3 Zahlen und Algebra

3.1 Alternative Grammatiken im Bereich der Mathematik

Das Gehirn ist kein Allgemeinwerkzeug, sondern hat sich in enger Verbindung mit den Bedürfnissen des Körpers entwickelt. Nun stellt sich mit Bezug auf die von Wittgenstein postulierte andere Arithmetik die Frage, inwiefern eine solche möglich sein soll, wenn die einzige Mathematik, die wir kennen und auch kennen können, eine solche ist, die durch die Strukturen und Prozesse des menschlichen Gehirns geprägt oder zumindest Resultat dessen ist.[1] Eine solche Fragestellung trifft aber die Kernprämissen jeglicher Mathematik: ob nämlich eine solche hirnbasierte Mathematik *die* Mathematik ist – „or is there, as Platonists have suggested, a disembodied mathematics transcending all bodies and minds and structuring the universe – this universe and every possible universe?“[2] Auf diese Frage geben Lakoff und Nuñez die Antwort, dass jegliches mathematische Wissen ein menschliches Wissen ist und es keine Möglichkeit gibt zu überprüfen, ob die darin postulierten Theoreme objektiv wahr sind.[3] Der Glaube an platonische Mathematik wäre eben dies – ein Glaube, der keine wissenschaftlichen Standards einhält. Eine solche „romantische Vorstellung“ der Mathematik zeichne sich nach Lakoff und Nuñez durch folgende Merkmale aus:

> Mathematics is an objective feature of the universe; mathematical objects are real; mathematical truth is universal, absolute, and certain. What human beings believe about mathematics therefore has no effect on what mathematics really is. Mathematics would be the same even if there were no human beings, or beings of any sort. Though mathematics is abstract and disembodied, it is real. Mathematicians are the ultimate scientists, discovering absolute truths not just about this physical universe but about any possible universe. Since logic itself can be formalized as mathematical logic, mathematics characterizes the very nature of rationality.[4]

[1] Vgl. dazu die kontroverse Hypothese von Lakoff/Nuñez 2000, S. 1: „The only mathematics we know or can know is a brain-and-mind-based mathematics.“
[2] Ebd.
[3] Vgl. Ebd., S. 2.
[4] Ebd., S. 339f. Das formulierte Gegenprogramm läuft unter folgenden Prämissen: „From a scientific perspective, there is *no* way to know whether there are objectively

3.1.1 Historische Argumente für mathematische Alternativen

Dass mathematische Prinzipien auch Alternativen haben können, beweist schon die Entwicklung der Disziplin als solcher sowie unabgeschlossene Fragestellungen wie die nach den Infinitesimalzahlen.[5] Selbst grundlegende mathematische Operationen lassen Alternativen zu, wie beispielsweise bei den Quaternionen, für die die Kommutativität der Multiplikation nicht gilt, so dass a x b eben nicht gleich b x a ist.

Die historische Entwicklung der Mathematik zeigt zudem etwa im Bereich der Mengenlehre die Möglichkeit für Alternativen: Sie basiert fundamental auf der Konzeption, dass Zahlen Mengen sind. Dies ist jedoch nicht zwingend und war bis zu der Einführung des Konzeptes auch nicht von Nöten. Gleichzeitig wird mit der Einführung der Transferleistung der Zahlen *als* Mengen hier auch deutlich, dass Dinge als etwas Anderes konzeptionalisiert und damit also metaphorisch eingesetzt werden. Wie bereits gezeigt wurde, sind Metaphern also nicht nur ein sprachliches, sondern fundamental kognitives Phänomen.

Die gewöhnliche Argumentation ist, dass Mathematik dadurch nicht willkürlich ist, dass sie fundamentale Wahrheiten abzubilden imstande ist, wie es etwa die Logik tut. Was die Mathematik im Wissenschaftskanon weiterhin primär so besonders macht, sind deren sich über kulturelle Grenzen hinweg erhaltende Präzision und Konsistenz, welche sich als Werkzeug zudem hervorragend für Analysen, Erläuterungen oder Voraussagen eignet – sei es nun für alltägliche Phänomene oder wissenschaftliche Einzelprobleme.[6] Der Eindruck der Abbildungskraft von Mathematik speist sich

existing, external, mathematical entities or mathematical truths. Human mathematics is embodied; it is grounded in bodily experience in the world. Human mathematics is *not* about objectively existing, external mathematical entities or mathematical truths. Human mathematics is primarily a matter of mathematical ideas, which are significantly metaphorical in nature. Mathematics is not purely literal; it is an imaginative, profoundly metaphorical enterprise. There is no mathematics out there in the physical world that mathematical scientific theories describe.“ Ebd., S. 365.

[5] „Mainstream mathematicians do not accept infinitesimals, though nowadays there is a perfectly fine mathematics of infinitesimals formalized by Abraham Robinsion [...] and a small but active group of mathematicians working with them. Do infinitesimal numbers exist? Your answer depends on which school of thought you are in. Since both schools practice perfectly valid forms of mathematics, there are different and equally valid answers to the question. This, too, is natural and to be expected, given that mathematics is embodied.“ Ebd., S. 359f.

[6] Vgl. auch ebd., S. 50. Den Zusammenhang wird folgt skizziert: „1. There are regularities in the universe independent of us. 2. We human beings have invented consistent, stable forms of mathematics (usually with unique right answers). 3. Sometimes human physicists are successful in fitting human mathematics as they conceptualize it to their human conceptualization of the regularities they observe in the physical

schließlich auch aus den Ähnlichkeiten zwischen physischen Objekten und der Mathematik selbst – diese äußern sich in: Universalität (Objekte und Mathematik sind für alle gleich), Präzision (Objekte sind konkrete Einheiten, somit klar wahrnehmbar und abzählbar) und Konsistenz (Welt und Mathematik sind konsistent, denn „a given book is not both on the desk and not on the desk at the same time“).[7] Weiterhin ist die Welt stabil und generalisierbar – viele Dinge haben Eigenschaften, die man anderen zuschreiben kann, auch solchen, die man noch nicht gesehen hat. Nun wird Mathematik gerade durch diese Gemengelage auch effizient, denn sie vermag es, eine Menge Aspekte der erfahrenen Welt abzudecken und zu konzeptualisieren.[8]

Inwiefern die Mathematik nun aber auch *die* exakte Wissenschaft schlechthin darstellt oder darstellen kann, soll an dieser Stelle nicht näher untersucht werden. Es muss hier der Hinweis genügen, dass zumindest für Detailfragen das Bild *der* exakten Wissenschaft so nicht aufrecht erhalten werden kann. Solche Grenzfälle betreffen etwa die Frage ob 0,9999 gleich 1 ist oder nicht. Eine endgültige Lösung im Sinne eines Entweder-oder wird es hierfür jedoch nicht geben: „It will depend on the conceptual system one chooses. There is a mathematical subject matter in which 0.99999.... = 1, and another in which 0.99999.... $\neq$ 1.“[9] An diesen Grenzfällen zeigt sich also zumindest die Einschränkung, dass symbolische Logik nicht die Grundlage allen Wissens ist und unfehlbar wahr ist.

3.1.2 Der menschliche Ursprung der Mathematik

Lakoff und Nuñez betonen eine völlig andere Art gegen die Möglichkeit von Willkür in der Mathematik, nämlich ihren fundamental menschlichen Ursprung. Dieser, so die Argumentation, liegt schlichtweg darin begründet, dass es eben keine direkte Abbildung der Welt auf die Mathematik gibt, sondern dies immer nur über den Umweg des Menschen geschieht:

> No one observes laws of the universe as such; what are observed empirically are *regularities* in the universe. Regularities in the universe exist independent of us. *Laws* are mathematical statements made up by human beings to attempt to characterize those *regularities* experienced in the physical universe.

world.“ Ebd., S. 345f. Der springende Punkt in dieser Folge ist, dass sich die mathematischen Begrifflichkeiten jedoch gerade nicht irgendwo in der Welt finden, sondern ausschließlich im Menschen.

[7] Ebd., S. 350.

[8] Ebd., S. 364.

[9] Ebd., S. 9.

> Physicists, having physical bodies and brains themselves, can comprehend regularities in the world *only by using the conceptual systems that the body and brain afford.* Similarly, they understand mathematics *using the conceptual system that the body and brain afford.* What they do in formulating 'laws' is fit their human conceptualization of the physical regularities to their prior human conceptualization of some form of mathematics. There is no unmediated fit between mathematics and physical regularities in the world. All the 'fitting' between mathematics and the regularities of the physical world is done *within the minds of physicists who comprehend both.* The mathematics is in the mind of the mathematically trained observer, not in the regularities of the physical universe.[10]

Dass die angesprochene Regelmäßigkeit der Lebenswelt freilich auch erst Sprache ermöglicht, ist offensichtlich. Zusammen mit der Korrelation wiederkehrender sprachlicher Äußerungen in gleichen oder ähnlichen Situationen kann dadurch ein Zeichensystem geschaffen werden – bei sich ständig ändernden Rahmenbedingungen wäre dies nicht ohne weiteres möglich: „In general, if a child were born into a world in which the same event never recurred, the same object never appeared twice, and adults never used the same language in the same context, it is difficult to see how that child – whatever her cognitive abilities – could acquire a natural language.“[11] Was diese kognitiven Fähigkeiten unter anderem ausmacht, soll im folgenden Abschnitt erörtert werden.

3.2 Mathematisches Wissen

Numerische Fähigkeiten sind nicht nur auf den Menschen beschränkt: so drücken Ratten sieben bis neun Mal einen Hebel, wenn bei acht Betätigungen Futter und ansonsten eine Bestrafung eintritt[12] – gleichwohl ist dies nicht nur auf haptische Sinne beschränkt, sondern konnte auch für andere Sinne nachgewiesen werden.[13] Darüber hinaus ist das Tertium non datur geradezu alltäglich auch an Hunden zu beobachten, die eine Fährte aufnehmen und beim Ausschluss eines von zwei möglichen Pfaden den zweiten nicht weiter verifizieren, sondern diesen direkt nehmen.

[10] Ebd., S. 344. Hervorhebungen im Original.
[11] Tomasello 1999, S. 109.
[12] Vgl. Mechner/Guevrekian 1962, S. 464.
[13] Vgl. Meck/Church 1984, S: 3ff. Das Experiment trainierte Ratten das Drücken von Knöpfen in Abhängigkeit von abgespielten Tönen an.

Beim Menschen zeigt sich grundlegendes arithmetisches Wissen bereits in der Kleinkindphase.[14] Biologisch bedeutsam für all diese Prozesse ist die Gyrus angularis der Großhirnrinde, sie „plays a crucial role in the mental representation of numbers as quantities.“[15] Darüber hinaus scheint Zahlenverständnis im Gehirn unabhängig von anderem Wissen gespeichert zu werden. Die meisten mathematischen Fähigkeiten finden sich im linken Parietallappen. Hinweise hierauf liefern Berichte von einer Patientin, die nach einer Verletzung des linken Parietallappens einen gleichbleibenden Intelligenzquotienten aufwies und sprachlich versiert blieb, jedoch nicht mit mehr mit Zahlen größer als 4 umgehen bzw. etwas mit ihnen anfangen konnte.[16] Eine andere Patientin mit semantischer Demenz hatte keinerlei Probleme mit Zahlen, konnte aber schlecht Nicht-Zahlenmaterial benennen.[17]

Die angesprochene frühkindliche Entwicklung arithmetischen Wissens zeigt sich bereits wenige Tage nach der Geburt,[18] indem Kinder zwischen Mengen von zwei und drei Gegenständen unterscheiden können.[19] Mit etwa fünf Monaten besitzt ein Kind das Wissen, dass 1+1=2 und 2-1=1[20] ist – kurze Zeit später, dass 2+1=3 und 3-1=2 sind.[21] Dies gilt insbesondere auch für nicht-visuelle Bereiche. In Anwendung auf die Phonologie bedeutet dies, dass schon wenige Tage nach der Geburt Kleinkinder etwa zweisilbige von dreisilbigen Worten unterscheiden.[22] Untersucht wurden diese mit Mitteln der Habituation und Messungen der Betrachtungszeit, was klare Rückschlüsse auf die Unterscheidung von Zweier- und Dreiermengen zulässt – etwa in der längeren Betrachtungszeit von Dreiermengen.[23]

Grundlegendes arithmetisches Wissen wurde mit Puppenstuben getestet, die sich Erwartungsparadigmata zu Nutzen machten. So wurde eine

[14] Zu der Frage, welche mathematischen Fähigkeiten angeboren sind, vgl. Butterworth 1999.

[15] Dehaene 1997, S. 189.

[16] Vgl. Cipolotti/Butterworth/Denes 1991

[17] Vgl. Cipolotti/van Harskamp 2001, S. 306ff.

[18] Erste Untersuchungen wurden mit Kleinkindern im Alter von vier bis fünf Monaten gemacht, Folgestudien wiesen jedoch auf eine wesentlich frühere Möglichkeit hin. Vgl. Antell/Keating 1983, S. 695ff.

[19] Vgl. ebd. sowie die Folgestudie von Loosbroek/Smitsman 1990, nach welcher auch die Unterscheidung zwischen Mengen mit drei und vier Einheiten funktioniert.

[20] Vgl. Wynn 1992.

[21] Vgl. Wynn 1995, wo aus Untersuchungen mit Kleinkindern geschlossen wird, dass Zählen kein angeborenes Wissen ist, sondern dessen Prinzipien aus Erfahrung ableiten. Vgl. hierzu weiterhin die Folgestudie Wynn 1998.

[22] Vgl. Bijeljac-Babic/Bertoncini/Mehler 1991, S. 711ff.

[23] Vgl. Starkey/Cooper. 1980, S. 1033f.

Puppe platziert, diese alsdann durch einen Vorhang verdeckt und eine weitere Puppe sichtbar hinter den Vorhang gesteckt. Fiel nun der Vorhang und beide Puppen waren zu sehen, war die Reaktionszeit vergleichsweise niedrig, da alles so erschien wie erwartet. Fehlte die zweite Puppe jedoch oder waren drei Puppen zu sehen, wurde die Puppenstube länger betrachtet.[24] Ähnliche Experimente mit Affen zeigten vergleichbare Ergebnisse. So scheinen Schimpansen einfache Rechenoperationen durchführen zu können.[25] In Bezug auf die Erwartungshaltungen zeigte sich, dass der Überraschungseffekt dort noch stärker ist.[26]

Simultanerfassung, Schätzen und Zählen

Arithmetisches Wissen der oben beschriebenen Art bedeutet jedoch noch nicht die Fähigkeit zu rechnen. Insbesondere, wenn es um kleinere Mengen wie im Falle der Puppenstube geht, sind nämlich andere Prozesse beteiligt als etwa schon bei Berechnungen, in denen z.B. 7 und 2 addiert werden. Für kleinere Mengen ist nämlich vor allem der Prozess der Simultanerfassung bzw. das *Subitizing*[27] zuständig. Zählen bedeutet jedoch zunächst, jedem Element einer Menge ein Zahlwort zuordnen zu können, wobei im Sinne der Kardinalität das letzte Wort der Gesamtheit zugesprochen wird. Eine Beeinträchtigung des Kardinalitätsvermögens stellt etwa der Bericht eines Patienten dar, der zwar sagen konnte, welche Zahl einer anderen folgte, jedoch nicht mehr diese Zahl mit 1 addieren konnte.[28] Dass genaues Zählen im Sinne von Kardinalität wiederum verschieden ist von reinem Schätzen, lässt sich mit Patienten zeigen, die nach Verletzungen der linken Hirnhälfte nicht mehr exakte Berechnungen vollziehen konnten, gleichwohl immer noch gut Schätzen und ungefähre Berechnungen anstellen konnten.[29] Neben der Kardinalität und dem Schätzen macht schließlich

[24] Weitere Experimente dieser Art folgten, um sicherzustellen, dass die Konklusionen valide sind – etwa mit rotierenden Bühnen (turntables), um reine Position als Faktor auszuschließen (vgl. Koechlin/Dehaene/Mehler 1997) – oder Bällen als Austauschgegenstand, um Objektidentität auszuschließen (vgl. Simon/Hespos/Rochat 1995).

[25] Vgl. Boysen/Capaldi 1993, S. 52f. In diesen Fällen muss jedoch angemerkt werden, dass diese Ergebnisse keinesfalls mit Tieren in ihrer natürlichen Umgebung erzielt wurden, sondern nach jahrelangem Training. Dies steht im Gegensatz zu den vorherigen Experimenten, welche ohne vorheriges Trainieren auskamen.

[26] Vgl. Hauser/Neilage/Ware 1996, S.1514f.

[27] Zum ersten Mal findet sich dieser Begriff bei Kaufmann/Lord/Reese/Volkmann 1949 und wird bei Mandler/Shebo 1982 definiert als „the rapid, confident, and accurate report of the numerosity of arrays of elements presented for short durations." Ebd., S. 1. Vgl. ebd. Für eine Übersicht der Experimente zum *Subitizing* als eigenständiges numerisches Vermögen.

[28] Vgl. Delazer/Butterworth 1997, S. 314ff.

[29] Vgl. Dehaene/Cohen 1995, S. 83ff.

das Subitizing bzw. die Simultanerfassung die Fertigkeit aus, mit Zahlen umzugehen. Hierbei handelt es sich um die Fähigkeit, die Anzahl mehrerer Objekte gewissermaßen „mit einem Blick“ und ohne Abzählen[30] erkennen zu können – meist funktioniert dies bei Erwachsenen mit bis zu vier oder fünf Objekten. Auch hierfür werden Reaktionszeitenexperimente genutzt, wobei ab vier Objekten Fehler in der Angabe der Menge gemacht werden und die Verarbeitungszeit linear mit der Anzahl der Objekte steigt. Genau aus diesem Grund muss ab der Obergrenze auch von anderen Rechenoperationen unterschieden werden, denn „‚subitizable 3’ plus ‚subitizable 4’ does not produce a subitizable number; we don’t normally subitize 7.“[31]

Weitere Experimente betreffen den Zahlenstrahl. Empirische Unterstützung hierfür kommt von dem SNARC-Effekt, der die Verbindung von Zahl und Raum bezeichnet (Spatial-Numerical Association of Response Codes),[32] welcher unter anderem zeigt, dass Links-nach-Rechts-Leser mit der linken Hand schneller Urteile über kleine Zahlen treffen können, während es mit der rechten Hand für große Zahlen besser funktioniert.[33] Dies würde im Falle des Links-nach-Rechts-Lesens nichts anderes bedeuten, als dass kleine Zahlen auf der linken und große Zahlen auf der rechten Seite lokalisiert sind – nämlich auf den Enden eines kognitiven Zahlenstrahls.[34]

3.3 Zahl- und Zählsysteme in den menschlichen Sprachen

Viele Sprachen machen Gebrauch von der Referenz auf Körperteile, um das Zählen zu erleichtern. Diese Beobachtung wird nicht zuletzt unterstützt durch Erkenntnisse zum Gerstmann-Syndrom, bei dem Dyskalkulie mit Finger-Agnosie einhergeht – dass Patienten also weder rechnen noch Finger der Hand unterscheiden (und zudem oftmals nicht schreiben) können. Eine enge Verbindung von Fingerfertigkeit und Rechenkenntnis scheint damit sehr wahrscheinlich. Außerdem wendet der überwiegende Teil der Kinder in fast allen Kulturen spontan Fingerzählmethoden an.[35] Der Einsatz von Fingern an sich mag nun nahezu universell sein, dessen Ausprägungen hingegen sind durchaus verschieden. Dies lässt sich

[30] Es wurde durchaus behauptet, dass Subitizing auch einfach sehr schnelles, serielles Zählen sei, u.a. von Gelman/Gallistel 1978. Tatsächlich ist der Vorgang vom Zählen vollkommen verschieden. Vgl. auch Dehaene 1997, der es mit Rekurs auf Experimente mit Patienten mit Hirnschäden als „parallel preattentive processing“ ausweist.
[31] Lakoff/Nuñez 2000, S. 81.
[32] Vgl. Dehaene/Bossini/Giraux 1993, S. 371ff.
[33] Vgl. auch Dehaene 1997, S. 178 zur der Frage, was die genaue Verbindung zwischen Zahlen, Schreiben und den Händen bzw. den Fingern sei.
[34] Vgl. ebd., S. 380f.
[35] Vgl. Butterworth 1999, S. 45.

schon an den Unterschieden ablesen, wie weit mit dem natürlichen Inventar gezählt werden kann – ob es nun, wie im deutschen Kulturraum, unter ausschließlicher Verwendung der Finger, bis 10 sei, mit zusätzlicher Unterscheidung der Richtung an jeder Hand bis 10 (also insgesamt 20) wie in Japan, oder gar bis 74.[36]

Für das Zählen selbst werden jedoch häufig Basen verwendet, wie das im westlichen Kulturkreis übliche Dezimalsystem, von denen höhere abgeleitet werden. Das Dezimalsystem ist das am meisten verbreitete, jedoch keineswegs das einzige. Bekannt ist die Zwanziger-Zählweise auch im Französischen (etwa quatre-vingt, also 4x20, für achtzig und entsprechend quatre-vingt-dix also 4x20+10 für 90). Es bestehen überdies Zahlensysteme mit den Basen 6, 12, 60 oder 32. Unabhängig von der Behelfsnutzung von Fingern ist ein weiteres wiederkehrendes Merkmal das Auftauchen von Unregelmäßigkeiten im Zahlensystem, wie es etwa im Deutschen direkt im Anschluss an die erste 10-er Reihe auftaucht, indem sie nämlich durch elf und zwölf anstelle von eins-zehn und zwei-zehn fortgeführt wird. Im Hindi sind sogar die ersten 100 Zahlen komplett unregelmäßig.

Grundlegender als diese verschiedenen Arten der Basen von Zahlsystemen sind jedoch die Unterschiede in der Komplexität bzw. Größe des Zahlensystems selbst: bisher ist nur eine Sprache bekannt, die wohl gänzlich ohne Zahlwörter oder zumindest mit einem sehr kleinen Inventar an Zahlen auskommt, das Pirahã aus dem Amazonas-Gebiet.[37] Andere Zahlensysteme können zudem in ihrer Menge beschränkt sein. So gibt es in den Aboriginalsprachen Australiens Zahlensysteme, die bis 3 (Mangarayi) oder bis 5 (Yidini) gehen. Das Hixkaryana zählt auch bis 5, wobei 5 für „die Hälfte unserer Hände“ steht und die Ausnahme 10 (denn die Zahlenreihe ist zwischen 5 und 10 unterbrochen) für „beide Hände“ steht. Entscheidend ist hierbei, dass diese Systeme durch ihre unterschiedliche

[36] „While fingers are invariably used in body counting, other body parts and body locations (e.g. between-finger intervals) sometimes with repeated passages, up to 74, are used! The sequential order is not intuitive. For example, Yupno males [...] count up to 33: they start from the little finger of the left hand, then they count fingers on the right hand, the left foot, the right foot, then the ears, the eyes, the nostrils and the nose, the nipples, the navel, the left testicle, the right testicle and the penis. South of them, natives of the Torres Straight also count up to 33, but start from the little finger on the right hand, then count the wrist, the elbow, the shoulder, go on with a mid-chest point and start on the other side with the shoulder, elbow and wrist down to the left hand fingers; then they go to the fingers of the left foot, then the ankle, the knee, the left hip, the right hip, and down to the knee and the ankle to end on the little finger on the right foot. Use of body parts, typically finger counting, appears thus to be a universal strategy to deal with numbers.“ Semenza 2008, S. 221.

[37] Vgl. hierzu Gordon 2004.

Mächtigkeit und Komplexität alternative Grammatiken für den Umgang mit Zahlen darstellen – zumindest für den Grammatik-Begriff im engen Sinn. Alternativen für eine Zahlgrammatik im weiten Sinn würden hingegen z.B. die Nutzung anderer Basen betreffen, wie Holenstein ausführt:

> Man kann sich durchaus ein System der natürlichen Zahlenreihe denken, bei dem nicht die Zahlen 1 bis 9 als Basiszahlen fungieren, sondern etwa die Zahlen 91 bis 100 und daß alle andern Zahlen vor 91 (und, wenn man will, auch nach 100) von diesen Zahlen 91 bis 100 abgeleitet sind, für die wir als Symbole die ersten zehn Buchstaben unseres Alphabets einführen können: 91 = a, 92 = b usf. Die Zahl, die wir in unserem gängigen System als 1 bezeichnen, würde in diesem System am einfachsten als i-j bezeichnet, 2 als j-h, 10 etwas komplizierter als j-a+j-i.
>
> Eine solche Konstruktion des Zahlensystems ist logisch durchaus möglich (wenn auch, wegen seiner Ineleganz, im umgangssprachlichen wie wissenschaftlichen Gebrauch unwahrscheinlich.) Sie beinhaltet jedoch in kognitiver Hinsicht ein eklatantes *hysteron-proteron.* Die Zahlen 91 bis 100 sind einem endlichen Geist wie dem menschlichen nicht anders zugänglich als über die intuitive Unterscheidung der niedrigen Zahlen 1 bis 5 oder 6, bei gut geschulter Intuition, vielleicht bis 10 und 12 und über ebenfalls intuitiv zugängliche Regeln der Kombination eben dieser Zahlen. Die Zahlen 1 bis 5 können nur logisch, nicht kognitiv aus den Zahlen 91 bis 100 abgeleitet werden.[38]

Holensteins Hinweis auf die kognitiven Gegebenheiten, die die streng logische Möglichkeit solcher Alternativen einschränken, verdeutlicht hiermit die menschliche Grenze für grammatische Willkür im weiten Sinn: logisch möglich sind solche Alternativen durchaus, natürlich sind sie deswegen noch lange nicht. So oder so offenbart ein Blick in die Zahlsysteme verschiedener Kulturen wenn schon nicht die starke These Wittgensteins in dem Sinne, dass *wirklich* verschiedene Algebra-Systeme vorgefunden werden können (wobei sich hier die Frage stellt, ob diese dann überhaupt als solche erkannt werden würden), dann doch zumindest alternative Grammatiken derart, dass es mit Sicherheit andere Rechenpraktiken zu geben scheint. Im extremen Fall sind diese sogar so weit verschieden, dass diese nicht nur graduell, sondern tatsächlich kategorisch verschieden sind – wie etwa im Falle der Pirahã, wo sich der Zahlenbereich

[38]Holenstein 1980, S. 38.

auf den Bereich des Subitizing zu beschränken scheint. Darüber hinaus weist die körperliche Fundierung von Zahlensystemen hin auf eine menschliche Grenze für mögliche Willkür in diesem Bereich. Oben wurde bereits untersucht, auf welche Weise sich diese Fundierung auf Sprache und den Einsatz von Metaphern auswirkt. Analoges soll im nächsten Abschnitt für die Mathematik modelliert werden.

3.4 Metaphorik in der Mathematik

Auf den universellen Einsatz von Fingern für das Zählen wurde bereits verwiesen. Lakoff und Nuñez sehen Mathematik im Sinne der Metaphern-Theorie und der damit verbundenen Embodiment-Konzeption darüber hinaus als *durchweg* von Körperhaftigkeit strukturiert an – und entsprechend von Metaphern durchsetzt. Dies gelte unter anderem auch im Bereich der Logik,[39] so dass jegliche Mathematik immer den Charakter des *embodiment* habe.[40] In einer schwachen Lesart würde embodiment zunächst bedeuten,

> that every concept we have must somehow be characterized in the neural structure of our brains, and that every bit of thinking we do must be carried out by neural mechanisms of exactly the right structure to carry out that form of thought. Moreover, everything we learn can be learned only through a neural learning mechanisms capable, by virtue of its structure, of learning that kind of thing.[41]

Stärker ausgelegt ergeben sich jedoch Erklärungsmechanismen dafür, dass gerade weil Mathematik und Logik auf alltägliche Metaphern wie

[39] „Symbolic logic is not the basis of all rationality, and it is not absolutely true. It is a beautiful metaphorical system, which has some rather bizarre metaphors. It is useful for certain purposes but quite inadequate for characterizing anything like the full range of the mechanisms of human reason.“ Lakoff/Nuñez 2000, S. 8.

[40] Vgl. auch die Ausführungen zum Zusammenhang von räumlicher Komposition und dessen sprachlichen Niederschlag in Klassifikatoren. Im Lichte der *embodiment*-Theorie zeigt sich hier auch indirekt eine Quelle für den Urmeter im Menschen: „When we put physical segments end-to-end, the result is another physical segment, which may be a real or envisioned tracing of a line in space. In a wide range of languages throughout the world, this concept is represented by a classifier morpheme. In Japanese, for example, the word *hon* (literally, ‘a long, thin thing’) is used for counting such long, thin objects as sticks, canes, pencils, candles, trees, ropes, baseball bats, and so on – including, of course, rulers and measuring tapes. Even though English does not have a single word for the idea, it is a natural human concept.“ Ebd., S. 68.

[41] Ebd., S. 347.

z.B. Container oder Bewegungspfade aufbaut und diese aus grundlegender Objekterfahrung zieht, im Zuge einer naiven Ontologie auch der Irrglaube einer vom Menschen unabhängigen Existenz der Mathematik aufkommt:

> Human mathematics is not a reflection of a mathematics existing external to human beings; it is neither transcendent nor part of the physical universe. But there are excellent reasons why so many people, including professional mathematicians, think that mathematics *does* have an independent, objective, external existence. The properties of mathematics are, in many ways, properties that one would expect from our folk theories of external objects. The reason is that they are metaphorically based on our experience of external objects and experiences: containers, continuous paths of motion, discrete objects, numerosity for subitizable numbers, collections of objects, size, and on and on.[42]

Zahlen würden sich nämlich in wesentlichen Grundwahrnehmungsmodi ebenso verhalten wie Gegenstände, insbesondere aber in Bezug auf Objektsammlungen, Objektkonstruktionen, physische Segmentierung und die Bewegung entlang eines Pfades. Folglich sind mathematische Konzepte oftmals auf alltägliche zurückzuführen, so etwa Mengen über die Sammlung von Objekten in einer klar abtrennbaren Region, Rekursion über wiederholte Handlungen, komplexe Arithmetik über Rotation und Ableitungen über die Annäherung an eine Grenze. Unendlichkeit etwa wird als Iteration metaphorisiert, in Analogie zum (während der Lebenszeit) nie endenden Atmen, welches seinerseits durchaus endliche Teile haben kann (Anfang, Mitte, Ende eines Atemzuges). Ein weiteres, besonders eindrückliches Beispiel aus der Mengenlehre sind die Venn-Diagramme, die unter anderem auch grundlegende mathematische Relationen wie den Modus ponens oder das Tertium non datur visualisieren. So lösen Lakoff und Nuñez etwa auch diese von Wittgenstein angeführten Beispiele auf als direkt von Objektwahrnehmung und räumlicher Logik im Sinne von Objektanordnungen und -relationen abhängig und von dieser noch immer durchwirkt:

> The logic of Container schemas is an embodied spatial logic that arises from the neural characterization of Container schemas. The excluded middle, modus ponens, hypothetical syllogism, and modus tollens of classical categories are metaphorical applications of that spatial logic, since the Categories are

[42]Ebd., S. 349.

> Container metaphors, like conceptual metaphors in general, preserves the inferential structure of the source domain.[43]

Die Folge ist eine naive Ontologie bzw. Boolsche Algebra, die ihren Ursprung in der Objektwahrnehmung hat: dass etwa zwei Dinge nicht gleichzeitig am selben Ort sein und als Behälter (z.B. für andere Objekte) dienen können oder zueinander in Beziehung stehen. Gerade weil die Perzeption aber der (mathematischen) Konzeption vorausgehe, seien auch die Venn-Diagramme so intuitiv.[44] Dies läuft dem Anspruch der Logik freilich entgegen. Der Schritt von einer solch intuitiven Logik hin zur Boolschen Algebra bringt jedoch insofern Probleme mit sich, als dass diese eben nicht menschliche Wahrnehmung und Kategorisierung von Wahrnehmungseindrücken abbildet (insbesondere in Bezug auf die unscharfen Grenzen von familienähnlichen Begriffen):

> Perhaps the most important thing is to understand that Boole did not achieve what he thought he had achieved and what is still commonly taught as his achievement – a rigorous calculus for the laws of everyday human thought. There are two major differences between what he achieved and what he thought he had achieved. First, our everyday notion of classes does not include Boole's metaphorical inventions: the empty class and the universal class. Without these, his calculus does not work. Second, Boole had thought that classes of the kind he was describing fit everyday language. They do not. The meanings of ordinary category terms are far more complex than that; they include prototype structures of many kinds (typical cases, ideal cases, social stereotypes, salient exemplars, and more), radial categories, frame structure, metaphoric structure, and so on. [...] In logical philosophy, the logic of classes is sometimes represented as providing the rational structure of the universe: Things in the world are assumed to come in natural classes that have a Boolean structure. In this philosophical interpretation of the theory of classes, the empty class is a feature of

[43] Ebd., S. 44.

[44] „Call folk Boolean logic, with intersections and unions. That is why the Venn diagrams of Boolean logic look so natural to us. [...] Folk Boolean logic, which is *con*ceptual, arises from a *per*ceptual mechanism – the capacity for perceiving the world in terms of contained structures. From the perspective of the embodied mind, spatial logic is primary and the abstract logic of categories is secondarily derived from it via conceptual metaphor. This, of course, is very opposite of what formal mathematical logic suggests." Ebd., S. 45. Hervorhebungen im Original.

> the universe, and it is a basic truth about the universe that the empty class is a subclass of every class. It is important to understand that this is a peculiar philosophical interpretation of the theory of classes. The empty class is an extremely useful metaphorical invention for a branch of mathematics, but it is not a feature of the universe any more than it is a feature of ordinary everyday human thought.[45]

Der Kerngedanke hinter dieser Kritik ist schlichtweg – und in seiner Stoßrichtung der Wittgensteins sehr ähnlich –, dass natürliche Sprache einfach nicht so funktioniert wie mathematische Logiken – oder zumindest nur in einigen wenigen begrenzten Fällen: „real meanings of natural-language expressions are far more complex than any logicians have yet approached or are likely to in the foreseeable future. In fact, writers of logic textbooks usually have to search far and wide for examples that fit their formulas and proofs.“[46]

Die folgenschwere Schlussfolgerung aus der obigen, naiven Ontologie ist für die Mathematik jedoch eine Übertragung der Eigenschaften weltlicher Objekte auf die Zahlen: da Objekte unabhängig vom Menschen existieren, würden auch Zahlen unabhängig vom menschlichen Geist existieren. Lakoff und Nuñez deklinieren diesen Schluss bis zur Konstruktion der irrationalen und imaginären Zahlen durch.[47]

[45] Ebd., S. 130.

[46] Ebd., S. 138f.

[47] Die groben Schritte sind dabei wie folgt: „Arithmetic is consistent. It has to be, if its objects and their properties have an objective existence. Regarding closure, the Numbers are things in the World metaphor maps (a) onto (b): (a) Operations on things in the world yield unique, determinate other things in the world of the same kind. (b) Operations of numbers yield unique, determinate other numbers. In other words, the system of numbers should be closed under arithmetic operations. If it appears not to be, then there must be numbers still to be discovered that would produce this result. Thus, given the natural numbers and their arithmetic, there should be fractions (e.g., 1 divided by 2), zero (e.g., 3-3), negative numbers (e.g., 3-5), irrational numbers (e.g., sqrt(2)), and imaginary numbers (e.g., sqrt(1)).“ Ebd., S. 97.

3.4.1 Kritik an Boolescher Logik

Einige Begriffskategorien scheinen sich im Lexikon als nahezu universell herauszustellen. Ein guter Kandidat hierfür sind räumliche[48] Begriffe.[49] Tatsächlich scheint der Grundbestand an universellen Kategorien jedoch wesentlich kleiner zu sein als gemeinhin angenommen.[50] Dies gilt auch und insbesondere für Teile der Logik und ihren Entsprechungen in den Kategorien mentaler Logik, sowie für deren Grundbausteine logischer Junktoren

> the well-known languages of Europe and Asia appear to have connectives that are at least approximately equivalent to *and*, *or,* and *if.* [...] the existence of similar early-developing connectives in unrelated languages, taken with the great frequency of such connectives across languages, is certainly consistent with the notion of a universal mental propositional logic and may be hard to explain otherwise.[51]

Tatsächlich ist das abschwächende *appear* im obigen Zeit durchaus angebracht. Immerhin finden sich in der Liste semantischer Grundbausteine aller Sprachen von Wierzbicka kaum bis keine (streng) logische Junktoren[52] wie z.B. *oder*[53] – zumindest universeller Status scheint damit ebenso

---

[48] Holenstein betont in diesem Zusammenhang die räumlichen Platzhalter in den philosophischen Grundfragen: „‚Why is *there* something rather than nothing?' Es scheint, wenn nicht in allen Sprachen, so doch in sehr vielen Sprachen gar nicht möglich zu sein, reine, nicht räumliche modifizierte Existenzaussagen zu machen. Das aus dem Lateinischen stammende Wort ‚*Ex*istenz' (abgeleitet aus dem Verb *exsistere*, ‚hinausstellen' oder ‚heraus-stehen') und sein deutsches Äquivalent ‚*Da*sein' sind anschauliche Beispiele dafür [...] Es ist auch wohlbekannt, dass es in den natürlichen Sprachen üblich ist, Bestimmungen räumlicher Verhältnisse (‚Ausdehnung', ‚lang' und ‚kurz', ‚vor' und ‚nach' usf.) metaphorisch auf zeitliche Verhältnisse zu übertragen und nicht umgekehrt. Die Erfassung räumlicher Kategorien kommt im ontogenetischen und wohl auch im phylogenetischen Aufbau der Sprache vor der Erfassung zeitlicher Kategorien." Holenstein 2008, S. 87. Hervorhebungen im Original. En passant erteilt Holenstein damit auch eine Absage an Heideggers Programm, der „sich weder von solchen entwicklungsgeschichtlichen Tatsachen noch von der räumlichen Konnotation seiner zentralen Begriffe ‚Dasein' und ‚Existenz' dazu verleiten [ließ], den Raum und nicht die Zeit als primäre Dimensionen des Seins zu thematisieren. Sein Hauptwerk trägt nicht den Titel ‚Sein und Raum', sondern ‚Sein und Zeit'. Auch für Heidegger kommen außersprachliche Erfahrungen vor den sprachlichen." Ebd.

[49] Vgl. hierzu Bowerman/Choi 2001, S. 475ff.

[50] Vgl. Gentner/Goldin-Meadow 2003.

[51] Brain/O'Brien 1998, S. 51f.

[52] Vgl. zur Verbindung von Sprache und Logik und insbesondere der Rolle der genannten Phänomene auch: Gazdar/Pullum 1976, Fauconnier 1978 und Jennings 1994.

[53] Vgl. Wierzbicka 1996.

unwahrscheinlich[54] wie die direkte Abbildung von logischer auf sprachliche Form. Dass eine solche direkte Abbildung schon deshalb nicht fruchten kann, weil sprachliche Ausformungen schlichtweg diverser sind als streng logische und fein nuancieren, zeigt das Beispiel des Junktors *und*, der nicht nur im Deutschen mit den entsprechenden Konnotationen in Konstruktionen wie z.B. *sowie* und *auch* abgebildet wird. Grundsätzlich erfolgt die Unterscheidung hierbei entlang der Linien *und* und *mit*.[55] Im Japanischen etwa sind folgende Konstruktionen möglich:

> *hon to zasshi*
>
> buch und Zeitung
>
> Bücher und Zeitungen
>
> *hon ya zasshi*
>
> Buch und Zeitung
>
> (wie oben, mit der Implikation: nicht erschöpfende Liste)
>
> *hon yara zasshi (yara)*
>
> Buch und Zeitung (und)
>
> (wie oben, mit der Implikation: nicht erschöpfende Liste)
>
> *hon mo zasshi*
>
> Buch auch Zeitung
>
> (wie oben, mit der Implikation: nicht nur Bücher, sondern auch Zeitungen)
>
> *hon ni zasshi*
>
> Buch und Zeitung
>
> (wie oben, mit der Implikation: Bücher und (auch, dazu) Zeitungen.[56]

Dass eine Äquivalenzrelation zwischen sprachlichen und logischen Junktoren nicht ohne Weiteres angenommen werden kann, zeigt schon die etymologische Transparenz des *oder*-Junktors aufweisen, in den häufigsten Fällen nämlich in Beziehung zum Irrealis. Im Japanischen etwa wird *ka*, wie in *biiru ka wainu* ‚Bier oder Wein', formgleich als Fragepartikel eingesetzt:

---

[54] Vgl. für eine generelle Kritik an der Idee der Koordination von Logik und Sprache Ohori 2004, S. 41ff.

[55] Vgl. Stassen 2000, S. 4.

[56] Ohori 2007, S. 47f.

> besides its use as a disjunction marker, it [*ka*] can be used as a yes-no question marker (placed clause-finally, as in *Tabemasu ka?,* 'eat-POL KA' = 'Do you eat?'), indefiniteness marker (combined with WH-words, as in *dare-ka*, 'who-KA' = 'any/someone'), and a marker for newly acquired information (as in *Ame-ka*, 'rain-KA' = 'Oh, it's raining!'). All of these uses are related to the irrealis mode, i.e. some state of affairs which the speaker is not (or has just become) certain about.[57]

Wird der Zusammenhang von *und* und *oder* im logischen Sinne näher aufgelöst als p UND q = NICHT(NICHT p ODER NICHT q) sowie p ODER q = NICHT (NICHT p UND NICHT q)[58], wird die Ableitbarkeit von *oder* durch *und* deutlich. Dies bedeutet jedoch nichts anderes, als dass der *oder*-Junktor mehr kognitiven Aufwand bedeutet als *und.*[59] Konsistent hiermit ist die Beobachtung, dass sich keine Sprache finden lässt, in der *und* stärker markiert ist als *oder.*[60]

Letztlich bleibt festzuhalten, dass die logischen Junktoren wohl keineswegs so grundlegend sind, wie es die Philosophen gerne hätten – zumindest nicht, was menschliche Wahrnehmung angeht: „the great diversity of human languages makes it difficult to assume any transparent mapping from linguistic forms to logical connectives. [...] It seems that logical operators are higher-order abstractions, and there can be a system of representations which mediates language and logic.“[61]

3.4.2 Mathematik und Embodiment

Mit ihrem Gegenprogramm einer verkörperten Mathematik zu einer solchen „Mathematik-Romantik“ holen Lakoff und Nuñez den Wahrheitsanspruch der Disziplin auch zurück in den Fächerkanon, da mathematische Wahrheit den gleichen Stellenwert habe wie alle anderen Wahrheiten auch. Dieser basiere nämlich vor allem darauf, dass eine Aussage dann wahr ist, „if our embodied understanding of the statement accords with our embo-

[57] Vgl. ebd., S. 65.
[58] Vgl. ebd., S. 51.
[59] Vgl. ebd., S. 55. Dort wird argumentiert, dass der cognitive Mehraufwand des *oder*-Junktors daraus resultiert, dass der Sprecher eine Vielzahl möglicher alternativer Welten aufbauen und aus diesen auswählen muss – woraus sich der Bedarf eines erklärenden Markers ergibt: „In order to facilitate such processes, the language user had better provide an explicit signal that may help proper comprehension.“ Ebd.
[60] Vgl. ebd.
[61] Ebd., S. 66. Vgl. auch Jennings 1994 und 2004 für gleichlautende philosophische Erkenntnisse.

died understanding of the subject matter and the situation at hand.“[62] Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass Wahrheit von verkörperlichter menschlicher Wahrnehmung abhängt.[63]

Mit diesem Schritt können nun aber auch die angeblich spekulativen Beispiele Wittgensteins, etwa zu einem alternativen Modus ponens gedeutet werden. Es liegt natürlich in der Natur der Sache, eine Alternative zum Tertium non datur nicht wirklich (durch-)denken zu können – weswegen Wittgenstein zu Behelfskonstruktionen wie den Holzverkäufern greift, da diese zumindest die Alternativen zum Aspekt der sozialen Praktik hervorzuheben vermögen. Dass für die mathematischen Schlüsse keine Alternativen angegeben werden können, liegt auf der Hand. Gleichwohl sind diese aber zumindest als möglich *denkbar* – gerade weil sie vom Menschen abhängen. Nichts anderes jedoch sagt Wittgenstein.

[62] Lakoff/Nuñez 2009, S. 366. Vgl. auch Lakoff/Johnson 1999, insbesondere Kapitel 6-8.

[63] Den Gedanken des Embodiment auf andere Wissenschaftsbereiche ausweitend, kritisiert Lakoff auch die Philosophie und insbesondere die Phänomenologie – solange sie sich nicht empirischer Forschungsergebnisse bedient: „The phenomenological person, who through phenomenological introspection alone can discover everything there is to know about the mind and the nature of experience, is a fiction. Although we can have a theory of a vast, rapidly and automatically operating cognitive unconscious, we have no direct conscious access to its operation and therefore to most of our thought. Phenomenological reflection, though valuable in revealing the structure of experience, must be supplemented by empirical research into the cognitive unconscious.“ Lakoff/Johnson 1999, S. 5. Die explizite Nennung der Phänomenologie ist jedoch nur exemplarisch zu verstehen und nicht auf diese beschränkt, mit ähnlichen Gründen werden im selben Zug auch Kant, Descartes, Frege und der Utilitarismus kritisiert.