# Vorwort

*Numerische Mathematik* in ihrer algorithmisch orientierten Ausprägung beinhaltet die Konstruktion und das mathematische Verständnis von numerischen Algorithmen, also von Rechenmethoden zur zahlenmäßigen Lösung mathematischer Probleme. Die meisten mathematischen Probleme kommen in unseren Tagen aus vielfältigen Anwendungsgebieten außerhalb der Mathematik. In der Tat haben sich *mathematische Modelle* zur näherungsweisen Beschreibung der Wirklichkeit in den letzten Jahren derart verfeinert, dass ihre Computersimulation die Realität zunehmend genauer widerspiegelt. Treibende Kraft dieser Entwicklung ist der gleichermaßen stürmische Fortschritt bei Computern und Algorithmen. Dabei hat sich gezeigt: nicht nur die Verfügbarkeit immer besserer Computer, sondern mehr noch die Entwicklung immer besserer Algorithmen macht heute immer komplexere Probleme lösbar. Bisher verschlossene Bereiche der Natur- und Ingenieurwissenschaften öffnen sich mehr und mehr einer mathematischen Modellierung und damit der Simulation auf dem Rechner.

Angesichts dieser Entwicklung versteht sich Numerische Mathematik heute als Teil des übergeordneten Gebietes *Scientific Computing*, zu deutsch oft auch als *Wissenschaftliches Rechnen* übersetzt. Dieses Gebiet im interdisziplinären Spannungsfeld von Mathematik, Informatik, Natur- und Ingenieurwissenschaften ist erst in jüngerer Zeit zusammengewachsen. Es wirkt in zahlreiche Zweige der Industrie (Chemie, Elektronik, Robotik, Fahrzeugbau, Luft- und Raumfahrt etc.) hinein und leistet bei wichtigen gesellschaftlichen Fragen (sparsamer und zugleich umweltverträglicher Umgang mit Primärenergie, globale Klimamodelle, Verbreitung von Epidemien etc.) einen unverzichtbaren Beitrag. Als Konsequenz davon haben sich tiefgreifende Änderungen der Stoffauswahl und der Darstellungsweise in Vorlesungen und Seminaren der Numerischen Mathematik zwingend ergeben, und dies bereits in einführenden Veranstaltungen: manches früher für wichtig Gehaltene fällt ersatzlos weg, anderes kommt neu hinzu. Die hier getroffene Auswahl ist natürlich vom fachlichen Geschmack der Autoren geprägt, hat sich allerdings nun bereits in der fünften Auflage dieses erfreulich verbreiteten Lehrbuches bewährt.

Das vorliegende Buch richtet sich in erster Linie an Studierende der Mathematik, Informatik, Natur- und Ingenieurwissenschaften. In zweiter Linie wollen wir aber auch bereits im Beruf stehende Kollegen (und Kolleginnen – hier ein für alle Mal) oder Quereinsteiger erreichen, die sich mit den etablierten modernen Konzepten der Numerischen Mathematik auf elementarer Ebene im Selbststudium vertraut machen wollen. Der Stoff setzt lediglich Grundkenntnisse der Mathematik voraus, wie sie an deutschsprachigen Universitäten in den Grundvorlesungen „Lineare Algebra I/II" und „Analysis I/II" üblicherweise vermittelt werden. Weitergehende Kenntnisse werden in diesem einführenden Lehrbuch nicht verlangt. In einer Reihe von Einzelthemen (wie Interpolation oder Integration) haben wir uns fast durchgängig auf den *eindimensionalen* Fall beschränkt. Roter Faden dieser Einführung ist, wesentliche Konzepte

https://doi.org/10.1515/9783110614329-202

der modernen Numerik, die später auch bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen eine Rolle spielen, bereits hier am einfachst möglichen Problemtyp zu behandeln.

Oberstes Ziel des Buches ist die Förderung des *algorithmischen Denkens*, das ja historisch eine der Wurzeln unserer heutigen Mathematik ist. Es ist kein Zufall, dass neben heutigen Namen auch historische Namen wie Gauß, Newton und Tschebyscheff an zahlreichen Stellen des Textes auftauchen. Die Orientierung auf Algorithmen sollte jedoch nicht missverstanden werden: gerade effektive Algorithmen erfordern ein gerüttelt Maß an mathematischer Theorie, die innerhalb des Textes auch aufgebaut wird. Die Argumentation ist in der Regel mathematisch elementar; wo immer sinnvoll, wird *geometrische Anschauung* herangezogen – was auch die hohe Anzahl an Abbildungen erklärt. Begriffe wie Skalarprodukt und Orthogonalität finden durchgängig Verwendung, bei endlicher Dimension ebenso wie in Funktionenräumen. Trotz der elementaren Darstellung enthält das Buch zahlreiche Resultate, die ansonsten unpubliziert sind. Darüber hinaus unterscheidet sich auch bei eher klassischen Themen unsere Herleitung von der in herkömmlichen Lehrbüchern.

Gegenüber der dritten Auflage ist der Abschnitt 5.5 über stochastische Eigenwertprobleme noch weiter ausgearbeitet worden, unter anderem durch einen Einblick in das Prinzip der Google-Suchmaschine (sowie dazugehörige Übungsaufgaben). Obwohl wir uns im Kapitel 8 zur Quadratur im Wesentlichen auf eindimensionale Probleme einschränken, ist ab der vierten Auflage noch eine Einführung in die Monte-Carlo-Quadratur für hochdimensionale Probleme hinzugekommen – einfach deshalb, weil diese Probleme in den Naturwissenschaften so häufig vorkommen und sich die verwendeten Monte-Carlo-Methoden mit den Vorkenntnissen aus Abschnitt 5.5 über stochastische Eigenwertprobleme elementar analysieren lassen. In der vorliegenden fünften Auflage wurde Kapitel 7 (Interpolation und Approximation) gründlich überarbeitet, insbesondere durch Einbeziehung neuerer Resultate zur schnellen Auswertung von Interpolationspolynomen mittels der baryzentrischen Formel.

Der Erstautor hat seit 1978 Vorlesungen zur Numerischen Mathematik gehalten – u. a. an der TU München, der Universiät Heidelberg und der Freien Universität Berlin sowie in Paris und in Peking. Er hat die Entwicklung des Gebietes Scientific Computing durch seine Tätigkeit über Jahre weltweit mit beeinflusst. Der Zweitautor hatte zunächst seine Ausbildung mit Schwerpunkt Reine Mathematik an der Universität Bonn und ist erst anschließend in das Gebiet der Numerischen Mathematik übergewechselt. Diese Kombination hat dem vorliegenden Buch sicher gutgetan.

An dieser Stelle nehmen wir gerne die Gelegenheit wahr, eine Reihe von Kollegen zu bedenken, die uns bei diesem Buch auf die eine oder andere Weise besonders unterstützt haben. Der Erstautor blickt dankbar zurück auf seine Zeit als Assistent von Roland Bulirsch (TU München, emeritiert seit 2001), in dessen Tradition sich sein heutiger Begriff von Scientific Computing geformt hat. Intensive Diskussionen und vielfältige Anregungen zahlreicher Kollegen sind in unsere Darstellung mit eingeflossen. Einigen Kollegen wollen wir hier zu folgenden Einzelthemen besonders danken:

Ernst Hairer und Gerhard Wanner (Universität Genf) zur Diskussion des Gesamtkonzepts des Buches; Wolfgang Dahmen (University of South Carolina) und Angela Kunoth (Universität zu Köln) zu Kapitel 7; Folkmar Bornemann (TU München) zur Darstellung der Fehlertheorie, der verschiedenen Konditionsbegriffe sowie zur Definition des Stabilitätsindikators in Kapitel 2; Dietrich Braess (Ruhruniversität Bochum, emeritiert) zur rekursiven Darstellung der schnellen Fourier-Transformation in Abschnitt 7.2.

Für die vierte Auflage galt unser besonderer Dank Susanna Kube (jetzt: Röblitz, University of Bergen), die insbesondere bei dem neu hinzugekommenen Abschnitt 9.8 zur Monte-Carlo-Quadratur unschätzbare Hilfe geleistet hatte. Für die hier vorgelegte fünfte Auflage danken wir besonders herzlich Anton Schiela (Universität Bayreuth), der im Kapitel 7 (Interpolation und Approximation) wichtige Ratschläge gegeben hat und uns durch intensive Diskussionen geholfen hat, einen klareren Blick auf die Thematik zu gewinnen.

Berlin und Boston, September 2018

*Peter Deuflhard*
*Andreas Hohmann*