

# Inhalt

## **Vorwort — V**

## **Vorwort zur zweiten Auflage — VII**

## **Überblick — XIII**

### **1 Elementare partielle Differentialgleichungen — 1**

- 1.1 Laplace- und Poisson-Gleichung — 1
- 1.1.1 Randwertprobleme — 2
- 1.1.2 Anfangswertproblem — 6
- 1.1.3 Eigenwertproblem — 8
- 1.2 Diffusionsgleichung — 12
- 1.3 Wellengleichung — 15
- 1.4 Schrödinger-Gleichung — 20
- 1.5 Helmholtz-Gleichung — 23
- 1.5.1 Randwertprobleme — 23
- 1.5.2 Zeitharmonische Differentialgleichungen — 25
- 1.6 Klassifikation — 27
- 1.7 Übungsaufgaben — 28

### **2 Partielle Differentialgleichungen in Naturwissenschaft und Technik — 33**

- 2.1 Elektrodynamik — 33
- 2.1.1 Maxwell-Gleichungen — 33
- 2.1.2 Optische Modellhierarchie — 37
- 2.2 Strömungsdynamik — 39
- 2.2.1 Euler-Gleichungen — 41
- 2.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen — 45
- 2.2.3 Prandtlsche Grenzschicht — 50
- 2.2.4 Poröse-Medien-Gleichung — 52
- 2.3 Elastomechanik — 53
- 2.3.1 Grundbegriffe der nichtlinearen Elastomechanik — 54
- 2.3.2 Lineare Elastomechanik — 57
- 2.4 Übungsaufgaben — 61

### **3 Differenzenmethoden für Poisson-Probleme — 65**

- 3.1 Diskretisierung des Standardproblems — 65
- 3.1.1 Diskrete Randwertprobleme — 66
- 3.1.2 Diskretes Eigenwertproblem — 70
- 3.2 Approximationstheorie bei äquidistanten Gittern — 73
- 3.2.1 Diskretisierungsfehler in  $L^2$  — 76

|          |  |
|----------|--|
| 3.2.2    | Diskretisierungsfehler in $L^\infty$ — <b>79</b>                             |
| 3.3      | Diskretisierung auf nichtäquidistanten Gittern — <b>81</b>                   |
| 3.3.1    | Eindimensionaler Spezialfall — <b>81</b>                                     |
| 3.3.2    | Krumme Ränder — <b>83</b>  |
| 3.4      | Übungsaufgaben — <b>86</b>   |
| <b>4</b> | <b>Galerkin-Methoden — 89</b>  |
| 4.1      | Allgemeines Schema — <b>89</b>   |
| 4.1.1    | Schwache Lösungen — <b>89</b>  |
| 4.1.2    | Ritz-Minimierung für Randwertprobleme — <b>92</b>                            |
| 4.1.3    | Rayleigh–Ritz-Minimierung für Eigenwertprobleme — <b>98</b>                  |
| 4.2      | Spektralmethoden — <b>100</b>  |
| 4.2.1    | Realisierung mit Orthogonalsystemen — <b>101</b>                             |
| 4.2.2    | Approximationstheorie — <b>105</b>   |
| 4.2.3    | Adaptive Spektralmethoden — <b>109</b>                                       |
| 4.3      | Finite-Elemente-Methoden — <b>113</b>  |
| 4.3.1    | Gitter und Finite-Elemente-Räume — <b>113</b>                                |
| 4.3.2    | Elementare finite Elemente — <b>116</b>                                      |
| 4.3.3    | Realisierung finiter Elemente — <b>127</b>                                   |
| 4.4      | Approximationstheorie für finite Elemente — <b>136</b>                       |
| 4.4.1    | Randwertprobleme — <b>136</b>  |
| 4.4.2    | Eigenwertprobleme — <b>140</b>   |
| 4.4.3    | Winkelbedingung für nichtuniforme Gitter — <b>144</b>                        |
| 4.5      | Übungsaufgaben — <b>147</b>  |
| <b>5</b> | <b>Numerische Lösung linearer elliptischer Gittergleichungssysteme — 151</b> |
| 5.1      | Direkte Eliminationsmethoden — <b>152</b>                                    |
| 5.1.1    | Symbolische Faktorisierung — <b>153</b>                                      |
| 5.1.2    | Frontenlöser — <b>156</b>  |
| 5.2      | Matrixzerlegungsmethoden — <b>158</b>  |
| 5.2.1    | Jacobi-Verfahren — <b>161</b>  |
| 5.2.2    | Gauß–Seidel-Verfahren — <b>163</b>   |
| 5.3      | Verfahren der konjugierten Gradienten — <b>165</b>                           |
| 5.3.1    | CG-Verfahren als Galerkin-Methode — <b>166</b>                               |
| 5.3.2    | Vorkonditionierung — <b>169</b>  |
| 5.3.3    | Adaptive PCG-Verfahren — <b>173</b>  |
| 5.3.4    | Eine CG-Variante für Eigenwertprobleme — <b>175</b>                          |
| 5.4      | Glättungseigenschaft iterativer Lösungsverfahren — <b>181</b>                |
| 5.4.1    | Illustration am Poisson-Modellproblem — <b>181</b>                           |
| 5.4.2    | Spektralanalyse für Jacobi-Verfahren — <b>182</b>                            |
| 5.4.3    | Glättungssätze — <b>186</b>  |
| 5.5      | Hierarchische iterative Löser — <b>193</b>                                   |

|          |   |
|----------|---|
| 5.5.1    | Klassische Mehrgittermethoden — 194                                       |
| 5.5.2    | Hierarchische-Basis-Methode — 202   |
| 5.6      | Vergleich direkte gegen iterative hierarchische Löser — 206               |
| 5.6.1    | Allgemeiner Vergleich — 206   |
| 5.6.2    | Leistungskurve eines vertikalen Windgenerators — 207                      |
| 5.7      | Übungsaufgaben — 213  |
| <b>6</b> | <b>Konstruktion adaptiver hierarchischer Gitter — 217</b>                 |
| 6.1      | A-posteriori-Fehlerschätzer — 217   |
| 6.1.1    | Residuenbasierte Fehlerschätzer — 221                                     |
| 6.1.2    | Dreiecksorientierte Fehlerschätzer — 226                                  |
| 6.1.3    | Gradienten-Verbesserung — 231   |
| 6.1.4    | Hierarchische Fehlerschätzer — 235  |
| 6.1.5    | Zielorientierte Fehlerschätzung — 238                                     |
| 6.2      | Adaptive Gitterverfeinerung — 239   |
| 6.2.1    | Äquilibrierung lokaler Diskretisierungsfehler — 240                       |
| 6.2.2    | Verfeinerungsstrategien — 245   |
| 6.3      | Konvergenz auf adaptiven Gittern — 250                                    |
| 6.3.1    | Ein Konvergenzbeweis — 251  |
| 6.3.2    | Ein Beispiel mit einspringenden Ecken — 253                               |
| 6.4      | Entwurf eines Plasmon-Polariton-Wellenleiters — 256                       |
| 6.5      | Übungsaufgaben — 261  |
| <b>7</b> | <b>Adaptive Mehrgittermethoden für lineare elliptische Probleme — 263</b> |
| 7.1      | Unterraum-Korrekturmethoden — 263   |
| 7.1.1    | Prinzip — 264   |
| 7.1.2    | Sequentielle Unterraum-Korrekturmethoden — 267                            |
| 7.1.3    | Parallele Unterraum-Korrekturmethoden — 272                               |
| 7.1.4    | Überlappende Gebietszerlegung — 276                                       |
| 7.1.5    | Finite Elemente höherer Ordnung — 283                                     |
| 7.2      | Hierarchische Raumzerlegungen — 288                                       |
| 7.2.1    | Zerlegung in hierarchische Basen — 289                                    |
| 7.2.2    | $L^2$ -orthogonale Zerlegung: BPX — 296                                   |
| 7.3      | Randwertprobleme — 299  |
| 7.3.1    | Additive Mehrgittermethoden — 299   |
| 7.3.2    | Multiplikative Mehrgittermethoden — 304                                   |
| 7.3.3    | Kaskadische Mehrgittermethoden — 306                                      |
| 7.4      | Eigenwertprobleme — 316   |
| 7.4.1    | Lineare Mehrgittermethode — 317   |
| 7.4.2    | Rayleigh-Quotienten-Mehrgittermethode — 319                               |
| 7.5      | Übungsaufgaben — 323  |

|                                   |   |            |
|-----------------------------------|---|------------|
| <b>8</b>                          | <b>Adaptive Lösung nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme</b>  | <b>327</b> |
| 8.1                               | Diskrete Newton-Methoden für nichtlineare Gittergleichungssysteme   | 328        |
| 8.1.1                             | Exakte Newton-Methoden  | 330        |
| 8.1.2                             | Inexakte Newton-PCG-Methoden  | 333        |
| 8.2                               | Inexakte Newton-Mehrgittermethoden                                  | 336        |
| 8.2.1                             | Hierarchische Gittergleichungssysteme                               | 337        |
| 8.2.2                             | Realisierung des adaptiven Algorithmus                              | 339        |
| 8.2.3                             | Ein elliptisches Problem ohne Lösung                                | 343        |
| 8.3                               | Operationsplanung in der Mund-Kiefer-Gesichtschirurgie              | 346        |
| 8.4                               | Übungsaufgaben  | 350        |
| <b>9</b>                          | <b>Adaptive Integration parabolischer Anfangsrandwertprobleme</b>   | <b>351</b> |
| 9.1                               | Zeitdiskretisierung bei steifen Differentialgleichungen             | 351        |
| 9.1.1                             | Lineare Stabilitätstheorie  | 352        |
| 9.1.2                             | Linear-implizite Einschrittverfahren                                | 357        |
| 9.1.3                             | Defektkorrekturmethoden   | 368        |
| 9.1.4                             | Ordnungsreduktion   | 375        |
| 9.2                               | Raum-Zeit-Diskretisierung bei parabolischen Differentialgleichungen | 382        |
| 9.2.1                             | Adaptive Linienmethode  | 384        |
| 9.2.2                             | Adaptive Zeitschichtenmethode                                       | 392        |
| 9.2.3                             | Zielorientierte Fehlerschätzung                                     | 405        |
| 9.3                               | Elektrische Erregung des Herzmuskels                                | 408        |
| 9.3.1                             | Mathematische Modelle   | 408        |
| 9.3.2                             | Numerische Simulation   | 410        |
| 9.4                               | Übungsaufgaben  | 413        |
| <b>A</b>                          | <b>Anhang</b>   | <b>417</b> |
| A.1                               | Fourieranalyse und Fouriertransformation                            | 417        |
| A.2                               | Differentialoperatoren im $\mathbb{R}^3$                            | 418        |
| A.3                               | Integralsätze   | 420        |
| A.4                               | Delta-Distribution und Greensche Funktionen                         | 424        |
| A.5                               | Sobolev-Räume   | 429        |
| A.6                               | Optimalitätsbedingungen   | 435        |
| <b>Software</b> — 437             |   |            |
| <b>Literatur</b> — 439            |   |            |
| <b>Stichwortverzeichnis</b> — 451 |   |            |