1. Einige Grundbegriffe der naiven Mengenlehre

Mengenlehre ist uns vor allem als umstrittenes mathematisches Schulfach bekannt. In diesem Streit ist der kühle Verstand soweit erhitzt worden, daß der Gedanke kaum mehr erwogen wird, es könnte sich möglicherweise um ein allgemeines Gebiet handeln, das nur noch wenig mit dem traditionellen Verständnis der unbeliebten Mathematik zu tun hat. Auf jeden Fall befaßt sich die Mengenlehre mit Beziehungen. Außerhalb der Mathematik sind Beziehungen nicht weniger bedeutsam, seien es solche zwischen den Mitgliedern eines Schachklubs, zwischen mir und meinem Papagei oder zwischen Stimmbürger und Staat. Natürlich werden diese Beziehungen nicht ausgeschöpft durch mengentheoretische Angaben, sowenig wie mit „100 Dollar" ein bestimmter Geldbetrag erschöpfend beschrieben ist.

Mengenlehre ist eine allgemeine Grunddisziplin, deren Erforschung die Philosophen zu Unrecht fast gänzlich den Mathematikern überlassen haben. Dadurch haben sie versäumt, Kenntnis davon zu nehmen, wie sich zahlreiche traditionelle Fragen unter veränderten Gesichtspunkten gewandelt haben. Wir möchten jedoch nicht jenen zahlreichen philosophischen Problemen nachgehen, die durch die Entdeckung der Mengenlehre eine neue Fragestellung erfahren haben. Es sollen nur einige elementare Grundbegriffe dargestellt werden, soweit sie unmittelbar das Verständnis für die Logik fördern. Daß diese Kenntnisse nebenbei zu vertiefter Einsicht in Sprache und Mathematik führen kann, das ist ein erfreulicher Nebeneffekt.

Als Begründer der Mengenlehre ist Georg Cantor (1845–1918) anzusehen. 1874 erschien seine erste Abhandlung zur Mengenlehre. Im Verlauf von etwas mehr als 20 Jahren sind die grundlegenden Publikationen erschienen. Damit ist der Einfluß von Cantor auf die Mathematik vergleichbar mit der Entdeckung der Irrationalzahlen in der Antike oder der Infinitesimalrechnung in der Neuzeit. Die von den Mathematikern anfänglich vorgebrachten

Einwände gegen die Mengenlehre waren wesentlich philosophischer Natur. Der Hauptvorwurf lautete, Mengenlehre sei Mystik. Zu diesem unzutreffenden Bild kamen die Mathematiker, weil sie sich eine ziemlich abgeschlossene Meinung darüber gemacht hatten, was Mathematik sein mußte. Doch die Darstellungen von Cantor haben die Fachleute in relativ kurzer Zeit überzeugt. 1887 wurden die Begriffe auf dem internationalen Mathematikerkongreß anerkannt.

Zuerst noch zwei terminologische Vorbemerkungen: Erstens wird im Zusammenhang mit der Mengenlehre „naiv“ nicht abwertend verstanden; es ist ein Fachausdruck, der besagt, der Aufbau sei nicht streng, nicht axiomatisch durchgeführt, sondern mehr anschaulich. Zweitens wird anstelle von „Menge“ unterschiedslos „Klasse“ gebraucht. Da die beiden Wörter als Synonyme gelten sollen, kann jederzeit „Mengenlehre“ gegen „Klassenlogik“ ausgetauscht werden. Und schließlich bleibt noch beizufügen, daß die benutzten Zeichnungen keine Beweise sind; sie sollen bloß durch ihre Anschaulichkeit das Verständnis erleichtern.

1.0 Definition und Vergleich von Mengen

In der Mengenlehre wird fortwährend von Mengen und Elementen gesprochen. Man könnte sich das Verhältnis dieser beiden Begriffe an einem vertrauteren Zusammenhang verdeutlichen, nämlich am Ganzen und an den Teilen. Menge und Element verhalten sich ungefähr wie das Ganze zu den Teilen. Wichtig ist dabei das *ungefähr*. Die Abweichung besteht darin, daß es uns gelingen wird, von Mengen und Elementen präziser zu reden als vom Ganzen und den Teilen.

Zuerst erwarten wir eine Definition für Menge und Element. Im traditionellen Sinn können diese Begriffe jedoch nicht definiert werden; sie werden als Grundbegriffe eingeführt. Das ist nichts Ausgefallenes, denn in jedem Zweig der Wissenschaften gibt es einige Grundbegriffe, die so fundamental sind, daß sie nicht definiert werden können. So hat auch die Geometrie „Punkt“, „Gerade“ usw. als undefinierte Begriffe eingeführt. Euklid sagt zwar, der Punkt sei „das, was keine Teile hat“. Aber das ist bloß eine Beschreibung, die an die Phantasie appelliert. In diesem Sinn legt auch Cantor eine Definition der Menge vor, wenn er sagt, sie sei „eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“. Das ist bei weitem keine strenge Definition, eher eine Paraphrase, die inhaltliche Vorstellungen erzeugt und uns zu verstehen geben möchte, daß eine ähnliche Situation vorliegt, wie etwa in der Aufzählung: Beine, Arme, Ohren, Nase sind Teile des Menschen. Freilich ist die cantorsche Übersicht insofern präziser, als sich aus den in ihr enthaltenen vier Punkten ein ausreichendes Verständnis für den Mengenbegriff gewinnen läßt. Es genügt, den vier Eigenschaften, die Cantor aufzählt, nachzugehen.

1) Zusammenfassung zu einem Ganzen
2) Objekte der Anschauung
3) Objekte des Denkens
4) bestimmte, wohlunterschiedene Objekte

1) Zusammenfassung zu einem Ganzen: Eine Zusammenfassung zu einem Ganzen liegt vor, wenn ich Eier in einen Korb lege. Was so gesammelt wird, das kann nachher weggetragen werden. Ich darf aber auch das Hausdach als das Ganze der Ziegel auffassen. Doch bevor ich die Eier in den Korb gelegt oder die fehlenden Ziegel auf dem Dach ersetzt habe, ist in mir der Plan gereift, eine dieser Tätigkeiten auszuführen. So habe ich gedankenmäßig im voraus vorgestellte Eier in einen vorgestellten Korb gelegt. Darin liegt nichts Erstaunliches. Eine Handlung wird meistens zuerst überlegt. Überlegen bedeutet hier, sie vor dem geistigen Auge ablaufen zu lassen. Dabei lassen sich nicht nur materielle Dinge zu einem materiellen Haufen zusammenfassen, sondern auch geistige Dinge zu einem geistigen Ganzen. Das Ganze heißt die Menge und die Einzeldinge Elemente.

2) Objekte der Anschauung: Die Elemente, die zu einem Ganzen, zu einer Menge zusammengefügt werden, das können Eier oder Ziegel sein, aber auch Menschen, Flugzeuge, Berge usw. Während Eier und Ziegel in einen Korb gelegt werden können, ist das selbstverständlich für Berge nicht mehr möglich. Doch kön-

nen sie durch bloßes Aufzählen geistig zusammengefaßt werden: Eiger, Mönch und Jungfrau als bekannteste Berggruppe des Berner Oberlandes bilden in unserem Sinn eine Menge mit drei Elementen. Es sind Objekte der Anschauung.

3) Objekte des Denkens: Berge lassen sich nicht leicht verschieben. Deshalb können sie nicht materiell, sondern nur in Gedanken zu Mengen zusammengefaßt werden. Gedanklich kann ich sehr schnell und phantasievoll Mengen bilden. So mag eine Menge aus den folgenden zwei Elementen bestehen: Aus einem Engel und dem Gedanken, den Churchill hatte, als er seine erste Zigarre anzündete. Ein Engel ist nicht sichtbar, auch die Gedanken von Churchill nicht. Beides sind Objekte des Denkens.

4) Bestimmte, wohlunterschiedene Objekte: Für die Zusammenfassung zu einer Menge wird von den Elementen weder verlangt, daß sie materiell sind noch daß sie geistig sind; aber sie müssen bestimmt und wohlunterschieden sein. Das besagt, es muß genau abgrenzbar sein, was noch zum Element gehört. Ein Ei ist ziemlich klar abgegrenzt durch die Schale, und ich kann auch deutlich erkennen, ob es im Korb oder außerhalb liegt. Wenn ich aber als Element die Farbe Grün habe, dann können Zweifel entstehen, ob ein bestimmtes Kleid noch darunter fällt oder ob es bereits blau sei. Die Forderung nach klarer Unterscheidbarkeit stellt sich beispielsweise auch für Wünsche. Ein Wunsch ist ein geistiges Gebilde, ein Objekt des Denkens und kann laut 3) ebenfalls als Element dienen. Doch muß auch hier wieder die Fähigkeit vorausgesetzt werden, daß man entscheiden kann, ob es sich noch um den gleichen Wunsch oder bereits um einen zweiten handelt.

In der Definition enthalten, wenn auch nicht explizit ausgesprochen, ist die Erlaubnis, Elemente verschiedener Objektbereiche, nämlich aus 2) und 3) zu einer Menge zusammenzufassen. Eine Menge kann deshalb aus den beiden Elementen „Apfel“ und „7“ bestehen.

Der Mengenbegriff von Cantor deckt sich nicht vollständig mit dem alltäglichen Sprachgebrauch, wo von einer „Menge“ Menschen auf der Straße die Rede ist oder von einer „Menge“ Arbeit, die auf mich wartet. Hier steht „Menge“ als Synonym zu „viel“, vielleicht auch zu „relativ viel". „Viel" ist jedoch keine Menge, weil nicht genau bekannt ist, wie viele Elemente darin enthalten sind. Ebensowenig bilden die „guten Politiker" eine Menge, solange nicht präzisiert ist, was unter „gut" zu verstehen ist.

1.0.1 Abkürzungen, Gleichheiten und Arten von Mengen

Eine Menge bestehe aus den drei Elementen: Nelke, Ferienprojekt, Tonika. Zur Bezeichnung der Mengen wählen wir große Buchstaben, für die Elemente kleine. Die Elemente werden in geschweifte Klammern gesetzt.

$$M = \{n, f, t\}$$

Sobald wir es mit Mengen zu tun haben, deren Elementenzahl 26 überschreitet, gelangen wir mit der Benennung in Schwierigkeiten, weil der Vorrat des Alphabetes aufgebraucht ist. Wir wollen uns zwar nicht mit so großen Mengen herumschlagen, doch dürfen wir uns den Weg dazu nicht einschränken lassen, falls wir aus irgend einem Grund eben doch mal eine ganz große Menge etwas genauer untersuchen möchten. Deshalb wählen wir Zahlen anstelle der Buchstaben. Wir geben den Elementen Zahlennamen, am besten dem ersten Element den Namen „1", dem zweiten den Namen „2" usw. Dann kann die Menge mit den Elementen Nelke, Ferienprojekt und Tonika so geschrieben werden:

$$M = \{1, 2, 3\}$$

Zu beachten ist, daß die Zahlennamen hier nur eine Ordnungsfunktion haben. Es darf nicht gefolgert werden, das Ferienprojekt sei doppelt so angenehm wie eine Nelke. Es liegt dieselbe Ordnungsfunktion vor, wie bei der Numerierung von Theaterplätzen, wo Platz Nr. 24 nicht besagt, der Platz sei viermal besser als der Platz 6, ja nicht einmal, es seien 23 Plätze besetzt.

Da die Elemente genau unterscheidbar sind, kann deutlich angegeben werden, ob ein bestimmtes Element a zur Menge M gehört, was so geschrieben wird:

$$a \in M$$

oder ob es nicht dazu gehört:

$a \notin M$

Gegeben sei: M: Klasse der Menschen
a: Alfred
f: das Pferd Fortezza

Dann bedeutet: $a \in M$: „Alfred gehört zur Klasse der Menschen", oder vertrauter: „Alfred ist ein Mensch". Analog dazu besagt: $f \notin M$: „Das Pferd Fortezza ist kein Element der Menge M", oder: „Fortezza ist kein Mensch".

Wenn zwei Klassen A und B dieselben Elemente enthalten, dann schreiben wir: $A = B$. Die beiden Mengen sind äquivalent.

Beispiel: R: alle rechtwinkligen, gleichseitigen Rechtecke
Q: alle Quadrate
Es gilt: $R = Q$

Wir sehen auch, daß

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

äquivalent ist, aber auch bei

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$$

soll die Äquivalenz gelten. Die Definition über die Gleichheit oder Äquivalenz von Mengen sagt nichts aus über die Reihenfolge der aufgezählten Elemente. Schließlich soll auch

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$$

äquivalent sein, denn jedes Element wird nur einmal gezählt.

Nun gibt es verschiedene Arten von Mengen, von denen uns einige noch nicht bekannt sind. Dazu Beispiele:

$M_1 = \{$Alle Buchstaben des Lukasevangelium$\}$
$M_2 = \{$Alle Schuhe, die ich durchlaufen habe$\}$
$M_3 = \{$Die Namen der englischen Königinnen$\}$
$M_4 = \{$Alle Primzahlen$\}$
$M_5 = \{$Die Löwendenkmäler in Luzern$\}$
$M_6 = \{$Die Schaltjahre zwischen 1985–1987$\}$

An die Art der ersten drei Mengen haben wir uns inzwischen gewöhnt. Natürlich muß vorausgesetzt werden, daß die Forderung 4) überall erfüllt ist, daß ich also genau weiß, um welchen Text des Lukasevangeliums es sich handelt. M_2 erfüllt die Forderung 4) nur dann, wenn meine Mutter ein genaues Verzeichnis aller durchlaufenen Schuhe führt oder wenn auf einem andern Weg eindeutig entscheidbar ist, wie viele es sind. M_3 kann mit Hilfe eines Geschichtsbuches ausfindig gemacht werden.

Hingegen scheinen die Mengen M_4, M_5 und M_6 etwas problematisch zu sein. M_4 ist eine Menge mit einer unendlichen Anzahl von Elementen; da es in Luzern ein einziges Löwendenkmal gibt, hat M_5 genau ein Element und die M_6 hat überhaupt keines. M_6 ist leer. Solche Mengen sollen zugelassen werden, obwohl sie unserem Empfinden ungewohnt erscheinen mögen. Sie kommen uns seltsam vor, weil die Alltagssprache unendliche Mengen nicht berücksichtigt und Mengen mit einem einzigen Element nicht Mengen nennt. Die deutlichste Abweichung finden wir bei der Menge M_6, bei der leeren Menge. Statt uns darüber zu wundern, führen wir für sie einen eigenen Namen ein und schreiben sie so: $\emptyset$ oder auch $\{\ \}$

Der Begriff der leeren Menge ist eine äußerst praktische Erfindung. Denn damit kann man über Mengen korrekt sprechen, ohne daß zum vornherein entschieden sein muß, ob es solche Dinge gibt oder nicht. Die philosophischen Konsequenzen, die sich daraus ergeben, werden uns später noch beschäftigen.

Die Mengen M_5 und M_6 lassen sich so schreiben:

$$M_5 = \{\text{Löwendenkmal}\} \quad \text{oder} \quad M_5 = \{1\}$$
$$M_6 = \emptyset \quad \text{oder} \quad M_6 = \{\ \}$$

Übung 1.0.1

1) Übersetzen Sie die folgenden Ausdrücke in die Schreibweise der Mengenlehre:

   1. Meine Onkeln und Tanten
   2. Die heute im Amt befindlichen Präsidenten von Amerika
   3. Die Könige der Schweiz
   4. Die ehrlichen Redner der UNO

2) Welche Mengen sind äquivalent?

1. $\{1, 2\} = \{$Anzahl natürlicher Erdmonde$\}$
2. $\{$Cantor$\} = \{$Begründer der Mengenlehre$\}$
3. $\{47\} = \{$größte Primzahl zwischen 1–50$\}$
4. $\{126\} = \{$Seiten des Neuen Brockhaus, Bd. 1$\}$

1.0.2 Teilmengen oder Potenzmengen

Eine Menge A heißt Teilmenge oder Untermenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Das wird so geschrieben: $A \subset B$. Nach dieser Erklärung ist jede Menge Teilmenge von sich selber. Damit weicht die mathematische Terminologie einmal mehr vom alltäglichen Sprachgebrauch ab. Diese Abweichung hat unter anderem zur Folge, daß der Jahrhunderte alte Satz, der Teil sei stets kleiner als das Ganze, nicht mehr als absolut gültig angenommen werden muß.

A heißt eine echte Teilmenge von B, wenn B wenigstens ein Element mehr enthält als A. Die echte Teilmenge wird so geschrieben: $A \subseteq B$. Stimmt die Teilmenge mit der Grundmenge überein, so heißt sie unechte Teilmenge. Sie stimmt mit ihr dann überein, wenn sie die gleichen Elemente enthält wie die Teilmenge.

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$
$$C = \{1, 2\}$$

Dann ist A eine echte Teilmenge von B. Ebenfalls ist C eine echte Teilmenge von B. Hingegen ist A eine unechte Teilmenge von C.

Nun stellen wir uns die Frage, wie die Teilmengen einer Menge aufzufinden sind. Gegeben sei eine Menge M mit drei Elementen a, b, c, also $M = \{a, b, c\}$. Wenn diese Menge M ebenfalls 3 Teilmengen besäße, dann wären die Begriffe Teilmenge und Element identisch. Die beiden gelten jedoch nicht als synonym. Wie läßt sich ihre gegenseitige Beziehung präzisieren?

Während die Elemente in den geschweiften Klammern direkt ab-

gezählt werden können, muß die Anzahl der Teilmengen berechnet werden. Das Verfahren wird uns durch einen andern Namen nahegelegt. Anstelle von Teilmengen spricht man auch von Potenzmengen. Zur Berechnung der Teilmengen geht man so vor, daß zuerst die Elemente abgezählt werden; die so erhaltene Zahl wird als Potenz von 2 geschrieben, also:
$2^{\text{Anzahl Elemente}}$ = Teilmengen. Bei der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ haben wir 5 Elemente, folglich 2^5 Teilmengen. Entsprechend kommen wir bei 23 Elementen auf 2^{23} Teilmengen und bei n Elementen auf 2^n Teilmengen. Die Potenz- oder Teilmenge von M schreiben wir P(M). Wir zeigen, daß die Mengen mit 0 bis 3 Elementen 2^0 bis 2^3 Teilmengen enthalten, wobei die entsprechenden Teilmengen aufgezählt werden.

Elemente	Teilmengen	
$A = \{\ \}$	$P(A) = \{\emptyset\}$	$2^0 = 1$
$B = \{a\}$	$P(B) = \{\{a\}, \emptyset\}$	$2^1 = 2$
$C = \{a, b\}$	$P(C) = \{\{a\}, \{b\}, \{ab\}, \emptyset\}$	$2^2 = 4$
$D = \{a, b, c\}$	$P(D) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{ab\}, \{bc\}, \{ac\}, \{abc\}, \emptyset\}$	$2^3 = 8$

Als ungewohnt fallen uns zwei Mengen auf. Jede Menge ist eine (unechte) Teilmenge von sich selber, und die leere Menge ist eine echte Teilmenge einer jeden Menge. Deshalb gelten immer

$$M \subseteq M \quad \text{und} \quad \emptyset \subset M$$

Es sind dies die beiden Mengen, die bei der Aufzählung der Teilmengen am leichtesten übersehen werden.

Übung 1.0.2

Gegeben seien die drei Mengen:

$A = \{\text{Sieb}\}$
$B = \{\text{Eis, Musik, Ida}\}$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1. Wie viele Elemente hat die Menge A?
2. Ist „Sie“ eine Teilmenge von A?

3. Ist „Akkord“ eine Teilmenge von B?
4. Wieviel Elemente hat die Menge C?
5. Geben Sie die Teilmengen von A an
6. Geben Sie die Teilmengen von B an
7. Geben Sie die Teilmengen von C an

Diese Überlegungen gehen über mathematische Spielereien hinaus. Deshalb wollen wir zwei Punkte daraus noch etwas eingehender betrachten. Der erste betrifft das Verhältnis zwischen Teilmenge und Elementbeziehung ($\subset$, $\in$), der zweite den Unterschied zwischen Null und der leeren Menge ($0, \emptyset$).

1.0.2.1 Inklusion und Elementbeziehung

Die Teilmengenbeziehung wird auch Inklusion genannt. Dieser Name empfiehlt sich, weil er die Gefahr vermindert, den höchst bedeutsamen Unterschied zur Elementbeziehung zu übersehen. In der Umgangssprache werden beide unterschiedslos mit „ist“ wiedergegeben.

(1) Alfred ist Lehrer

Hier besagt das „ist“, daß ein Gegenstand, nämlich Alfred, unter einen Begriff fällt. Wir sagen einfacher: „Alfred ist ein Element der Klasse Lehrer“ und schreiben diese Aussage so: $a \in L$.

(2) Die Schwalbe ist ein Vogel

In dieser Aussage (2) geht es nicht darum, eine bestimmte Schwalbe wiederum als Gegenstand zur Klasse der Vögel zu zählen. Obgleich der bestimmte Artikel verwendet wird (die Schwalbe), ist sinngemäß nicht eine einzelne Schwalbe gemeint, sondern die ganze Schwalbenklasse. Das „ist“ bedeutet demnach, daß die Klasse der Schwalben in der Klasse der Vögel eingeschlossen ist.

Der Unterschied zwischen Elementbeziehung und Inklusion besteht darin, daß im ersten Fall eine Beziehung von einem oder mehreren Gegenständen zu Klassen ausgesprochen wird, im andern Fall eine Beziehung von Klassen zu Klassen.

Die beiden „ist“ haben unterschiedliche Eigenschaften, die sich logisch exakt beschreiben lassen. Die Inklusion ist nämlich transitiv, nicht aber die Elementbeziehung. Was Transitivität bedeutet, das wird später ausführlich erklärt. Vorderhand mag die Andeutung anhand zweier Beispiele genügen.

A ist größer als B „größer als" ist transitiv
B ist größer als C
Also ist A größer als C .

A ist Vater von B „Vater sein von" ist nicht transitiv
B ist Vater von C
Also ist A nicht Vater von C

Zunächst wollen wir das Verhältnis zwischen Elementbeziehung und Inklusion noch etwas vertiefen. Das sei an zwei Mengen F und G gezeigt.

$$F = \{2, 4, 6\}$$
$$G = \{3, \{2, 4, 6\}\}$$

Die Menge F enthält 3 Elemente, folglich $2^3 = 8$ Teilmengen. Die Menge G enthält jedoch nur 2 Elemente, wovon freilich eines selber eine Menge ist. Also $2^2 = 4$ Teilmengen.

Übung 1.0.2.1

1) Zählen Sie die Elemente und die Teilmengen von F und G auf.

An dieser Aufzählung können Sie unmittelbar ablesen:

Für die Menge

$F = \{2, 4, 6\}$ gilt: $2 \in F$; $4 \in F$; und $\{2\} \subset F$; $\{4\} \subset F$
hingegen: $2 \not\subset F$; $4 \not\subset F$;

Für die Menge

$G = \{3, \{2, 4, 6\}\}$ gilt: $3 \in G$; $\{2, 4, 6\} \in G$; und $\{3\} \notin G$;
hingegen: $3 \not\subset G$; $\{2\} \not\subset G$

Nun können wir uns die Transitivität der Inklusion verdeutlichen. Gegeben seien die beiden Mengen

$$H = \{1, 2\}$$
$$I = \{1, 2, 3\}$$

Dann gilt: Wenn $\{2\} \subset H$ ist und $H \subset I$, dann ist auch $\{2\} \subset I$. Demgegenüber ist die Elementbeziehung nicht transitiv. Gegeben seien die beiden Mengen

$$H = \{1, 2\}$$
$$K = \{7, 9, \{1, 2\}\}$$

Wenn nun $2 \in H$ ist und $H \in K$, dann braucht 2 nicht ein Element von K zu sein, was es in diesem Beispiel tatsächlich auch nicht ist.

An einem falschen Syllogismus lassen sich diese Beziehungen philosophisch verwerten:

Menschen sind zahlreich
Sokrates ist ein Mensch
Also ist Sokrates zahlreich

Hier fällt uns die Mehrdeutigkeit des Wortes „ist" auf. In der ersten Prämisse wird „ist" im Sinne der Inklusion aufgefaßt, in der zweiten als Elementbeziehung. Wenn wir die Prämissen korrekt formalisieren, dann erkennen wir sofort, daß ein Schluß unerlaubt ist, weil wir es nicht mit zwei Inklusionen zu tun haben

$$M \subset Z$$
$$S \in M$$

Es folgt

$$S \notin Z$$

Wir können die Ursache des Fehlschlusses auch anders formulieren: Der Mittelterm „Mensch" ist zweideutig. In der 1. Prämisse ist er als Klasse einer Menge – d.h. Menge einer Menge oder Klasse einer Klasse – aufgefaßt, in der 2. hingegen als gewöhnliche Menge. Deshalb läßt sich der gleiche Syllogismus auch so formalisieren:

$$\{M\} \in Z$$
$$S \in M$$

Also $S \notin Z$

Wir haben es hier mit zwei Mengen zu tun, die genauer zu unter-

scheiden sind, die Menge der Menschen und die Menge der Zahlreichen.
Die Menge oder Klasse der Menschen enthält Individuen.

$$M = \{\text{Albert, Brigitte, Claudia} \ldots\}$$

Deshalb läßt sich in aller Strenge behaupten: Sokrates ist ein Mensch, Brigitte ist ein Mensch usw. Man sagt auch, die Individuen fallen unter den Begriff Mensch.

Anders bei der Menge der Zahlreichen. „Zahlreich“ ist ein Begriff; seine Elemente sind nicht Individuen, sondern selber Klassen. Wir nennen nicht den Sand zahlreich oder das Wasser; der Sand ist körnig, das Wasser durchsichtig usw. Aber was ist denn zahlreich? Unter zahlreich fassen wir alle Klassen zusammen, die mehrere Elemente enthalten können, also:

$$Z = \{\{\text{Sandkörner}\}, \{\text{Wassertropfen}\}, \{\text{Bücher}\}, \ldots \{\text{Menschen}\}\}$$

Hier fallen nicht mehr Individuen unter einen Begriff, sondern Begriffe werden einem andern Begriff untergeordnet. Diese äußerst wichtigen Zusammenhänge der Prädikation hat erst Gottlob Frege (1848–1925) systematisch untersucht.

Übung 1.0.2.1

2) Beurteilen sie den folgenden Text

„Die Ist-Verknüpfung unterliegt der Transitivität: wenn A B und B C ist, dann gilt: A ist C: ‚Wenn Pferde Einhufer und Einhufer Wirbeltiere sind, dann sind Pferde Wirbeltiere‘. Unter Verwendung des Begriffs ‚Enthalten‘ kann man also auch sagen: Wenn ein Enthaltenes wieder enthält, ist dieses zweite Enthaltene auch im ersten Enthaltenden.“ (F. Schmidt, Die symbolisierten Elemente der Leibnizschen Logik. Zeitschrift für Philos. Forschung 20 (1966) 597).

1.0.2.2 Null und leere Menge

Der Unterschied zwischen Null und leerer Menge sei an arithmetischen Beispielen verdeutlicht.

Die Gleichung ‚$3x = 4x$' ist für bestimmte Zahlen erfüllt, die wir die Lösungsmenge nennen. Im vorliegenden Fall schreiben wir die Lösungsmenge so: $\{0\}$. Sie hat also – wenn wir von der Unendlichkeit absehen – ein einziges Element, nämlich 0.

Dagegen ist bei der folgenden Gleichung: ‚$3 + x = 4 + x$' die Lösungsmenge die leere Menge. Die leere Menge hat kein Element. Deshalb ergibt die Lösungsmenge der zweiten Gleichung nicht 0, sondern $\emptyset$, oder was dasselbe ist: $\{\ \}$. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung hat 1 Element, die Zahl 0, die Lösungsmenge der zweiten Gleichung jedoch keines. Verwirrungen können deshalb auftreten, weil in der Umgangssprache beide mit ‚nichts' ausgedrückt werden.

Übung 1.0.2.2

(1) Es regnet und es regnet nicht $= 0$
(2) $n + (-n) = 0$

Bei (2) sind für „n" beliebige Zahlen einzusetzen. (H.W. Johnstone, The Law of Non-Contradiction. Logique et Analyse 3 (1960) 3–4).

Sind (1) und (2) korrekte Formulierungen?

1.1 Operationen mit Mengen

(1) „Im chemischen Labor sind die Plätze beschränkt. Einigen Studenten macht das Experimentieren Freude, andere ziehen es vor, die Berichte in den Büchern nachzulesen". Dasselbe könnte man auch so ausdrücken:

(2) „Es gibt 32 Laborplätze. 19 Studenten haben Freude am Experimentieren, 7 möchten lieber die Berichte in Büchern nachlesen und 6 wollen sich dazu nicht äußern".

Häufig wird die Ansicht vertreten, die zweite Darstellungsweise sei eine Übersetzung der ersten in Quantitäten. Das ist ein bedauerlicher Irrtum, denn was hier geschehen ist, hat nichts mit einer

Qualitätseinbuße zu tun. Es ist eine Präzisierung. Die Umgangssprache benutzt nur zwei präzise Mengenangaben: einer und alle. Die Zwischenstufen werden mit „einige“, „mehrere“, „viele“, „die meisten“ usw. angegeben. Damit wird vage ausgedrückt, was sich in Zahlen exakt angeben läßt.

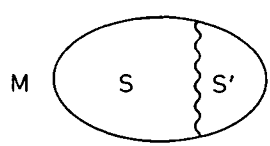
Die Mengenlehre setzt sich zur Aufgabe, Mengen untereinander auf exakte Weise zu vergleichen. Dazu braucht man nicht Zahlen zu benutzen, denn ein präziser Vergleich läßt sich durchführen, sobald die logischen Operationen genau definiert sind. Soweit Zahlen vorkommen, dienen sie nur der Erläuterung. Die Grundoperationen, die hier besprochen werden, stehen der Alltagssprache sehr nahe. Einige der wichtigsten seien kurz aufgezählt.

1.1.1 Das Komplement

Unter dem Komplement oder der Komplementärmenge verstehen wir die Ergänzungsmenge. Da die Ergänzung zu einem Ding aus sämtlichen übrigen Dingen der Anschauung oder des Denkens besteht, könnten wir uns leicht ins Uferlose verlieren. Deshalb schränken wir unsere Rede jeweils auf einen Grundbereich ein.

Als Beispiel bestehe unser Grundbereich aus allen Menschen. Sie lassen sich einteilen nach dem Gesichtspunkt, ob sie am Mittag Suppe essen. Dann bilden jene, die auf die Suppe verzichten das Komplement. Die Menge der Suppenesser wollen wir mit S bezeichnen, das Komplement mit S′. S und S′ bilden zusammen die Menge M des Grundbereiches.

Dieser Sachverhalt läßt sich an einer Zeichnung ablesen



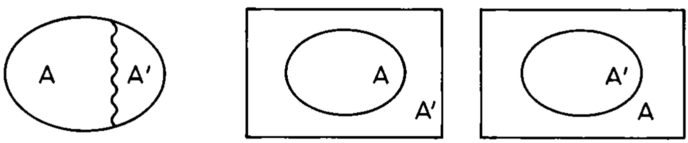
Solche Diagramme werden von Leibniz, Euler und Venn benützt und heißen Eulerkreise oder Venn-Diagramme.

Allgemein gilt: Die Komplementärmenge ist das Komplement oder die Ergänzung zu A, so daß A und A′ zusammen die Menge B ergeben. Drei verschiedene Situationen können entstehen:

1) ist A ein Teil der Menge M, dann ist A′ der ergänzende Teil, so daß A und A′ zusammen die ganze Menge ausmachen.

2) Ist $A = M$, dann ist $A' = \emptyset$

3) Ist $A = \emptyset$, dann ist $A' = M$



1) 2) 3)

Den Grundbereich bezeichnet man mit 1. Dann lassen sich 2) und 3) auch so ausdrücken: Wenn $A = 1$, dann ist $A' = \emptyset$, und wenn $A = \emptyset$, dann ist $A' = 1$.

Übung 1.1.1

1) $1 = \{$Tonleiter der ganzen Töne$\}$
$A = \{f, g, a, h\}$
$A' = ?$

2) $1 = \{$Familie$\}$
$B = \{$Vater$\}$
$B' = ?$

3) $1 = \{$Zweibeiner$\}$
$C = \{$Mensch$\}$
$C' = ?$

4) $1 = \{$Regenbogenfarben$\}$
$D = \{$orange, gelb, grün, blau, indigo, violett$\}$
$D' = ?$

5) $1 = \{$Tiere im Zirkus Knie$\}$
$E = \emptyset$
$E' = ?$

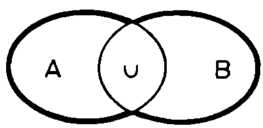
6) $1 = \{\text{Großbritannien}\}$
$F = \{\text{England, Schottland, Wales}\}$
$F' = ?$

1.1.2 Die Vereinigungsmenge

Die Vereinigung zweier Mengen umfaßt alle Elemente der beiden Mengen. Alle Andalusier mögen in der Menge A zusammengefaßt werden, alle Männer, die Bariton singen in der Menge B. Dann umfaßt die Vereinigungsmenge V von A und B alle Andalusier, alle Baritonsänger und erst recht die andalusischen Baritone. Symbolisch schreiben wir

$V = A \cup B$ (sprich: „A zu B" oder „A vereinigt mit B").

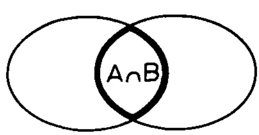
Der Funktor „$\cup$" heißt Summator. Mit den Eulerkreisen läßt sich die Vereinigungsmenge von A und B so darstellen:

$V = A \cup B$ 

1.1.3 Die Durchschnittsmenge

Unter Durchschnittsmenge – auch Intersektion oder Schnittmenge – von A und B verstehen wir jene Menge, die aus den Elementen besteht, die den beiden Mengen A und B gemeinsam sind. Wenn wir das vorige Beispiel übernehmen, dann gehören zum Durchschnitt I alle Andalusier, die Bariton singen. Wenn alle Andalusier nur Bass, Sopran oder Alt sängen, dann wäre die Durchschnittsmenge die leere Menge. Durchschnitt heißt hier natürlich nicht Mittelbildung.

$I = A \cap B$ (sprich „A mit B" oder „A geschnitten B"). Der Funktor „$\cap$" heißt Produktor. Im Diagramm:

$I = A \cap B$ 

Aus der Definition der Vereinigung und dem Durchschnitt ergeben sich folgende Überlegungen: Für jede beliebige Menge A gilt:

$$A \cup A' = 1$$
$$A \cap A' = \emptyset$$

Ferner lassen sich folgende Zusammenhänge an den Diagrammen ablesen:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cup \emptyset = A$
3. $A \cap 1 = 1$
4. $A \cup 1 = 1$

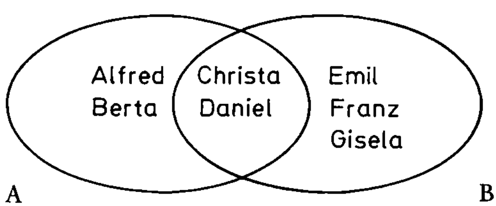
Die Ähnlichkeit mit der traditionellen Arithmetik ist bemerkenswert; die Parallele bricht erst ab bei der Gegenüberstellung von 4. und 4a).

1a) $a \cdot 0 = 0$ 3a) $a \cdot 1 = a$

2a) $a + 0 = a$ 4a) $a + 1 = a + 1$

Übung 1.1.3

Gegeben sind die beiden Mengen A und B



1) Welche Behauptungen sind richtig?
1. Alfred ist ein Element von $A \cup B$
2. Alfred ist ein Element von $A \cap B$.

3. $A \cap B = 4$ Elemente.
4. $\{$Berta, Daniel$\} \subset (A \cup B)$
5. $\{$Christa$\} \in (A \cup B)$
6. $\{\{$Gisela$\}\} \subset (A \cup B)$
7. $\{$Gisela$\} \subset (A \cup B)$

2) Zählen Sie auf:

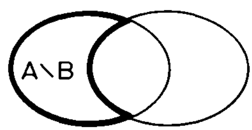
1. Die Elemente von $A \cup B$
2. Die Teilmengen von $A \cap B$.

1.1.4 Die Differenzmenge

Unter der Differenzmenge $A \setminus B$ verstehen wir die Menge derjenigen Elemente von A, die nicht zur Menge B gehören. Wenn die Menge A alle Andalusier umfaßt und die Menge B die Baritonsänger, dann bedeutet $A \setminus B$ alle Andalusier abzüglich der Baritonsänger. Symbolisch schreiben wir:

$D = A \setminus B$ (sprich: „A ohne B"). Der Funktor „\" heißt Differenziator. Im Diagramm dargestellt:

$D = A \setminus B$



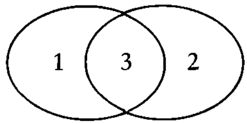
Hier gelten die folgenden Beziehungen für alle Mengen:
ist $B = \emptyset$, dann ist $A \setminus B = A$
Ist $B = A$, dann ist $A \setminus B = \emptyset$

1.2 Die Auswertung

Mit diesen Operationen lassen sich bereits einige elementare Beziehungen überprüfen. Wir wollen dies anhand von zwei und drei Mengen zeigen.

1.2.1 Die Überprüfung zweier Mengen

Zunächst numerieren wir die Felder zweier überschneidender Mengen auf folgende Weise:



Nun können wir für die Buchstaben die entsprechenden Zahlenwerte einsetzen und anschließend die vorgesehenen Operationen ausführen. Dazu einige Beispiele:

Beispiel 1: $A \cup B$

Die Menge A hat zwei Elemente, nämlich 1 und 3. So schreiben wir:

$$A = \{1, 3\}$$

Für B: $B = \{3, 2\}$ oder in der Reihenfolge: $B = \{2, 3\}$

Nun lautet die Aufgabe, A und B zu vereinigen, also $A \cup B$: $\{1, 3\} \cup \{2, 3\}$. Die Vereinigung umfaßt alle Elemente, die sowohl zu A oder zu B gehören, folglich $\{1, 3, 2, 3\}$. Wir ordnen die Elemente und schreiben das zweimal erwähnte Element 3 nur einmal. Dann erhalten wir: $\{1, 2, 3\}$. Unsere Lösung lautet somit:

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

Beispiel 2: $A \cap B$

Dieselbe Aufgabe läßt sich auch für den Durchschnitt zweier Mengen stellen, nämlich für $A \cap B$. Die entsprechenden Zahlenwerte sind wieder den Eulerkreisen zu entnehmen und ergeben eingesetzt: $\{1, 3\} \cap \{2, 3\}$. Der Durchschnitt besteht aus jenen Elementen, die sowohl zur Menge A als auch zur Menge B gehören. 3 ist das einzige Element, das diese Bedingung erfüllt. Daher: $A \cap B = \{3\}$.

Beispiel 3: $A \setminus B$

Schließlich wollen wir noch die Differenz $A \setminus B$ ausrechnen. Wir setzen ein: $\{1, 3\} \setminus \{2, 3\}$. Die Differenz besagt, die Elemente der Menge B sollen von denjenigen aus A abgezogen werden. Wir haben deshalb von der Menge A $\{2, 3\}$ abzuzählen. Da jedoch in der Menge A das Element 2 nicht enthalten ist, bleibt uns nur das Element 3 abzuzählen. Daher erhalten wir: $A \setminus B = \{1\}$.

Beispiel 4: $A \cup B'$

Für A setzen wir wieder ein: $\{1, 3\}$. B' ist das Komplement von B. B ist $\{2, 3\}$, also ist $B' = \{1\}$. Somit lautet unsere Aufgabe: $\{1, 3\} \cup \{1\} = \{1, 3\}$. Der Zeichnung entnehmen wir, daß die Elemente 1 und 3 zusammen genau die Menge A ausmachen. Deshalb dürfen wir schreiben: $\{1, 3\} = A$. Damit haben wir einen komplizierten Ausdruck vereinfacht, da wir nachweisen konnten, daß $A \cup B' = A$ ist. Die vier Zeichen $A \cup B'$ sind durch ein einziges ersetzt worden, durch A. Vereinfachen heißt hier, die Anzahl der Zeichen verringern.

Beispiel 5: $A' \cap B'$

Da $A = \{1, 3\}$ ist und $A' = \{2\}$, $B = \{2,3\}$ und folglich $B' = \{1\}$, so bekommen wir: $\{2\} \cap \{1\} = \emptyset$.

Natürlich kann auch der umgekehrte Weg beschritten werden. $\{1, 2, 3\}$ läßt sich in algebraische Form übersetzen, z.B. als $A \cup B$.

Beispiel 6: $(A \cup B) \cap B'$

Hinsichtlich der Klammern gilt die in der Algebra übliche Regel: Vom Innern der Klammern her auflösen.

1. Schritt: $(A \cup B) = \{1, 2, 3\}$
2. Schritt: $B' = \{1\}$
3. Schritt: $\{1, 2, 3\} \cap \{1\} = \{1\}$

Es wäre unerlaubt, die Klammern zu mißachten und von $B \cap B'$ auszugehen.

Beispiel 7: $A \cup B = B \cup A$

Ist die Kommutativität für die Operation $\cup$ gültig?

$$A \cup B = \{1, 3\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$
$$B \cup A = \{2, 3\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Also ist $A \cup B = B \cup A$, d.h. die Vereinigung ist kommutativ.

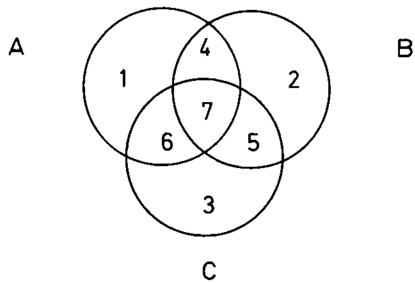
Übung 1.2.1

1) Prüfen Sie die Kommutativität für Durchschnitt und Differenz:
   1. $A \cap B = B \cap A$
   2. $A \setminus B = B \setminus A$
2) Zeigen Sie, daß die Mißachtung der Klammerfolge beim Beispiel 6 zu einem Fehler führt.
3) Beweisen Sie die Gültigkeit der Gesetze von De Morgan:
   1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
   2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
4) Welche der folgenden Gleichungen sind gültig?
   1. $A \cap (A \cup B) = A$
   2. $A \cup (A \cap B) = A$
   3. $(A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = 1$
   4. $(A' \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B') = 1$
5) Drücken Sie die folgenden Mengen in je zwei algebraischen Formeln aus, wobei die eine möglichst kurz sein soll:
   1. $\{3\}$
   2. $\{2\}$
   3. $\{1, 2\}$
6) Vereinfachen Sie:
   1. $(A \cup B') \cap (B' \cup A)$
   2. $(A \cap B) \cup (A' \cup B)$
   3. $B \setminus (A \cap B)$
   4. $(A \cup B) \setminus (A \setminus B)$
   5. $(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$
   6. $((A \cap B) \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B'))$.

1.2.2 Die Überprüfung dreier Mengen

Zur Überprüfung weiterer Gesetzmäßigkeiten, etwa der Assoziativität, benötigen wir eine zusätzliche Menge. Dadurch wird der

Aufwand etwas mühsamer, aber grundsätzlich ändert sich nichts. Anhand der Diagramme erkennen wir, daß eine dritte Menge vier zusätzliche Überschneidungsmöglichkeiten mit sich bringt, was eine neue Numerierung der Felder verlangt.



Wenn wir etwa die Assoziativität prüfen wollen, so steht zur Frage, ob $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ sei oder nicht.

Wir beginnen mit dem linken Klammerausdruck:

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ und
$C = \{3, 5, 6, 7\}$. Die ganze linke Seite ergibt:
$$\{1, 2, 4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Für den rechten Klammerausdruck erhalten wir:

$B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und
$A = \{1, 4, 6, 7\}$. Dann ergibt die ganze rechte Seite
$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{1, 4, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Die linke Seite des Gleichheitszeichens ergibt gleich viel wie die rechte. Das besagt, daß also $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ist und daß die Vereinigung assoziativ ist.

Übung 1.2.2

1) Wie steht es mit der Assoziativität von Durchschnitt und Differenz?

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

2) Gilt das distributive Gesetz?

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

3) Gilt die Antidistributivität?

1. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
2. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

4) Wieviel gibt in Zahlen ausgedrückt?

1. $A \cup (A' \cap B \cap C)$
2. $(A \cup B') \cap (B' \cup C)$
3. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

5) Vereinfachen Sie

1. $((A \cap A') \cap (B \cup C)) \cup (A \cap B)$
2. $(A \cup B') \cap (A' \cup C) \cap (B \cup C')$

6) Welche der folgenden Gleichungen sind gültig?

1. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (A \cup B)$
2. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
3. $(B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
4. $(A \cap B) = A \setminus ((A \cup B) \setminus B)$
5. $((A \cup B) \cap C) \setminus B = (B \cup C)'$

7) Drücken Sie algebraisch aus

1. $\{3, 6\}$
2. $\{2, 4\}$
3. $\{2, 4, 5\}$
4. $\{1, 3, 5\}$

8) Gegeben seien die drei Mengen A, B, C:

A = {Mathematik, Physik, Philosophie, Deutsch}

B = {Englisch, Geschichte, Deutsch, Philosophie}
C = {Philosophie, Griechisch, Latein, Französisch}

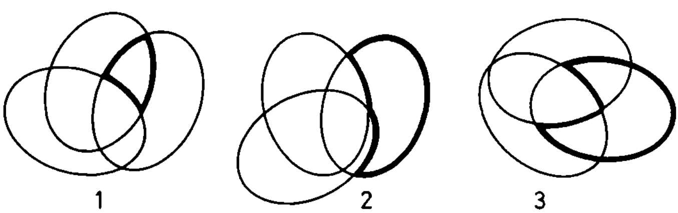
Was bedeuten dann:

1. $(A \cup B) \cap C$
2. $A \cup (B \cup C)$
3. $(A \cup B') \cap C$
4. $A \cap A'$
5. {Philosophie, Deutsch, Griechisch, Latein, Französisch}
6. Vereinfachen Sie: $A \setminus (B \cup C)$

9) Zeichnen Sie

1. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
2. $B \cup (((A \cup (B \cap A)) \setminus A) \cup ((C \cap A) \setminus (A \cap B \cap C))$
3. $((A \cup B)' \cup (A \cap B \cap C))$

10) Drücken Sie die hervorgehobenen Felder algebraisch aus:



11) An einem internationalen Kongreß haben sich Teilnehmer aus den Sprachregionen der ganzen Welt zusammengefunden. Das überträgt sich auf die Kommissionen. In einer solchen Kommission ist ein Sprachengewirr von drei verschiedenen Idiomen zu hören. 8 Teilnehmer reden arabisch, 6 baskisch und 4 chinesisch. Wäre dabei kein Polyglott, so bestünde die Kommission aus 18 Mitgliedern. Nun können sich aber drei arabisch Sprechende auch baskisch unterhalten, zwei baskisch Sprechende chinesisch und ein Mitglied sogar in allen drei Sprachen. Wie viele Teilnehmer hat die Kommission?