

# Inhalt

**Vorwort — V**

**Überblick — 1**

## **1 Lineare Gleichungssysteme — 3**

- 1.1 Auflösung gestaffelter Systeme — 4
  - 1.2 Gaußsche Eliminationsmethode — 6
  - 1.3 Pivot-Strategien und Nachiteration — 8
  - 1.4 Cholesky-Verfahren für symmetrische, positiv definite Matrizen — 15
- Übungsaufgaben — 17

## **2 Fehleranalyse — 23**

- 2.1 Fehlerquellen — 23
  - 2.2 Kondition eines Problems — 25
    - 2.2.1 Normweise Konditionsanalyse — 27
    - 2.2.2 Komponentenweise Konditionsanalyse — 33
  - 2.3 Stabilität eines Algorithmus — 36
    - 2.3.1 Stabilitätskonzepte — 37
    - 2.3.2 Vorwärtsanalyse — 38
    - 2.3.3 Rückwärtsanalyse — 43
  - 2.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme — 45
    - 2.4.1 Lösbarkeit unter der Lupe — 45
    - 2.4.2 Rückwärtsanalyse der Gauß-Elimination — 47
    - 2.4.3 Beurteilung von Näherungslösungen — 50
- Übungsaufgaben — 53

## **3 Lineare Ausgleichsprobleme — 59**

- 3.1 Gaußsche Methode der kleinsten Fehlerquadrate — 59
    - 3.1.1 Problemstellung — 59
    - 3.1.2 Normalgleichungen — 62
    - 3.1.3 Kondition — 64
    - 3.1.4 Lösung der Normalgleichungen — 67
  - 3.2 Orthogonalisierungsverfahren — 68
    - 3.2.1 Givens-Rotationen — 70
    - 3.2.2 Householder-Reflexionen — 72
  - 3.3 Verallgemeinerte Inverse — 75
- Übungsaufgaben — 79

<b>4</b>	<b>Nichtlineare Gleichungssysteme und Ausgleichsprobleme — 83</b>
4.1	Fixpunktiteration — 83
4.2	Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme — 87
4.3	Gauß-Newton-Verfahren für nichtlineare Ausgleichsprobleme — 94
4.4	Parameterabhängige nichtlineare Gleichungssysteme — 101
4.4.1	Lösungsstruktur — 101
4.4.2	Fortsetzungsmethoden — 103
	Übungsaufgaben — 115
<b>5</b>	<b>Lineare Eigenwertprobleme — 119</b>
5.1	Kondition des allgemeinen Eigenwertproblems — 120
5.2	Vektoriteration — 122
5.3	QR-Algorithmus für symmetrische Eigenwertprobleme — 125
5.4	Singulärwertzerlegung — 131
5.5	Stochastische Eigenwertprobleme — 136
5.5.1	Perron-Frobenius-Theorie — 137
5.5.2	Fastentkoppelte Markov-Ketten — 142
5.5.3	Prinzip der Google-Suchmaschine — 147
	Übungsaufgaben — 149
<b>6</b>	<b>Drei-Term-Rekursionen — 155</b>
6.1	Theoretische Grundlagen — 156
6.1.1	Orthogonalität und Drei-Term-Rekursionen — 156
6.1.2	Homogene und inhomogene Rekursionen — 160
6.2	Numerische Aspekte — 162
6.2.1	Kondition — 164
6.2.2	Idee des Miller-Algorithmus — 169
6.3	Adjungierte Summation — 171
6.3.1	Summation von dominanten Lösungen — 172
6.3.2	Summation von Minimallösungen — 176
	Übungsaufgaben — 179
<b>7</b>	<b>Interpolation und Approximation — 183</b>
7.1	Theoretische Grundlagen — 184
7.1.1	Eindeutigkeit und Kondition — 184
7.1.2	Approximationsfehler der Interpolation — 187
7.1.3	Minimax-Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome — 188
7.1.4	Hermite-Interpolation — 191
7.2	Algorithmen zur Polynom-Interpolation — 193
7.2.1	Monomiale Basis: klassische Auswertung — 193
7.2.2	Lagrange-Basis: schnellste Auswertung — 194
7.2.3	Newton-Basis: dividierte Differenzen — 196

7.3	Trigonometrische Interpolation —	203
7.4	Bézier-Technik —	209
7.4.1	Bernstein-Polynome und Bézier-Darstellung —	210
7.4.2	Algorithmus von de Casteljau —	216
7.5	Spline-Interpolation —	223
7.5.1	Kubische Spline-Interpolation: theoretische Herleitung —	223
7.5.2	Kubische Spline-Interpolation: Algorithmus —	226
7.5.3	Allgemeinere Splineräume —	228
7.5.4	B-Splines —	231
	Übungsaufgaben —	236
<b>8</b>	<b>Große symmetrische Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme —</b>	<b>241</b>
8.1	Klassische Iterationsverfahren —	242
8.2	Tschebyscheff-Beschleunigung —	248
8.3	Verfahren der konjugierten Gradienten —	252
8.4	Vorkonditionierung —	259
8.5	Lanczos-Methoden —	265
	Übungsaufgaben —	269
<b>9</b>	<b>Bestimmte Integrale —</b>	<b>273</b>
9.1	Quadraturformeln —	274
9.2	Newton-Cotes-Formeln —	277
9.3	Gauß-Christoffel-Quadratur —	282
9.3.1	Konstruktion der Quadraturformeln —	283
9.3.2	Berechnung der Knoten und Gewichte —	288
9.4	Klassische Romberg-Quadratur —	290
9.4.1	Asymptotische Entwicklung der Trapezsumme —	290
9.4.2	Idee der Extrapolation —	292
9.4.3	Details des Algorithmus —	298
9.5	Adaptive Romberg-Quadratur —	301
9.5.1	Adaptives Prinzip —	302
9.5.2	Schätzung des Approximationsfehlers —	304
9.5.3	Herleitung des Algorithmus —	306
9.6	Schwierige Integranden —	312
9.7	Adaptive Mehrgitter-Quadratur —	315
9.7.1	Lokale Fehlerschätzung und Verfeinerungsregeln —	316
9.7.2	Globale Fehlerschätzung und Details des Algorithmus —	320
9.8	Monte-Carlo-Quadratur für hochdimensionale Integrale —	322
9.8.1	Verwerfungsmethode —	324
9.8.2	Markov-Ketten-Monte-Carlo-Methoden —	326
9.8.3	Konvergenzgeschwindigkeit —	328
	Übungsaufgaben —	330

**Software — 335**

**Literatur — 337**

**Stichwortverzeichnis — 343**