

Inhalt

Vorwort — V

Vorwort zur zweiten Auflage — VII

Überblick — XIII

1 Elementare partielle Differentialgleichungen — 1

- 1.1 Laplace- und Poisson-Gleichung — 1
 - 1.1.1 Randwertprobleme — 2
 - 1.1.2 Anfangswertproblem — 6
 - 1.1.3 Eigenwertproblem — 8
- 1.2 Diffusionsgleichung — 12
- 1.3 Wellengleichung — 15
- 1.4 Schrödinger-Gleichung — 20
- 1.5 Helmholtz-Gleichung — 23
 - 1.5.1 Randwertprobleme — 23
 - 1.5.2 Zeitharmonische Differentialgleichungen — 25
- 1.6 Klassifikation — 27
- 1.7 Übungsaufgaben — 28

2 Partielle Differentialgleichungen in Naturwissenschaft und Technik — 33

- 2.1 Elektrodynamik — 33
 - 2.1.1 Maxwell-Gleichungen — 33
 - 2.1.2 Optische Modellhierarchie — 37
- 2.2 Strömungsdynamik — 39
 - 2.2.1 Euler-Gleichungen — 41
 - 2.2.2 Navier–Stokes-Gleichungen — 45
 - 2.2.3 Prandtlsche Grenzschicht — 50
 - 2.2.4 Poröse-Medien-Gleichung — 52
- 2.3 Elastomechanik — 53
 - 2.3.1 Grundbegriffe der nichtlinearen Elastomechanik — 54
 - 2.3.2 Lineare Elastomechanik — 57
- 2.4 Übungsaufgaben — 61

3 Differenzenmethoden für Poisson-Probleme — 65

- 3.1 Diskretisierung des Standardproblems — 65
 - 3.1.1 Diskrete Randwertprobleme — 66
 - 3.1.2 Diskretes Eigenwertproblem — 70
- 3.2 Approximationstheorie bei äquidistanten Gittern — 73
 - 3.2.1 Diskretisierungsfehler in L^2 — 76

3.2.2	Diskretisierungsfehler in L^∞ —	79
3.3	Diskretisierung auf nichtäquidistanten Gittern —	81
3.3.1	Eindimensionaler Spezialfall —	81
3.3.2	Krumme Ränder —	83
3.4	Übungsaufgaben —	86
4	Galerkin-Methoden —	89
4.1	Allgemeines Schema —	89
4.1.1	Schwache Lösungen —	89
4.1.2	Ritz-Minimierung für Randwertprobleme —	92
4.1.3	Rayleigh–Ritz-Minimierung für Eigenwertprobleme —	98
4.2	Spektralmethoden —	100
4.2.1	Realisierung mit Orthogonalsystemen —	101
4.2.2	Approximationstheorie —	105
4.2.3	Adaptive Spektralmethoden —	109
4.3	Finite-Elemente-Methoden —	113
4.3.1	Gitter und Finite-Elemente-Räume —	113
4.3.2	Elementare finite Elemente —	116
4.3.3	Realisierung finiter Elemente —	127
4.4	Approximationstheorie für finite Elemente —	136
4.4.1	Randwertprobleme —	136
4.4.2	Eigenwertprobleme —	140
4.4.3	Winkelbedingung für nichtuniforme Gitter —	144
4.5	Übungsaufgaben —	147
5	Numerische Lösung linearer elliptischer Gittergleichungssysteme —	151
5.1	Direkte Eliminationsmethoden —	152
5.1.1	Symbolische Faktorisierung —	153
5.1.2	Frontenlöser —	156
5.2	Matrixzerlegungsmethoden —	158
5.2.1	Jacobi-Verfahren —	161
5.2.2	Gauß–Seidel-Verfahren —	163
5.3	Verfahren der konjugierten Gradienten —	165
5.3.1	CG-Verfahren als Galerkin-Methode —	166
5.3.2	Vorkonditionierung —	169
5.3.3	Adaptive PCG-Verfahren —	173
5.3.4	Eine CG-Variante für Eigenwertprobleme —	175
5.4	Glättungseigenschaft iterativer Lösungsverfahren —	181
5.4.1	Illustration am Poisson-Modellproblem —	181
5.4.2	Spektralanalyse für Jacobi-Verfahren —	182
5.4.3	Glättungssätze —	186
5.5	Hierarchische iterative Löser —	193

5.5.1	Klassische Mehrgittermethoden —	194
5.5.2	Hierarchische-Basis-Methode —	202
5.6	Vergleich direkte gegen iterative hierarchische Löser —	206
5.6.1	Allgemeiner Vergleich —	206
5.6.2	Leistungskurve eines vertikalen Windgenerators —	207
5.7	Übungsaufgaben —	213
6	Konstruktion adaptiver hierarchischer Gitter —	217
6.1	A-posteriori-Fehlerschätzer —	217
6.1.1	Residuenbasierte Fehlerschätzer —	221
6.1.2	Dreiecksorientierte Fehlerschätzer —	226
6.1.3	Gradienten-Verbesserung —	231
6.1.4	Hierarchische Fehlerschätzer —	235
6.1.5	Zielorientierte Fehlerschätzung —	238
6.2	Adaptive Gitterverfeinerung —	239
6.2.1	Äquilibrierung lokaler Diskretisierungsfehler —	240
6.2.2	Verfeinerungsstrategien —	245
6.3	Konvergenz auf adaptiven Gittern —	250
6.3.1	Ein Konvergenzbeweis —	251
6.3.2	Ein Beispiel mit einspringenden Ecken —	253
6.4	Entwurf eines Plasmon-Polariton-Wellenleiters —	256
6.5	Übungsaufgaben —	261
7	Adaptive Mehrgittermethoden für lineare elliptische Probleme —	263
7.1	Unterraum-Korrekturmethode —	263
7.1.1	Prinzip —	264
7.1.2	Sequentielle Unterraum-Korrekturmethode —	267
7.1.3	Parallele Unterraum-Korrekturmethode —	272
7.1.4	Überlappende Gebietszerlegung —	276
7.1.5	Finite Elemente höherer Ordnung —	283
7.2	Hierarchische Raumzerlegungen —	288
7.2.1	Zerlegung in hierarchische Basen —	289
7.2.2	L^2 -orthogonale Zerlegung: BPX —	296
7.3	Randwertprobleme —	299
7.3.1	Additive Mehrgittermethoden —	299
7.3.2	Multiplikative Mehrgittermethoden —	304
7.3.3	Kaskadische Mehrgittermethoden —	306
7.4	Eigenwertprobleme —	316
7.4.1	Lineare Mehrgittermethode —	317
7.4.2	Rayleigh-Quotienten-Mehrgittermethode —	319
7.5	Übungsaufgaben —	323

8 Adaptive Lösung nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme — 327

- 8.1 Diskrete Newton-Methoden für nichtlineare
Gittergleichungssysteme — **328**
- 8.1.1 Exakte Newton-Methoden — **330**
- 8.1.2 Inexakte Newton-PCG-Methoden — **333**
- 8.2 Inexakte Newton-Mehrgittermethoden — **336**
- 8.2.1 Hierarchische Gittergleichungssysteme — **337**
- 8.2.2 Realisierung des adaptiven Algorithmus — **339**
- 8.2.3 Ein elliptisches Problem ohne Lösung — **343**
- 8.3 Operationsplanung in der Mund-Kiefer-Gesichtschirurgie — **346**
- 8.4 Übungsaufgaben — **350**

9 Adaptive Integration parabolischer Anfangsrandwertprobleme — 351

- 9.1 Zeitdiskretisierung bei steifen Differentialgleichungen — **351**
- 9.1.1 Lineare Stabilitätstheorie — **352**
- 9.1.2 Linear-implizite Einschrittverfahren — **357**
- 9.1.3 Defektkorrekturmethode — **368**
- 9.1.4 Ordnungsreduktion — **375**
- 9.2 Raum-Zeit-Diskretisierung bei parabolischen
Differentialgleichungen — **382**
- 9.2.1 Adaptive Linienmethode — **384**
- 9.2.2 Adaptive Zeitschichtenmethode — **392**
- 9.2.3 Zielorientierte Fehlerschätzung — **405**
- 9.3 Elektrische Erregung des Herzmuskels — **408**
- 9.3.1 Mathematische Modelle — **408**
- 9.3.2 Numerische Simulation — **410**
- 9.4 Übungsaufgaben — **413**

A Anhang — 417

- A.1 Fourieranalyse und Fouriertransformation — **417**
- A.2 Differentialoperatoren im \mathbb{R}^3 — **418**
- A.3 Integralsätze — **420**
- A.4 Delta-Distribution und Greensche Funktionen — **424**
- A.5 Sobolev-Räume — **429**
- A.6 Optimalitätsbedingungen — **435**

Software — 437

Literatur — 439

Stichwortverzeichnis — 451