-Konjunktion zu einer inkonsistenten Relation?
3. Reflektiert diese Inkonsistenz die Tatsache einer pluralistischen Prozeßmetaphysik?

Bis in die neueste Zeit hinein vermochte man unter dieser Vereinfachung kaum mehr als eine theoretisch bemerkenswerte Tatsache zu vermuten. Inzwischen hat sich eine Verwirklichung in der Praxis auffinden lassen.

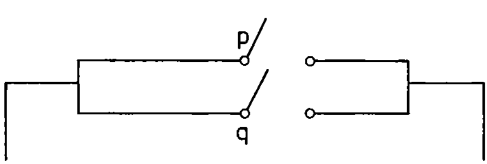
Die Elektronik hat es bei den einfachsten Schaltungen mit Serien- und Parallelschaltung zu tun. Die beiden lassen sich als Und- und Oder-Verknüpfungen realisieren.



Serienschaltung (Und-Verknüpfung)

Hier kann nur Strom durchfließen, wenn der Kreis ganz geschlossen ist, also wenn ‚p' und auch ‚q' geschlossen sind. Das entspricht der Konjunktion.

Anders ist es bei der Parallelschaltung:

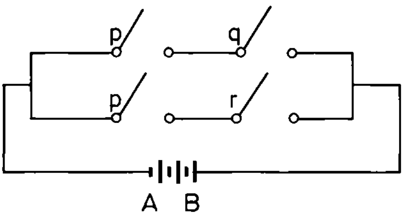


Parallelschaltung (Oder-Verknüpfung)

Für den Stromdurchfluß genügt es, daß ,p' oder ,q' geschlossen ist. Selbstverständlich fließt auch Strom, wenn beide geschlossen sind. Das entspricht den Bedingungen unserer Disjunktion.

Beispiele:

1) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$



,p' kommt zweimal vor. Da beide Disjunktionsargumente Konjunktionen sind, brauchen wir zwei Kreise und ,p' erscheint zweimal.

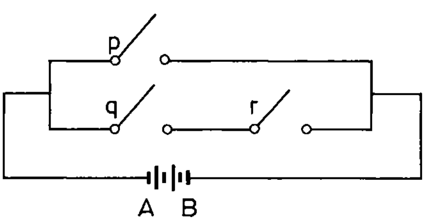
2) $p \vee (q \wedge r)$

Es lassen sich auch kompliziertere Deduktionen darstellen, etwa die folgende:

3) 1. $p \rightarrow q$
2. $\neg q$
3. $p \vee r$ $\underline{/\ r}$ oder $[((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \wedge (p \vee r)] \rightarrow r$

oder in der disjunktiven Normalform:

$(p \wedge \neg q) \vee q \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee r$



Die Tautologie von 3) wirkt sich so aus, daß immer Strom fließt, welche Werte die Variablen annehmen mögen.

Zur Realisierung von Schaltsystemen werden aus technischen Gründen Nand- und Nortore bevorzugt. „Nand" ist ein englischer Wortverschnitt aus „not" und „and", beziehungsweise „Nor" aus „not" und „or". Nor entspricht unserer Peircefunktion, Nand dem Shefferstrich. Damit hat einmal mehr eine theoretische Spielerei eine technische Anwendung gefunden.

2.10 Polnische Notation

Der überragende Vorteil der polnischen Schreibweise besteht in einer Anordnung, die auf Klammern verzichten kann und dennoch höchste Präzision erreicht. Das läßt sich an Beispielen aus der Arithmetik erklären:

$(2 + 5) \cdot 7 = 49 \qquad 2 + (5 \cdot 7) = 37$

Analog dazu ließe sich die polnische Notation etwa so einsetzen:

$+ 25 \cdot 7 = 49 \qquad 2 + \cdot 57 = 37$

Wer nicht gerade Hewlett Packard programmiert, dem erscheint diese Umschreibung bestenfalls verwirrend. Doch brauchen sich diese Bedenken nicht auf die Logik zu übertragen.

Die Funktoren werden nicht mit Symbolzeichen, sondern mit großen Buchstaben dargestellt und zwar auf folgende Weise:

N	Negation
K	Konjunktion
A	Disjunktion
C	Implikation
E	Äquivalenz

Der Funktor wird dem Argument vorgestellt. Damit wird seine Reichweite angedeutet.

Beispiele

1. Np	$\neg p$
2. Kpq	$p \wedge q$
3. CApqp	$(p \vee q) \rightarrow p$
5. CCpqCCqrCpr	$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

Wird die Übersetzung unübersichtlich, dann empfiehlt es sich, auf der rechten Seite der Formel zu beginnen. Bei 5. sehen wir sogleich, daß ‚$p \rightarrow r$‘ impliziert wird von ‚$q \rightarrow r$‘.

Ferner greifen wir für die Negation auf die Vereinfachung von Hilbert zurück. Der Strich über dem Funktor oder der Variable erleichtert die Übersicht. Wir schreiben an Stelle der original polnischen Notation Np, NKpq, KNpNq leichter lesbar

$\bar{p}$	$\neg p$
$\bar{K}pq$	$\neg (p \wedge q)$
$K\bar{p}\bar{q}$	$\neg p \wedge \neg q$

Übung 2.10

Übersetzen Sie in polnische Notation:
1. $(p \vee p) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (p \vee p)$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
5. $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg (p \vee q)$

Diese Schreibweise verhilft uns zu einer neuen Beweistechnik. Es ist die Technik der Semantischen Tafeln, die mit der polnischen Notation vereinfacht wird.

Der Zweck solcher Tafeln besteht darin, Folgen von Disjunktionen zu erhalten. In der vorgelegten Schreibweise läßt sich unmittelbar ablesen, ob sie tautologisch sind oder nicht. Tautologien sind erwünscht, weil sie die Tafeln schließen. Ein Blick genügt, um erkennen zu lassen, daß die zwei ersten Reihen geschlossen sind, nicht aber die dritte und vierte:

$p\ \bar{p}$
$p\ \bar{q}\ r\ a\ p\ q\ p\ p\ s\ r$
$q\ q$
$\bar{p}\ q\ \bar{p}\ \bar{p}\ r\ s\ q\ q\ \bar{p}$

Da man sich zwischen den Variablen Disjunktionen zu denken hat, ist ‚p $\bar{p}$' – was dasselbe bedeutet wie ‚$p \vee \neg p$' – offensichtlich eine Tautologie. Dasselbe gilt von ‚q $\bar{q}$', mag dieser Ausdruck noch von einer beliebigen Anzahl weiterer Variablen gefolgt sein.

Der Grundgedanke besagt nun: Sobald Disjunktionen hergestellt sind, dürfen die Funktoren gestrichen werden. Die Streichungsre-

geln sind daher Anweisungen, die mit der Streichung der Funktoren durch ausgeklügelte Umformungen Disjunktionen produzieren.
Wir beginnen mit der Streichungsdefinition der Funktoren A, C, $\bar{K}$. Unter ihnen ist die A-Regel die einfachste. Aus ‚$p \vee q$' den Ausdruck ‚p q' herstellen heißt, das Disjunktionszeichen weglassen. Das Streichen des ‚A' bei ‚A p q' führt zum selben Ergebnis: ‚$\cancel{A}$ p q'. Ähnlich führen wir ‚$p \rightarrow q$' mit der Implikationsregel auf ‚$\neg p \vee q$' zurück und wenn wir das Disjunktionszeichen grundsätzlich weglassen, erhalten wir ‚$\bar{p}$ q'. Folglich lautet unsere C-Regel: ‚C p q' gestrichen ergibt ‚$\cancel{C}$ $\bar{p}$ q'. Und schließlich noch die $\bar{K}$-Regel. Wir wissen, daß ‚$\neg (p \wedge q)$' mit De Morgan in ‚$\neg p \vee \neg q$' umzuformen ist, also in ‚$\bar{p}$ $\bar{q}$'. Daher definieren wir die Streichungsregel ‚$\bar{K}$' so: ‚$\bar{K}$ p q' führt zu ‚$\cancel{K}$ $\bar{p}$ $\bar{q}$'. Somit gelten zunächst folgende drei Regeln:

$$\begin{array}{lll} A\ p\ q & \qquad & \cancel{A}\ p\ q \\ C\ p\ q & & \cancel{C}\ \bar{p}\ q \\ \bar{K}\ p\ q & & \cancel{K}\ \bar{p}\ \bar{q} \end{array}$$

Beispiele:

$$\begin{array}{lll} 1.\ A\ p\ \bar{p} & \qquad & \cancel{A}\ p\ \bar{p} \\ 2.\ A\ \bar{K}\ p\ q\ p & & \cancel{A}\ \cancel{K}\ \bar{p}\ \bar{q}\ p \\ 3.\ C\ K\ p\ q\ p & & \cancel{C}\ K\ p\ q\ p \end{array}$$

Die Streichungsregel C im 3. Beispiel verlangt, den Vordersatz der Implikation zu verneinen. Der Vordersatz kann aber selber ein komplexer Ausdruck sein, etwa eine Konjunktion wie im vorliegenden Beispiel. Es liegt also folgende Struktur vor:

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow p \\ \qquad p \rightarrow q \end{array}$$

Daher ist hier aufgrund der C-Regel K zu verneinen. Der Reihe nach ergeben sich folgende Schritte:

$$\begin{array}{lll} C\ K\ p\ q\ p & \qquad & \\ \cancel{C}\ K\ p\ q\ p & & C \\ \cancel{C}\ \cancel{K}\ \bar{p}\ \bar{q}\ p & & \bar{K} \end{array}$$

Wir nennen alle drei Formeln geschlossen, weil mindestens eine

Variable mit ihrer Negation auftritt. Die Beispiele sind also allgemeingültig. Diese geschlossenen Zeilen sind disjunktive Normalformen, ein bereits bekanntes Entscheidungsverfahren.

Übung 2.10

6) $p \rightarrow (p \vee q)$
7) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
8) $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
9) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
10) Zeigen Sie, daß $Cpq = \bar{K}p\bar{q}$ ist.

Außer den drei Regeln A, C und $\bar{K}$ müssen noch ihre Negationen besprochen werden. In der Aufzählung gehen wir diesmal alphabetisch rückwärts, also nach der Reihenfolge K, $\bar{C}$ und $\bar{A}$. Die Umformung durch De Morgan fördert eine versteckte Konjunktion zutage. Aufgrund dieser Konjunktion ist bei den drei Regeln eine Besonderheit zu beachten.

Eine Konjunktion ist nur dann eine Tautologie, wenn alle Argumente Tautologien sind. Im einfachsten Fall besteht die Konjunktion aus zwei Argumenten, ‚$p \wedge q$', wobei ‚p' getrennt von ‚q' zu untersuchen ist. Selbstverständlich liegt bei diesem Beispiel keine Tautologie vor, denn ‚p' ist sowenig eine Tautologie wie ‚q'. Hingegen wäre etwa die Konjunktion ‚$(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$' eine Tautologie. Da jedes Argument der Konjunktion zu überprüfen ist, ob es tautologisch sei, führt dieser Nachweis zu einer Aufsplitterung entsprechend der Anzahl der Konjunktionsglieder. Jedem Argument der Konjunktion bleibt somit eine eigene Zeile vorbehalten, was so geschrieben wird:

$$\frac{p}{q}; \qquad \frac{p \vee \neg p}{q \vee \neg q} = \frac{p \ \bar{p}}{q \ \bar{q}}.$$

Daran ist unmittelbar abzulesen, ob eine Tautologie vorliegt. Es ist genau dann der Fall, wenn eine Variable und gleichzeitig die Negation dieser Variable in jeder Zeile nachweisbar ist.

Die für die Konjunktion erforderliche Aufsplitterung führt dazu, die Streichung mit einem Zusatz zu belegen:

$$K\ p\ q \qquad\qquad \cancel{K}\ \underbrace{p\ q}$$

Bei den Regeln ‚$\bar{C}$' und ‚$\bar{A}$' ist analog vorzugehen, weil hinter ihnen gleichfalls eine Konjunktion versteckt ist, wovon man sich mühelos überzeugt. ‚$\bar{C}$ p q' ist dasselbe wie ‚$\neg$ (p $\rightarrow$ q)', was äquivalent ist mit ‚p $\wedge$ $\bar{q}$'; ‚$\bar{A}$ p q' bedeutet ‚$\neg$ (p $\vee$ q)' und das ist wiederum äquivalent mit ‚($\bar{p}$ $\wedge$ $\bar{q}$). Entsprechend lauten die Regeln:

$$\bar{C}\ p\ q \qquad \cancel{\bar{C}}\ \underbrace{p\ \bar{q}} \quad \text{und} \quad \bar{A}\ p\ q \qquad \cancel{\bar{A}}\ \underbrace{\bar{p}\ \bar{q}}$$

Die geschweifte Klammer in horizontaler Lage soll andeuten, daß die Variablen in gesonderten Zeilen unterzubringen sind, nämlich so:

$$K\ p\ q \qquad \begin{array}{l|l} \cancel{K} & \underbrace{p\ q} \\ \hline & p \\ \hline & \quad q \end{array} \qquad\qquad \bar{C}\ p\ \bar{q} \qquad \begin{array}{l|l} \cancel{\bar{C}} & \underbrace{p\ \bar{q}} \\ \hline & p \\ \hline & \quad \bar{q} \end{array}$$

$$\bar{A}\ p\ q \qquad \begin{array}{l|l} \cancel{\bar{A}} & \underbrace{\bar{p}\ \bar{q}} \\ \hline & \bar{p} \\ \hline & \quad \bar{q} \end{array}$$

Es sind so viele Zeilen notwendig, wie es Konjunktionsargumente gibt. Alle Variablen, die vor der Aufsplitterung stehen, gelten für alle Zeilen.

Beispiele:

1) $C\ p\ C\ q\ K\ p\ q$

$$\cancel{C}\ \bar{p}\ \cancel{C}\ \bar{q}\ \begin{array}{l|l} \cancel{K} & \underbrace{p\ q} \\ & \\ \hline & p \\ \hline & \quad q \end{array}$$

$$\bar{p} \quad \bar{q}$$

Die erste Zeile lautet: $\bar{p}$ $\bar{q}$ p, die zweite $\bar{p}$ $\bar{q}$ q. Nur wenn alle Zeilen geschlossen (= Tautologien) sind, ist die Formel allgemeingültig.

2) $C\ \bar{p}\ C\ A\ p\ q\ q$

$\cancel{C}\ \bar{\bar{p}}\ C\ \cancel{A}\ \underbrace{\bar{p}\ \bar{q}}\ q$

p | $\bar{p}\quad q$

$\bar{q}\ q$

3) $C\ K\ A\ \bar{p}\ q\ p\ q$

$\cancel{C}\ \cancel{K}\ \cancel{A}\ \underbrace{\bar{\bar{p}}\ \bar{q}}\ \bar{p}\ q$

$p\quad \bar{p}\ q$

$\bar{q}\ \bar{p}\ q$

4) $C\ K\ C\ p\ q\ C\ \bar{p}\ q\ q$

$\cancel{C}\ \cancel{\bar{K}}\ \underbrace{\cancel{\bar{C}}\ p\ \bar{q}}\ \underbrace{\cancel{\bar{C}}\ \bar{p}\ \bar{q}}\ q$

$\bar{p}\quad q$

p | $\bar{q}\ q$

$\bar{q}$ | $\bar{p}\quad q$

$\bar{q}\ q$

Übung 2.10

11) $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
12) $r \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$
13) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \wedge m) \rightarrow q]$
14) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
15) $\neg (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$