

Inhalt

Vorwort — V

Überblick — 1

1	Lineare Gleichungssysteme — 3
1.1	Auflösung gestaffelter Systeme — 4
1.2	Gaußsche Eliminationsmethode — 6
1.3	Pivot-Strategien und Nachiteration — 8
1.4	Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen — 15
	Übungsaufgaben — 17
2	Fehleranalyse — 23
2.1	Fehlerquellen — 23
2.2	Kondition eines Problems — 25
2.2.1	Normweise Konditionsanalyse — 27
2.2.2	Komponentenweise Konditionsanalyse — 33
2.3	Stabilität eines Algorithmus — 36
2.3.1	Stabilitätskonzepte — 37
2.3.2	Vorwärtsanalyse — 38
2.3.3	Rückwärtsanalyse — 43
2.4	Anwendung auf lineare Gleichungssysteme — 45
2.4.1	Lösbarkeit unter der Lupe — 45
2.4.2	Rückwärtsanalyse der Gauß-Elimination — 47
2.4.3	Beurteilung von Näherungslösungen — 50
	Übungsaufgaben — 53
3	Lineare Ausgleichsprobleme — 59
3.1	Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate — 59
3.1.1	Problemstellung — 59
3.1.2	Normalgleichungen — 62
3.1.3	Kondition — 64
3.1.4	Lösung der Normalgleichungen — 67
3.2	Orthogonalisierungsverfahren — 68
3.2.1	Givens-Rotationen — 70
3.2.2	Householder-Reflexionen — 72
3.3	Verallgemeinerte Inverse — 75
	Übungsaufgaben — 79

4	Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme — 83
4.1	Fixpunktiteration — 83
4.2	Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme — 87
4.3	Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Ausgleichsprobleme — 94
4.4	Parameterabhängige nichtlineare Gleichungssysteme — 101
4.4.1	Lösungsstruktur — 101
4.4.2	Fortsetzungsmethoden — 103
	Übungsaufgaben — 115
5	Lineare Eigenwertprobleme — 119
5.1	Kondition des allgemeinen Eigenwertproblems — 120
5.2	Vektoriteration — 122
5.3	QR-Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme — 125
5.4	Singulärwertzerlegung — 131
5.5	Stochastische Eigenwertprobleme — 136
5.5.1	Perron-Frobenius-Theorie — 137
5.5.2	Fastentkoppelte Markov-Ketten — 142
5.5.3	Prinzip der Google-Suchmaschine — 147
	Übungsaufgaben — 149
6	Drei-Term-Rekursionen — 155
6.1	Theoretische Grundlagen — 156
6.1.1	Orthogonalität und Drei-Term-Rekursionen — 156
6.1.2	Homogene und inhomogene Rekursionen — 160
6.2	Numerische Aspekte — 162
6.2.1	Kondition — 164
6.2.2	Idee des Miller-Algorithmus — 169
6.3	Adjungierte Summation — 171
6.3.1	Summation von dominanten Lösungen — 172
6.3.2	Summation von Minimallösungen — 176
	Übungsaufgaben — 179
7	Interpolation und Approximation — 183
7.1	Theoretische Grundlagen — 184
7.1.1	Eindeutigkeit und Kondition — 184
7.1.2	Approximationsfehler der Interpolation — 187
7.1.3	Minimax-Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome — 188
7.1.4	Hermite-Interpolation — 191
7.2	Algorithmen zur Polynom-Interpolation — 193
7.2.1	Monomiale Basis: klassische Auswertung — 193
7.2.2	Lagrange-Basis: schnellste Auswertung — 194
7.2.3	Newton-Basis: dividierte Differenzen — 196

7.3	Trigonometrische Interpolation — 203
7.4	Bézier-Technik — 209
7.4.1	Bernstein-Polynome und Bézier-Darstellung — 210
7.4.2	Algorithmus von de Casteljau — 216
7.5	Spline-Interpolation — 223
7.5.1	Kubische Spline-Interpolation: theoretische Herleitung — 223
7.5.2	Kubische Spline-Interpolation: Algorithmus — 226
7.5.3	Allgemeinere Splineräume — 228
7.5.4	B-Splines — 231
	Übungsaufgaben — 236

8	Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme — 241
8.1	Klassische Iterationsverfahren — 242
8.2	Tschebyscheff-Beschleunigung — 248
8.3	Verfahren der konjugierten Gradienten — 252
8.4	Vorkonditionierung — 259
8.5	Lanczos-Methoden — 265
	Übungsaufgaben — 269

9	Bestimmte Integrale — 273
9.1	Quadraturformeln — 274
9.2	Newton-Cotes-Formeln — 277
9.3	Gauß-Christoffel-Quadratur — 282
9.3.1	Konstruktion der Quadraturformeln — 283
9.3.2	Berechnung der Knoten und Gewichte — 288
9.4	Klassische Romberg-Quadratur — 290
9.4.1	Asymptotische Entwicklung der Trapezsumme — 290
9.4.2	Idee der Extrapolation — 292
9.4.3	Details des Algorithmus — 298
9.5	Adaptive Romberg-Quadratur — 301
9.5.1	Adaptives Prinzip — 302
9.5.2	Schätzung des Approximationsfehlers — 304
9.5.3	Herleitung des Algorithmus — 306
9.6	Schwierige Integranden — 312
9.7	Adaptive Mehrgitter-Quadratur — 315
9.7.1	Lokale Fehlerschätzung und Verfeinerungsregeln — 316
9.7.2	Globale Fehlerschätzung und Details des Algorithmus — 320
9.8	Monte-Carlo-Quadratur für hochdimensionale Integrale — 322
9.8.1	Verwerfungsmethode — 324
9.8.2	Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methoden — 326
9.8.3	Konvergenzgeschwindigkeit — 328
	Übungsaufgaben — 330

XII — Inhalt

Software — 335

Literatur — 337

Stichwortverzeichnis — 343